



UJAT

UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



Diseño educativo para la
enseñanza de la cinemática
de mecanismo

-Perera-Cortez et al.

JOBS

π $\ddot{x}$

DACB • UJAT

Journal of Basic Sciences

Volúmen 12
Número 34
mayo-agosto 2026

ISSN:2448-4997
<https://revistajobs.ujat.mx>

OPEN  ACCESS





En el número 34 del Journal of Basic Sciences se presentan ocho contribuciones que reflejan el carácter multidisciplinario de la revista, al abordar temas relacionados con ingeniería y ciencias de materiales, enseñanza de las ciencias, farmacéutica, física y matemáticas. Desde sus respectivas áreas, los trabajos emplean herramientas científicas para ampliar el conocimiento, fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y contribuir a la solución de problemáticas de interés social, tecnológico y académico.

El número inicia con el artículo de López-Zapata et al., en el que se evalúa la corrosión atmosférica del acero al carbono y cobre en el municipio de Cunduacán, Tabasco, considerando la presencia de contaminantes atmosféricos asociados al entorno. Los resultados destacan la importancia de fortalecer las estrategias de control de emisiones y protección de materiales empleados en infraestructura industrial y residencial, particularmente en regiones con actividad petrolera.

Posteriormente, se presentan dos contribuciones relacionadas con la enseñanza de las ciencias. Perera Cortez et al. desarrollan y validan un prototipo didáctico de un mecanismo biela-manivela con corredera para la enseñanza de la cinemática en estudiantes de ingeniería. El dispositivo integra teoría, simulación y mediciones experimentales, favoreciendo una comprensión más interactiva de los conceptos estudiados. Por su parte, López-de Dios et al. analizan el uso y valoración de herramientas informáticas por profesores de la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco durante la transición hacia la enseñanza virtual ocasionada por la pandemia de COVID-19. Sus resultados resaltan la necesidad de fortalecer no solamente las competencias técnicas digitales, sino también su adecuada integración pedagógica en la enseñanza de disciplinas experimentales.

En el área farmacéutica, Díaz-Martínez et al. comparan la ciclofosfamida y la bendamustina para el tratamiento del cáncer desde una perspectiva farmacoterapéutica y farmacoeconómica. El estudio considera eficacia, costos, reacciones adversas y disponibilidad de los medicamentos, proporcionando elementos para apoyar la toma de decisiones clínicas. Los resultados muestran ventajas económicas para la ciclofosfamida, mientras que la bendamustina representa una alternativa cuando se priorizan aspectos relacionados con tolerabilidad y seguridad.

Dentro del área de física, Rendón et al. estudian la variación de la presión atmosférica con respecto a la altura mediante modelos que incorporan un gradiente lineal de temperatura en las ecuaciones de estado de los gases ideales y de van der Waals. Esta aproximación permite representar de manera más realista el comportamiento de la atmósfera terrestre y explorar posibles comportamientos en Venus, Marte y Titán.

El número incluye además tres contribuciones del área de matemáticas. Balcázar-Araiza y Ojeda presentan una generalización dentro del Cálculo Fraccionario Multivariable mediante

la definición y análisis de integrales y diferenciales de Riemann-Liouville de tipo (α, k, P) , estableciendo propiedades y teoremas fundamentales asociados a estos operadores. Toledo et al. desarrollan un método numérico basado en elementos finitos para resolver ecuaciones diferenciales unidimensionales que involucran la derivada conformable, ofreciendo una herramienta para la aproximación eficiente de este tipo de problemas. Finalmente, Remigio-Juárez et al. presentan una introducción a los complejos de Vietoris-Rips y a la homología persistente, incluyendo el uso de diagramas de persistencia y herramientas computacionales en Python para el análisis de conjuntos de datos, con posibles aplicaciones en diversas áreas científicas.

De este modo, el número 34 del Journal of Basic Sciences reúne investigaciones y contribuciones académicas que muestran la diversidad de enfoques de las ciencias básicas y sus aplicaciones. En conjunto, los artículos fortalecen la difusión y divulgación del conocimiento científico y buscan generar impacto en los ámbitos regional, nacional e internacional.

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

CONSEJO EDITORIAL

- **Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé.** Editora en Jefe. Matemáticas. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-7342-0888>
- **Dr. Adib Abiu Silahua Pavón.** Gestor Editorial. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-5344-1430>

COMITÉ EDITORIAL

- **Dra. Nancy Romero Ceronio. Editora Asociada.** Química. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0001-8169-3811>
- **Dra. María Arely López Garrido.** Editora Asociada. Ciencias Computacionales. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-1780-5748>
- **Dr. José Luis Benítez Benítez.** Editor Asociado. Física. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0009-0000-0561-5029>
- **Dr. Domingo González Martínez.** Editor Asociado. Matemáticas. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-3754-0636>
- **Dr. Carlos Mario Morales Bautista.** Editor Asociado. Química. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-4825-4558>
- **Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes.** Editor Asociado. Física. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-1433-8083>
- **Dr. Carlos Javier López Victorio.** Editor Asociado. Químico Farmacéutico Biólogo. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-0703-7266>
- **Dr. Manuel Salud Antonio Pérez.** Editor Asociado. Geofísica. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco <https://orcid.org/0009-0003-8844-6604>

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 12, Núm. 34, agosto de 2026, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. <https://revistajobs.ujat.mx>. Editor Responsable de la Revista: Addy Margarita Bolívar Cimé. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 27 de junio de 2026.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación y de esta Casa Editora.

Las publicaciones respaldadas con el sello editorial de la UJAT no podrán utilizarse para entrenar modelos de IA generativa, a menos de que haya una declaración expresa, tanto de la Universidad como de los autores y/o herederos.

CONTENIDO

	Pág.
Corrosión del cobre y el acero en condiciones atmosféricas	1
<i>López-Zapata, O. A., Del Ángel-Meraz, E., Corvo-Pérez, F. E., Valdés-Clemente, C. S.</i>	
Diseño educativo para la enseñanza de la cinemática de mecanismo	15
<i>Perera-Cortez, M. A., Jacobo-Cortés, E. A., Hidalgo-Arcos, W.</i>	
Uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la química universitaria durante la pandemia de COVID-19	31
<i>López-de Dios, C. del C., Montejo-Ramos, R., Acosta-Pérez, L. I.</i>	
Impacto financiero y clínico de la ciclofosfamida y bendamustina en el tratamiento de cáncer en México	48
<i>Díaz-Martínez, I. G., Castro-Georgana, V. F., Vázquez-Cahuich, D. A., De la Cruz-López, J. J., García-Jesús, K. P., Flores-Dorantes, M. T., Pedraza-Montero, P.</i>	
Estimación de la presión en atmósferas planetarias mediante gradientes de temperatura constante y lineal	65
<i>Rendón, F., Pulido-Guerrero, R., Munguía, E.</i>	
On Riemann-Liouville Operators of type (α, k, P) and Related Function Spaces	80
<i>Balcázar-Araiza, R. C., Ojeda, N. R.</i>	

**Finite element method for a one-dimensional conformable
differential equation with Dirichlet boundary condition**

101

*Toledo, P.,
Hernández-Linares, C. A.,
Avendaño-Garrido, M. L.*

Homología persistente

121

*Remigio-Juárez, J.,
Almaguer-Cantú, M. H.,
Domínguez Colín, R.,
Hernández Garibay, J. R.,
Rodríguez Henríquez, L. M. X.*

Corrosión del cobre y el acero en condiciones atmosféricas

Corrosion of Copper and Steel Under Atmospheric Conditions

López-Zapata, O. A.¹, Del Ángel-Meraz, E.^{1*}, Corvo-Pérez, F.E.², Valdés-Clemente, C. S.³

¹Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Ingeniería y Arquitectura Posgrado en Ciencias en Ingeniería, Carretera Cunduacán-Jalpa km.1. Col. La Esmeralda, Cunduacán, Tabasco, México.

²Universidad Autónoma de Campeche, Centro de Investigación en Corrosión, Av. Héroe de Nacozari 480, Chiná, Campeche, México.

³Centro Nacional de Investigaciones Científicas (CNIC). Avenida 25, Esquina 21-A, No. 15202, Cubanacán, Playa, La Habana, Cuba.

**ebelia.delangel@ujat.mx*

Resumen

La investigación se realizó en entorno rural-urbano con el objetivo de evaluar la corrosión atmosférica de acero al carbono y cobre. Para determinar la categoría de corrosividad del ambiente, se utilizó la norma ISO 9223. Los contaminantes atmosféricos se determinaron de acuerdo con las metodologías y protocolos descritos en la norma ISO 9225, utilizando el método de vela húmeda para medir los iones cloruro (Cl^-) y el plato de sulfatación para detectar el dióxido de azufre (SO_2). Los resultados indican que el contaminante SO_2 se clasifica dentro de los parámetros P_0 a P_1 , lo que indica niveles de potencial corrosivo bajos, mientras que al contaminante Cl^- se le asigna un índice de agresividad de S_2 , reconocido como alto. En cuanto a la categoría de corrosividad de los materiales en el ambiente de estudio, el acero al carbono mostró una clasificación C_2 definida como baja, el cobre categoría C_1 interpretada como muy baja.

Palabras claves: *agresividad atmosférica, contaminantes, corrosión, metales, Normas ISO*

Abstract

The research was carried out in a rural-urban environment with the aim of evaluating the atmospheric corrosion of carbon steel and copper. To determine the corrosivity category of the environment, the ISO 9223 standard was used. Air pollutants were determined according to the methodologies and protocols described in ISO 9225, using the wet sail method to measure chloride ions (Cl^-) and the sulfation dish to detect sulfur dioxide (SO_2). The results indicate that the pollutant SO_2 is classified within the parameters P_0 to P_1 , indicating low levels of corrosive potential, while the pollutant Cl^- is assigned an aggressiveness index of S_2 , recognized as high. Regarding the category of corrosivity of the materials in the study environment, carbon steel showed a C_2 classification defined as low, copper category C_1 interpreted as very low.

Keywords: *atmospheric aggressiveness, pollutants, corrosion, metals, ISO Standards*

Recibido: 17-septiembre-2025, Aceptado: 19-enero-2026, Publicado: 31-agosto-2026

1. Introducción

La corrosión se puede definir como un proceso que conduce al deterioro gradual de las aleaciones metálicas como consecuencia de su exposición de las condiciones atmosféricas. Este proceso se inicia cuando se forma una fina película de humedad en la superficie del metal, creando así un entorno propicio para las reacciones electroquímicas que aceleran la degradación del material [1], [2]. El acero al carbono y cobre, se utilizan con frecuencia en la construcción y el mantenimiento de proyectos de infraestructura tanto industriales como residenciales. Es imperativo reconocer que cada material posee una vida útil intrínsecamente, que está sujeta a la a una multitud de parámetros ambientales, que ocasionan la corrosividad atmosférica de estos materiales. Las causas de este deterioro pueden provocar importantes pérdidas financieras a largo plazo, atribuibles principalmente a la necesidad de realizar reparaciones continuas o de reemplazar por completo las estructuras y los componentes corroídos [3]. Dado que las tasas de corrosión están profundamente influenciadas por los factores climáticos, cualquier alteración del clima global de la Tierra, en particular las asociadas al aumento de los niveles de temperatura y humedad, es probable que dé lugar a una tasa acelerada de degradación de los materiales y un mayor deterioro de los edificios y la infraestructura.

Es fundamental reconocer que incluso las fluctuaciones más pequeñas en las variables experimentales pueden ejercer una influencia sustancial tanto en la velocidad como en el alcance de los procesos de corrosión, lo que vuelve aún más complejas las interacciones del proceso. Factores como: los niveles de humedad, las precipitaciones, la duración de la presencia de humedad (tiempo de humectación- TdH) y la presencia de ciertos contaminantes, principalmente los cloruros y los sulfatos, pueden actuar en conjunto para acelerar significativamente la velocidad de corrosión de varios materiales. Además, estos parámetros climáticos están sujetos a modificaciones en función del contexto ambiental específico en el que se encuentran los materiales, ya sea que ese ambiente se caracterice por ser un entorno marino, las características mixtas de los paisajes urbanos y rurales o los entornos más controlados de las zonas industriales. En el contexto de México, cabe destacar que los modelos no lineales empleados en los estudios de corrosión se centran en tres factores críticos: la humedad, la temperatura y la concentración de cloruros en la atmósfera, estos parámetros son reconocidos internacionalmente como los más influyentes en la degradación de materiales metálicos expuestos al ambiente.

La humedad relativa y la temperatura determinan el tiempo de humectación (TdH), parámetro fundamental para la formación de electrolitos superficiales que facilitan las reacciones electroquímicas [4]. Una humedad relativa por encima de 80 % y temperaturas moderadas incrementan significativamente la velocidad de corrosión en aceros al carbono y otros metales. La temperatura, por su parte, influye tanto en la cinética de las reacciones corrosivas como en la evaporación del electrolito superficial. En climas tropicales, como los de la costa del Golfo de México, temperaturas elevadas combinadas con alta humedad intensifican los procesos de corrosión [5].

Finalmente, la concentración de cloruros en la atmósfera, derivada principalmente de la proximidad al mar y de aerosoles salinos, es un factor determinante en la agresividad ambiental. Los cloruros desestabilizan las capas pasivas y promueven la formación de productos de corrosión poco protectores, aumentando la tasa de ataque [6], [7]. En México, la aplicación de estos modelos permite clasificar zonas en categorías de agresividad de C_1 a C_X [4], optimizando la selección de recubrimientos, materiales y estrategias de mantenimiento preventivo para infraestructura metálica. Sí existen modelos no lineales específicos desarrollados exclusivamente para México; sin embargo, se emplean adaptaciones locales de los modelos internacionales para reflejar las condiciones climáticas y de contaminación propias de cada región.

El municipio de Cunduacán, Tabasco, combina la interacción de la presencia de los contaminantes de cloruro de sodio (NaCl) provenientes de la cercanía con el Golfo de México, el dióxido de azufre (SO₂), generado por el tráfico vehicular, y las emisiones de gases industriales, debido a la actividad en materia de hidrocarburos que se realiza en los alrededores y los factores meteorológicos (humedad relativa y temperatura)[8], [9].

La gran mayoría de las construcciones se han planificado y ejecutado meticulosamente bajo el supuesto de que las condiciones climáticas actuales y futuras se parecerán mucho a las que se han observado históricamente. Sin embargo, es de suma importancia reconocer que pocas de estas construcciones han considerado adecuadamente la vulnerabilidad inherente de la planificación y el diseño de la infraestructura civil a los efectos multifacéticos del cambio climático [10].

Las iniciativas de investigación que se han llevado a cabo sobre la corrosión atmosférica en el estado de Tabasco, no han correlacionado el impacto del cambio climático con las tasas de corrosión de los materiales y la deposición de contaminantes, que son dos fenómenos que están estrechamente relacionados, y una comprensión más profunda del clima y sus consecuencias asociadas tiene el potencial de mejorar significativamente el diseño y la resiliencia de los nuevos desarrollos de infraestructura. Cabe destacar que el estado de Tabasco ha sido clasificado en el Atlas Nacional de Riesgos por presentar un alto grado de vulnerabilidad a los efectos adversos del cambio climático [11], y la naturaleza corrosiva del medio ambiente en este Estado está muy influenciada por su proximidad geográfica al Golfo de México, además de la presencia de áreas significativamente industrializadas que contribuyen a la corrosividad general del medio ambiente.

2. Metodología Experimental

2.1 Localización de la estación de ensayo

El sitio del ensayo se colocó en la azotea del edificio del Centro de Investigación de Ciencia y Tecnología Aplicada de Tabasco (CICTAT), ubicado en el municipio de Cunduacán, Tabasco. En la Figura 1, se observa el mapa del municipio de Cunduacán, la estación del ensayo se señaló con el punto rojo y las x representan la ubicación de centros de procesamiento de hidrocarburos. Se utilizó un rack para el ensayo de los metales a la exposición atmosférica, de acuerdo con las especificaciones de la norma ASTM-G5010.



Figura 1. Localización del rack de exposición

En la Figura 2, se muestra el rack donde se expusieron las probetas rectangulares de acero al carbono y cobre con dimensiones de 20 mm x40 mm x 1 mm en un ángulo de 45° en el marco y separadas por aisladores plásticos (para esto se utilizaron remates comerciales como se señala en la Figura) según las normas ISO 8565[12] y se sometieron a un año de exposición atmosférica. se ubicaron dispositivos de plato de sulfatación y vela húmeda para determinar los contaminantes dióxido de azufre y iones cloruros, cuyas

tasas de deposición se calcularon siguiendo la norma ISO 9225 [13]. Estos dispositivos se expusieron al mismo tiempo que las probetas del ensayo y fueron analizados y reemplazados cada mes.



Figura 2. Rack de exposición de las probetas

2.2 Cálculo de Tiempo de humectación y deposición de contaminantes

Los datos meteorológicos temperatura (T), humedad relativa (HR), para la estimación del tiempo de humectación mediante el complejo T-HR se tomaron de la página de la CONAGUA[14] específicamente de la estación meteorológica de Cunduacán. Posteriormente para calcular el tiempo de humectación en GNU Octave, se parte del criterio definido en ISO 9223, que establece humectación cuando la humedad relativa supera 80 % y la temperatura en el rango 0-25 °C. El script primero importa datos climáticos (temperatura y humedad relativa horaria) desde un archivo de Excel. Posteriormente separan las columnas de temperatura y humedad y se genera una variable lógica que identifique las horas que cumplen las condiciones de humectación. Con la función sum se cuentan los intervalos válidos para obtener el número total de horas de humectación. El resultado que muestra la pantalla se exporta a otro archivo.

2.3 Estimación de la velocidad de corrosión

Para estimar la velocidad de corrosión, se realizaron retiros de las muestras de metal (acero y cobre), en periodos de tres meses, es decir, en cuatro periodos durante un año. Para determinar la pérdida de masa se utilizó la Norma ISO 8704, para la remoción de los productos de corrosión mediante limpieza química, por lo que se realizaron inmersiones sucesivas de cada probeta en las soluciones descritas en la Tabla 1, (se utilizaron tres probetas expuestas de cada material) a partir de las cuales se realizó un registro de masa y determinar la velocidad de corrosión por pérdida de masa.

El cálculo de velocidad de corrosión se realizó utilizando la ecuación 1 dada por la norma ISO 9226:2012:

$$r'_{corr} = \frac{\Delta m}{A \cdot \rho \cdot t} \quad (1)$$

Donde:

r'_{corr} : velocidad de corrosión ($\mu\text{m/a}$)

Δm : pérdida de masa del metal (g)

A : área de metal expuesta (m^2)

ρ : densidad del metal expuesto (g/cm^3)

t : tiempo de exposición (años)

Tabla 1. Soluciones para limpieza química de acuerdo con la Norma ISO 8704

Material	Chemical	Tiempo	Temperatura (°C)
Acero	500 ml de ácido clorhídrico (HCl, $\rho=1,19$ g/mL) 3,5 g hexametilentetramina Agua destilada hasta completar 1000mL	10 min	20 a 25
Cobre	50 g de ácido sulfámico Agua destilada hasta completar 1000 mL	5 min	20 a 25

3. Resultados

3.1 Tiempo de humectación

En la Figura 3, se muestra el TdH mensual (barras grises), y el TdH acumulado (línea negra con puntos) para obtener el TdH anual. El monitoreo del TdH anual, se obtuvo en 4 periodos: 1) de febrero – abril 2024, fueron 216 h en febrero, 45 h en marzo, casi nulo en abril, febrero mostró el valor más alto del periodo. 2) De mayo a agosto 2024, a pesar de las lluvias ligeras, se mantuvo con valores de 1 a 17 h, esto indica que la humectación fue casi nula; 3) en el siguiente periodo de septiembre – noviembre 2024, hubo un incremento con valor un de 14 h en septiembre, 121 h en octubre, y con valor de 58 h en noviembre; 4) de diciembre 2024 – febrero 2025, fue el periodo más crítico del año, diciembre con 220 h, 137 h en enero y 240 h en febrero, estos valores son altos, superando ampliamente el umbral de 100 h considerado como crítico de acuerdo a la Norma ISO 9223.

Con base en los resultados, el TdH para la atmósfera de Cunduacán fue de 1085 h, en el rango de $1-240 \pm 118$ horas. Cunduacán, Tabasco de acuerdo con la Norma ISO 9223:2012 tiene una categoría de agresividad τ_3 basada en el tiempo de humectación, lo que representa un entorno de moderada agresividad. Aunque los valores de TdH no fueron altos, la persistencia de la humedad, principalmente en enero y febrero, donde hubo aumento del TdH, incrementó los procesos corrosivos sobre los materiales [15].

En contraste con el TdH estimado por Del Angel et al. (2009) durante inicios del milenio, el TdH osciló entre 4603-5741h en atmósfera urbana (Villahermosa, Tabasco), los valores calculados para Cunduacán, Tabasco a un año de monitoreo fueron de 1085 h, este dato resulta menos de la tercera parte de las horas de humectación reportadas para principios de los 2000 [17].

Durante este año del estudio se observó que las temperaturas registradas fueron altas la mayor parte del tiempo, en el rango de 17.2-42.5 °C, ocasionando la disminución de los tiempos de humectación estimados para el ambiente de Cunduacán, Tabasco lo que revela en parte, el alcance del cambio climático, principal responsable de las alteraciones existentes en las frecuencia y duración de los periodos húmedos y secos [18], relacionados con el aumento o disminución de los niveles de humedad en algunas regiones [19].

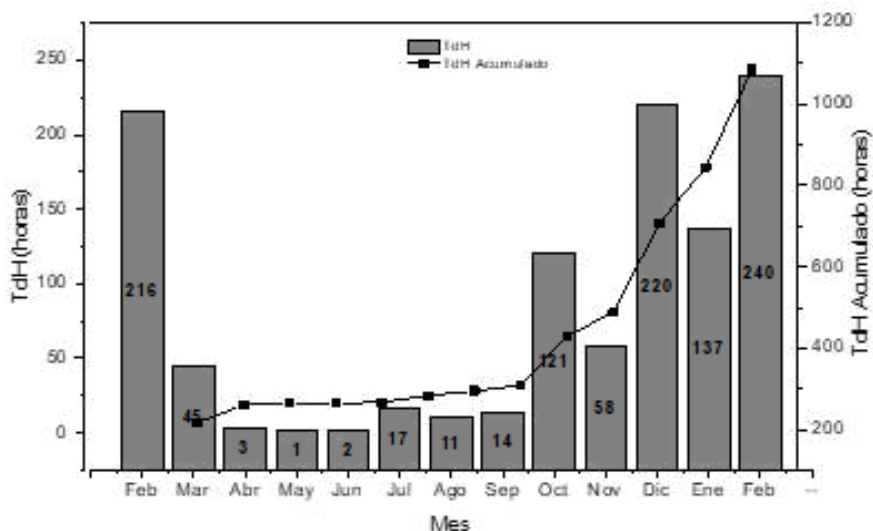


Figura 3. Tiempo de humectación (TdH) calculado durante el periodo del ensayo

En la Tabla 2, se presentan algunas de las investigaciones más recientes que reportan la estimación del tiempo de humectación anual para distintas zonas, destacan la diferencia entre los tipos de atmósfera, y que en las zonas marina se obtuvieron menores categorías de agresividad dada sus cercanías con la costa, sin embargo, esta estimación no tiene en cuenta la naturaleza de los materiales expuestos. La categoría de agresividad de τ_3 , con 1085 horas se acerca bastante a lo estimado por Tahandar y colaboradores en el 2022 para el sitio de Mandalay, Myanmar donde también se considera atmósfera urbana. [20] Por otro lado, [21] reportaron un TdH categoría τ_3 , pero para un ambiente marino con 2439 h, reflejando que la amplitud en los rangos de asignación de categoría de ISO es bastante amplia.

Tabla 2. Comparativa de las Categorías y TdH para Cunduacán y otros estudios

Referencia	Tipo de Atmósfera	TdH (horas/año)	Categoría
[22]	Urbana	4499	τ_4
	Urbana Industrial	4743	τ_4
	Urbana	5032	τ_4
	Urbana industrial	4588	τ_4
[20]	Urbana	5532	τ_4
	Urbana	4002	τ_4
	Urbana	1172	τ_3
[23]	Marina	3344	τ_4
[24]	Marina	2439	τ_3
Este trabajo	Urbana-rural	1486	τ_3

3.2 Deposición de contaminantes

En la Figura 4, se muestra la variación mensual de la velocidad de deposición de iones cloruros determinadas mediante los dispositivos de vela húmeda expuestos. Las deposiciones más altas de cloruros ocurrieron durante febrero 2025, que presentó la más alta deposición (10.96 mg Cl/m²·día), dado que la fuente de cloruros suele ser la costa.

En agosto de 2024 se registró una velocidad de deposición de $5.06 \text{ mg Cl}^-/\text{m}^2\cdot\text{día}$, a pesar de registrar una baja humectación ($\text{TdH}=11 \text{ h}$), la alta carga de cloruros sugiere transporte por brisas salinas o vientos marinos, típicos de la región. Los meses de marzo ($2.8 \text{ mg Cl}^-/(\text{m}^2\cdot\text{día})$) y julio ($2.7 \text{ mg Cl}^-/(\text{m}^2\cdot\text{día})$), obtuvieron una deposición moderada mientras que de abril a junio y octubre a enero estuvieron en el rango de $0.92 - 1.31 \text{ mg Cl}^-/(\text{m}^2\cdot\text{día})$ que representa una deposición baja. En octubre se registró el valor más bajo ($0.14 \text{ mg Cl}^-/(\text{m}^2\cdot\text{día})$), posiblemente asociado a las lluvias ocurridas que limpian la atmósfera y baja actividad de vientos. El promedio anual de velocidad de deposición de iones cloruro fue de $17.19 \pm 3.08 \text{ mg Cl}^-/(\text{m}^2\cdot\text{día})$ con lo que se le asignó una categoría de agresividad S_1 con base en la clasificación de la Norma ISO 9223.

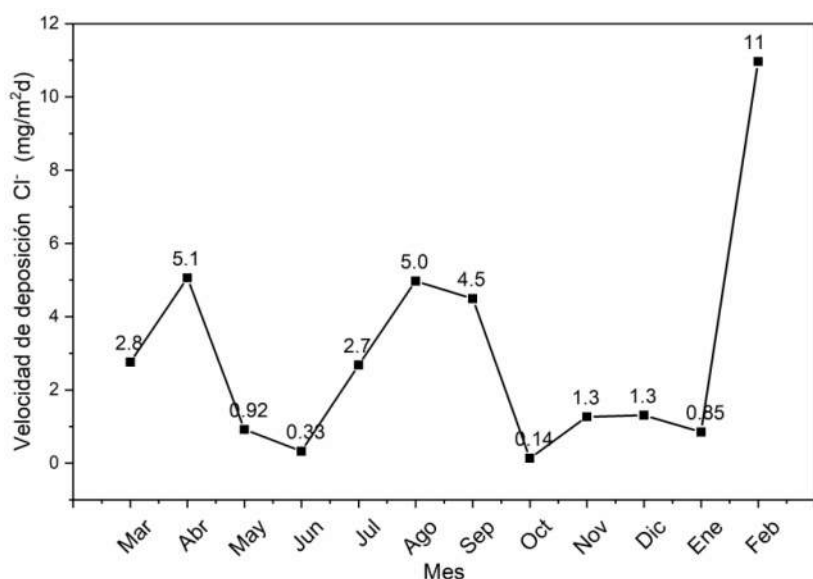


Figura 4. Variación mensual de la velocidad de deposición de cloruros ($\text{mg Cl}^-/(\text{m}^2\cdot\text{día})$)

En la Figura 5, se presenta la velocidad mensual de deposición de dióxido de azufre en la atmósfera, obtenidas a través de los platos de sulfatación expuestos en los diferentes meses. El mes con mayor deposición de SO_2 fue junio ($8.61 \text{ mg SO}_2/\text{m}^2\cdot\text{día}$) que coincide con un incremento en el tiempo de humectación. Seguido de enero ($5.56 \text{ mg SO}_2/(\text{m}^2\cdot\text{día})$). Los meses de mayo ($5.26 \text{ mg SO}_2/(\text{m}^2\cdot\text{día})$), diciembre ($3.8 \text{ mg SO}_2/(\text{m}^2\cdot\text{día})$), julio ($2.74 \text{ mg SO}_2/(\text{m}^2\cdot\text{día})$) y octubre ($2.22 \text{ mg SO}_2/(\text{m}^2\cdot\text{día})$) tuvieron niveles moderados mientras que abril ($1.12 \text{ mg SO}_2/\text{m}^2\cdot\text{día}$) y marzo ($1.38 \text{ mg SO}_2/\text{m}^2\cdot\text{día}$) fueron los meses con menor deposición.

La velocidad de deposición anual de este contaminante fue de $20.51 \pm 2.41 \text{ mg SO}_2/\text{m}^2\cdot\text{día}$ y con base en la Norma ISO 9223 se asigna la categoría P_1 a la atmósfera de estudio, con lo que se puede clasificar este ambiente como urbano con baja agresividad. La interacción entre los sulfatos y el acero provoca el desarrollo de capas protectoras; sin embargo, en circunstancias específicas, como elevados porcentajes de humedad como el caso de Cunduacán, y la precipitación prolongada, así como el pH de esta, pueden agravar la corrosión al facilitar el desprendimiento de productos de corrosión que se forman sobre la superficie del metal. La presencia de iones sulfatos sobre el acero, provoca principalmente corrosión localizada [25], [26].

provoca principalmente corrosión localizada [25], [26].

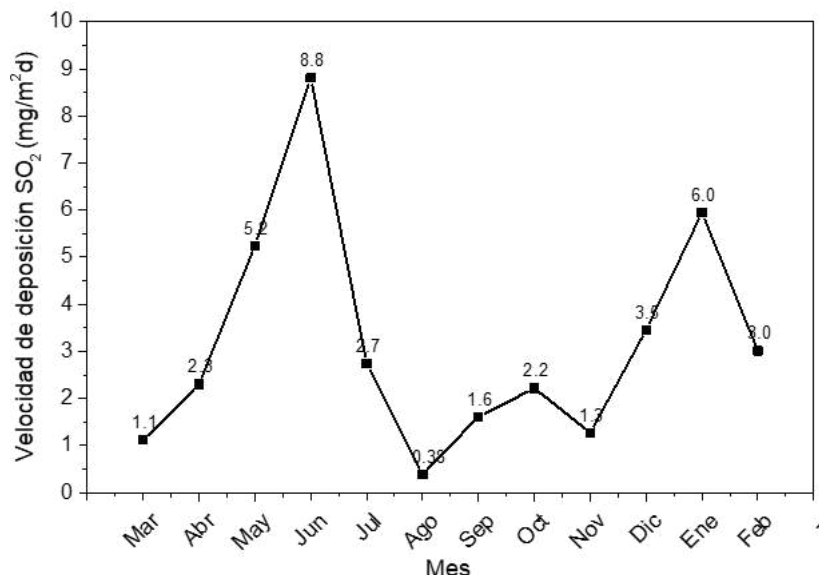


Figura 5. Velocidades de deposición de sulfatos en el periodo marzo-septiembre

3.3 Velocidad de corrosión

En la Figura 6 se muestran las velocidades de corrosión de cada material expuesto en función del tiempo de exposición estimado a partir de la pérdida de masa por corrosión en cada periodo.

Se puede observar en la Figura 6a, que la velocidad de corrosión anual del acero al carbón fue de 2.0168 $\mu\text{m/a}$. Se observa un aumento progresivo de la velocidad de corrosión hasta alcanzar un pico máximo (2.8 $\mu\text{m/a}$) a los 6 meses. Posteriormente, hay una disminución hacia los 9 meses, seguida de un nuevo incremento a los 12 meses (2.0 $\mu\text{m/a}$). En el caso del cobre, Figura 6b, la velocidad de corrosión fue de 0.0936 $\mu\text{m/a}$, presentó una velocidad de corrosión muy baja (0.09 $\mu\text{m/a}$) durante los primeros 3 meses, aumentando ligeramente hasta un valor máximo de 0.1 $\mu\text{m/a}$, a los 9 meses, y luego decreciendo levemente a los 12 meses hasta 0.0936 $\mu\text{m/a}$.

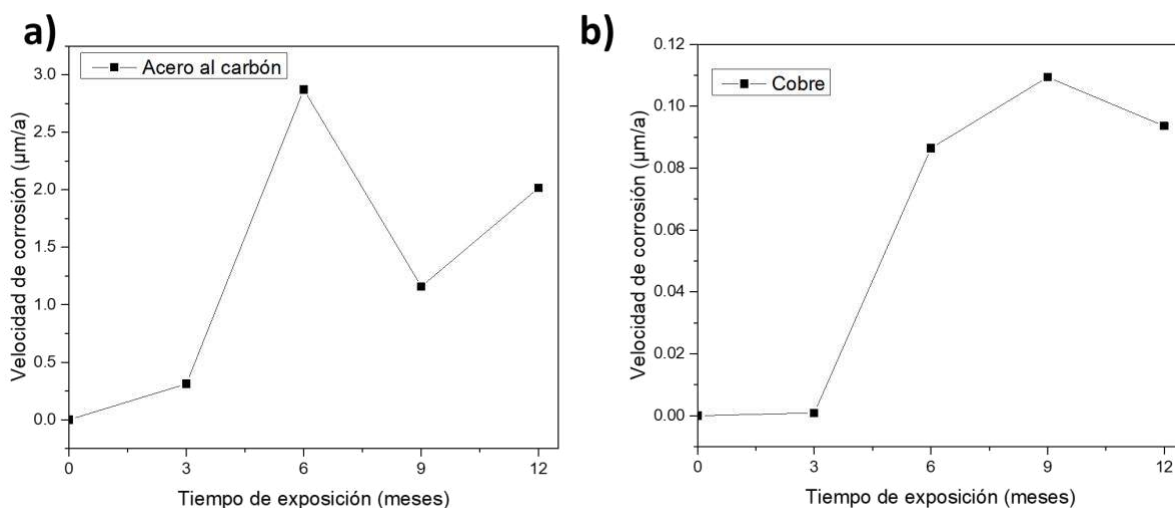


Figura 6. Velocidad de corrosión con respecto al tiempo de exposición de los materiales; a) acero al carbón, b) cobre

Con base en los datos obtenidos, la Norma ISO 9223, permite asignar categorías de agresividad corrosiva para cada metal, estas se muestran en la Tabla 3. Al acero al carbón se le asignó categoría C₂, que corresponde con una susceptibilidad baja a la atmósfera en este periodo de estudio debido a los cambios de Temperatura y Humedad relativa del ambiente. En el caso del Cobre se asigna categoría C₁ que indica muy baja agresividad del ambiente hacia este material en este periodo de estudio.

Tabla 3. Categorías de agresividad asignadas con base en la Norma ISO 9223

Material	I_{corr} ($\mu\text{m}\cdot\text{a}^{-1}$)	Categoría de agresividad	
Acero al carbón	2.0168	C ₂	Baja
Cobre	0.0936	C ₁	Muy Baja

El comportamiento de la velocidad de corrosión del acero al carbón sugiere una etapa inicial de activación, seguida posiblemente por la formación de productos de corrosión que temporalmente ofrecen una protección parcial. Sin embargo, a los 12 meses, el aumento de la velocidad indica una ruptura o desestabilización de dichos productos, favoreciendo la renovación del proceso corrosivo.

En el caso del cobre, algunos investigadores coinciden que el cobre al ser expuesto comienza a formar capas continuas de óxido que incrementan su grosor conforme avanza el tiempo hasta formar una pátina estable que ocasiona que la velocidad de corrosión ocurra más lenta [27], [28], [29]. Lo que se evidencia con el incremento en las velocidades de corrosión entre los periodos de exposición de tres meses, principalmente debido al lavado de las capas pasivas de óxido que el cobre tiende a formar cuando reacciona con el oxígeno [30]. La velocidad de corrosión después de seis meses tiende a disminuir, a un mayor tiempo de exposición más uniforme se vuelve la capa de productos de corrosión que evita el avance de la corrosión. El proceso de corrosión se observó muy rápido en comparación con las probetas de los otros metales, aunque es común que con el paso del tiempo se formen de manera paulatina los productos de reacciones químicas llevadas a cabo sobre la superficie del metal y estas se manifiesten en primera instancia con cambios de coloración hacia un color que cambia con el tiempo de exposición, para el caso del cobre, el proceso no suele ser tan rápido a menos que sean expuestos a ambientes muy ácidos o alcalinos [31]. Durante las primeras diez semanas documentadas, se observó una acción corrosiva fuerte sobre estas probetas, atribuible a la susceptibilidad del cobre a compuestos como el SO₂, SO₃, SO₄ y H₂S. Se atribuye el transporte de estas emisiones debido a la cercanía de complejos industriales (Batería de separación Cunduacán) que procesan crudo para separar compuestos más ligeros como el aceite y el gas natural, este procedimiento emplea procesos físicos como destilación atmosférica [32] y destilación al vacío que suele derivar en la emisión de gases con contenido de azufre de hasta 7%.

4. Conclusiones

La atmósfera rural-urbana de Cunduacán, presenta mayor influencia de contaminación por iones cloruros con categorías de agresividad moderada S₂. El SO₂ captado en la estación de ensayo durante el tiempo de estudio, presentó una categoría de agresividad de P₁ considerada como una atmósfera urbana. El análisis del complejo Temperatura-Humedad relativa indicó que, para la atmósfera de Cunduacán, Tabasco, 1085 horas fue el tiempo en el cual los materiales se mantuvieron con una película de humedad, lo que propicia su deterioro con agresividad τ_3 de acuerdo con la norma ISO 9223, como una agresividad moderada. El cobre alcanzó una categoría de agresividad muy baja (C₁), con una velocidad de corrosión de 0.0908 $\mu\text{m}\cdot\text{a}^{-1}$.

¹, durante el año de exposición. El acero al carbono obtuvo una velocidad de corrosión de $31.17_{\mu\text{m}\cdot\text{a}^{-1}}$ que corresponde a una agresividad atmosférica baja (C_2), en el año de exposición.

Adicionalmente, los resultados obtenidos constituyen evidencia técnica relevante que permite inferir la necesidad de fortalecer las medidas de control y gestión de las emisiones atmosféricas generadas por las actividades petroleras localizadas en los alrededores del área de estudio. La presencia de una atmósfera con influencia de iones cloruro, la captación de SO_2 con características propias de una atmósfera urbana y la permanencia prolongada de películas de humedad sobre los materiales expuestos, indican condiciones ambientales que pueden verse potenciadas por fuentes industriales cercanas, como las operaciones petroleras. En este sentido, la información generada puede ser utilizada como insumo para la construcción de bases de datos ambientales y mapas de agresividad atmosférica, que describan espacial y temporalmente los efectos de las emisiones sobre el entorno y los materiales expuestos. Este tipo de herramientas permitiría identificar zonas con mayor vulnerabilidad, así como respaldar técnicamente la implementación de estrategias de monitoreo continuo, prevención y mitigación, contribuyendo al diseño de políticas públicas y normas orientadas a la protección ambiental y a la reducción de impactos asociados a las emisiones provenientes de actividades petroleras en la región.

Si bien el estudio se desarrolló bajo las condiciones y alcances establecidos, los resultados obtenidos demuestran que los **objetivos planteados fueron alcanzados**, proporcionando una caracterización consistente de la agresividad atmosférica en la zona de estudio durante el periodo analizado

5. Agradecimientos

El autor le agradece al SECIHTI el apoyo otorgado a través de la Beca para Estudios de Maestría # 1166847.

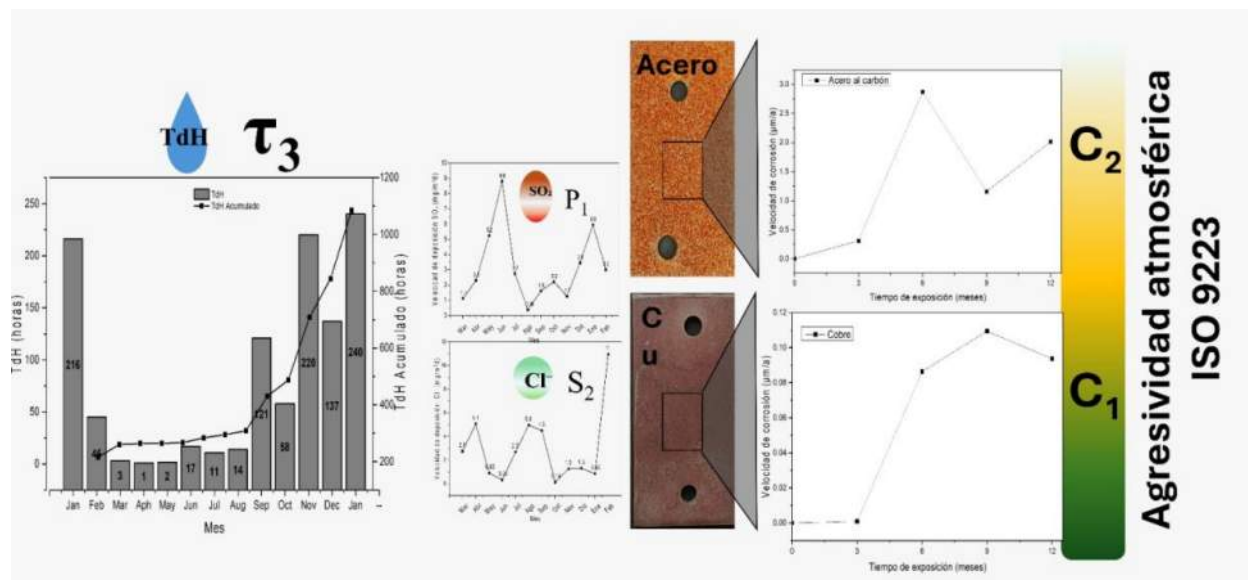
6. Conflicto de intereses

“Los autores declaran no tener conflictos de intereses”

7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

“Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos”.

8. Resumen Grafico



10. Tabla de rol de autores

ROL	AUTORES(AS)
Conceptualización	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez,, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Curación de datos	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Análisis formal	Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Adquisición de fondos	Francisco Eduardo Corvo Pérez, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Investigación	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Metodología	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez,
Administración del proyecto	Ebelia Del Ángel Meraz, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Recursos	Francisco Eduardo Corvo Pérez, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Software	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Supervisión	Ebelia Del Ángel Meraz, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Validación	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez,, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Visualización	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez,, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Escritura-borrador-original	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, F.E.C.P, Cecilia Silvia Valdés Clemente
Escritura-revisión-edición	Osiris Angélica López Zapata, Ebelia Del Ángel Meraz, Francisco Eduardo Corvo Pérez, Cecilia Silvia Valdés Clemente

Nota. Taxonomía de roles de contribución (CRediT)

11. Referencias

- [1] S. Mitali, J. Harsh, K. Devanshu, K. Santosh, and K. Rakesh, "Overview on corrosion, classification and control measure: a study," *i-manager's Journal on Future Engineering and Technology*, vol. 17, no. 2, p. 26, 2022, doi: 10.26634/JFET.17.2.18501.
- [2] B. Daneshian, D. Höche, O. Ø. Knudsen, and A. W. B. Skilbred, "Effect of climatic parameters on marine atmospheric corrosion: correlation analysis of on-site sensors data," *Materials Degradation*, vol. 7, no. 1, pp. 1–10, Feb. 2023, doi: 10.1038/s41529-023-00329-6.
- [3] Fuad Khoshnaw, Ed., "Part I: General Aspects of Corrosion, Corrosion Control, and Corrosion Prevention," in *Corrosion Atlas Case Studies*, Elsevier, 2024, pp. xxix–xlvi. doi: 10.1016/B978-0-443-13228-5.09993-1.
- [4] ISO, "ISO 9223:2012 Corrosion of metals and alloys-Corrosivity of atmospheres-Classification, determination, and estimation," 2012.
- [5] I. O. Wallinder and C. Leygraf, "Environmental Effects of Metals Induced by Atmospheric Corrosion," *ASTM Special Technical Publication*, no. 1421, pp. 185–199, 2002, doi: 10.1520/STP10893S.
- [6] J. Rodríguez-Yáñez, J. Uruchurtu-Chavarín, and J. Sanabria-Chinchilla, "Tropical atmospheric corrosion of galvanized steel, in a light urban atmosphere in the San José valley of Costa Rica," *Rev Mex Ing Quim*, vol. 21, no. 2, pp. 1–26, Jun. 2022, doi: 10.24275/rmiq/Mat2759.
- [7] J. O. Castillo-Miranda and F. J. Rodríguez-Gómez, "Mapping of the cost of atmospheric corrosion of zinc and galvanised steel due to the effect of atmospheric pollution in the Mexico City Metropolitan area," <https://doi.org/10.1080/1478422X.2022.2074115>, vol. 57, no. 5, pp. 408–419, Aug. 2022, doi: 10.1080/1478422X.2022.2074115.
- [8] "Cunduacán | Portal Tabasco." Accessed: May 11, 2024. [Online]. Available: <https://tabasco.gob.mx/cunduacan>
- [9] B. G. Díaz, E. D. Á. Meraz, and M. A. P. Castro, "Composición Fisicoquímica del agua en Cunduacán, Tabasco México.," *Journal of Energy, Engineering Optimization and Sustainability*, vol. 5, no. 2, pp. 127–146, Dec. 2021, doi: 10.19136/JEEOS.A5N2.4993.
- [10] M. Nogal, E. Bastidas-Arteaga, and H. M. Dos Santos Gervásio, "Consideration of climate change-induced corrosion by structural codes," *IABSE Congress, Christchurch 2020: Resilient Technologies for Sustainable Infrastructure - Proceedings*, pp. 1064–1070, 2020, doi: 10.2749/CHRISTCHURCH.2021.1064.
- [11] D. González Terrazas, A. Vermonden Thibodeau, and F. Gress Carrasco, "Municipios Vulnerables al Cambio Climático con base en los resultados del Atlas Nacional de Vulnerabilidad al cambio climático," 2021. [Online]. Available: <https://www.gob.mx/inecc>
- [12] ISO 8565, "ISO 8565:2011 Metals and alloys Atmospheric corrosion testing General requirements," 8665, 2011.
- [13] ISO 9225, "ISO 9225:2012(E) Corrosion of metals and alloys-Corrosivity of atmospheres-Measurement of environmental parameters affecting corrosivity of atmospheres," 2012.
- [14] "Servicio Meteorológico Nacional." Accessed: Nov. 08, 2023. [Online]. Available: <https://smn.conagua.gob.mx/es/>
- [15] M. Hoseinpoor, T. Prošek, L. Babusiaux, and J. Mallécol, "Toward more realistic time of wetness measurement by means of surface relative humidity," *Corros Sci*, vol. 177, p. 108999, Dec. 2020, doi: 10.1016/J.CORSCI.2020.108999.
- [16] M. E. Del Angel, L. Veleza, and A. Acosta, "Agresividad atmosférica basada en el tiempo de humectación del clima tropical húmedo del estado de Tabasco," *Universidad y ciencia*, vol. 25, no. 2, pp. 111–120, 2009, Accessed: Sep. 22, 2024. [Online]. Available:

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0186-29792009000200001&lng=es&nrm=iso&tlng=es

- [17] A. S. Domínguez, E. D. A. Meraz, and A. E. C. Pérez, “La Corrosión del Acero Galvanizado en una Atmósfera marina-costera de Tabasco, México,” *Journal of Energy, Engineering Optimization and Sustainability*, vol. 5, no. 2, pp. 147–162, Dec. 2021, doi: 10.19136/JEEOS.A5N2.4710.
- [18] M. Almazroui, K. S. Balkhair, M. N. Islam, and Z. Şen, “Climate Change Impact on Monthly Precipitation Wet and Dry Spells in Arid Regions: Case Study over Wadi Al-Lith Basin,” *Advances in Meteorology*, vol. 2017, no. 1, p. 5132895, Jan. 2017, doi: 10.1155/2017/5132895.
- [19] B. F. Zaitchik, M. Rodell, M. Biasutti, and S. I. Seneviratne, “Wetting and drying trends under climate change,” *Nature Water* 2023 1:6, vol. 1, no. 6, pp. 502–513, May 2023, doi: 10.1038/s44221-023-00073-w.
- [20] W. Thandar, Y. Y. K. Win, T. Khaing, Y. Suzuki, K. Sugiura, and I. Nishizaki, “Investigation of Initial Atmospheric Corrosion of Carbon and Weathering Steels Exposed to Urban Atmospheres in Myanmar,” *International Journal of Corrosion*, vol. 2022, 2022, doi: 10.1155/2022/4301767.
- [21] C. Titakis and P. Vassiliou, “Evaluation of 4-Year Atmospheric Corrosion of Carbon Steel, Aluminum, Copper and Zinc in a Coastal Military Airport in Greece,” *Corrosion and Materials Degradation 2020, Vol. 1, Pages 159-186*, vol. 1, no. 1, pp. 159–186, May 2020, doi: 10.3390/CMD1010008.
- [22] A. C. Santa, D. A. Montoya, J. A. Tamayo, M. A. Gómez, J. G. Castaño, and L. M. Baena, “Atmospheric corrosion of carbon steel: Results of one-year exposure in an andean tropical atmosphere in Colombia,” *Heliyon*, vol. 10, no. 8, p. e29391, Apr. 2024, doi: 10.1016/J.HELIYON.2024.E29391.
- [23] R. Vera et al., “Atmospheric corrosion and impact toughness of steels: Case study in steels with and without galvanizing, exposed for 3 years in Rapa Nui Island,” *Heliyon*, vol. 9, no. 7, p. e17811, Jul. 2023, doi: 10.1016/J.HELIYON.2023.E17811.
- [24] C. Titakis and P. Vassiliou, “Evaluation of 4-Year Atmospheric Corrosion of Carbon Steel, Aluminum, Copper and Zinc in a Coastal Military Airport in Greece,” *Corrosion and Materials Degradation 2020, Vol. 1, Pages 159-186*, vol. 1, no. 1, pp. 159–186, May 2020, doi: 10.3390/CMD1010008.
- [25] P. Melo, M. Echagüe, C. Guerra, Q. Jin, M. Sancy, and A. Paul, “On the effect of simulated contamination of chlorides and sulfates on steel rebar corrosion: Electrochemical behavior and surface analysis,” *Constr Build Mater*, vol. 359, p. 129337, Dec. 2022, doi: 10.1016/j.conbuildmat.2022.129337.
- [26] P. Zhang, X. Yue, Y. Sun, H. Zhou, J. Zhang, and Y. Wang, “Research on the mechanism of microbial corrosion in the subsurface layer of 7075 aluminum alloy under different corrosion environments with ultra low temperature double increase effect,” *Vacuum*, vol. 227, p. 113348, Sep. 2024, doi: 10.1016/J.VACUUM.2024.113348.
- [27] D. de la Fuente, J. Simancas, and M. Morcillo, “Morphological study of 16-year patinas formed on copper in a wide range of atmospheric exposures,” *Corros Sci*, vol. 50, no. 1, pp. 268–285, Jan. 2008, doi: 10.1016/J.CORSCI.2007.05.030.
- [28] X. Wang et al., “Atmospheric corrosion of T2 copper and H62 brass exposed in an urban environment,” *Mater Chem Phys*, vol. 299, p. 127487, Apr. 2023, doi: 10.1016/J.MATCHEMPHYS.2023.127487.
- [29] O. O. Ekerenam et al., “Advancements in corrosion studies and protective measures for copper and copper-based alloys in varied environmental conditions,” *Results in Engineering*, p. 105257, May 2025, doi: 10.1016/J.RINENG.2025.105257.
- [30] O. O. Ekerenam et al., “Advancements in corrosion studies and protective measures for copper and copper-based alloys in varied environmental conditions,” *Results in Engineering*, p. 105257, May 2025, doi: 10.1016/J.RINENG.2025.105257.

- [31] I. Hamidah *et al.*, “Corrosion of copper alloys in KOH, NaOH, NaCl, and HCl electrolyte solutions and its impact to the mechanical properties,” *Alexandria Engineering Journal*, vol. 60, no. 2, pp. 2235–2243, Apr. 2021, doi: 10.1016/J.AEJ.2020.12.027.
- [32] T. J. Mathew *et al.*, “Advances in distillation: Significant reductions in energy consumption and carbon dioxide emissions for crude oil separation,” *Joule*, vol. 6, no. 11, pp. 2500–2512, Nov. 2022, doi: 10.1016/J.JOULE.2022.10.004.

Diseño educativo para la enseñanza de la cinemática de mecanismo

Prevalence Educational design for teaching the kinematics of a mechanism

Perera-Cortez M. A.^{1,*} , Jacobo-Cortés E.A.¹ , Hidalgo-Arcos W.¹ 

¹Universidad Autónoma de Campeche.

*maperera@uacam.com

Resumen

El presente documento presenta el diseño, construcción y manufactura de un prototipo didáctico de mecanismo biela-manivela con corredera controlable que nos permita visualizar y comprender conceptos fundamentales de funcionamiento del mecanismo, así como información en tiempo real de la cinemática de sus nodos. A través de la base de datos generada por un sistema de instrumentación creado en LabVIEW, simulación de movimiento del diseño CAD y el método gráfico polígono de velocidades, se encontró que la velocidad de nodo corredera coincide en los tres métodos logrando así un dispositivo que nos permite ofrecer un enfoque más práctico, en el desarrollo de habilidades técnicas, resolución de problemas de mecanismos en los alumnos de licenciatura en mecatrónica, mecánica e industrial.

Palabras claves: *biela, manivela, cinemática, mecanismo, simulación.*

Abstract

This document presents the design, construction, and fabrication of a didactic prototype of a crank-connecting rod mechanism with a controllable slider. This prototype allows us to visualize and understand fundamental concepts of the mechanism's operation, as well as obtain real-time information on the kinematics of its nodes. Through a database generated by an instrumentation system created in LabVIEW, motion simulation of the CAD design, and the velocity polygon graphical method, it was found that the slider node velocity is consistent across all three methods. This results in a device that offers a more practical approach to developing technical skills and problem-solving abilities in mechanisms for undergraduate students in mechatronics, mechanical, and industrial engineering.

Keywords: *Connecting rod, crank, kinematics, mechanism, simulation.*

Recibido: 29-octubre-2025, Aceptado: 12-julio-2026, Publicado: 31-agosto-2026

1. Introducción

La necesidad de elementos didácticos se basa en la importancia de contar con herramientas efectivas que faciliten la asimilación de los principios de funcionamiento. En este sentido, el proyecto busca proporcionar a los estudiantes una experiencia tangible y visualmente atractiva, que les permita observar de cerca el funcionamiento y las interacciones de los componentes del mecanismo biela-manivela, que se puede definir como un sistema de piezas mutuamente adaptadas que funcionan en conjunto. Diseñado para transmitir y transformar movimientos que se pueden definir como cadena cinemática, contribuyendo a fortalecer su comprensión y retención de conceptos teóricos asociados con la cinemática de mecanismos. Con ello se pretende mitigar la dificultad de entender de los estudiantes conceptos complejos de cinemática,

matemáticas, procesos y conceptos de operación a través de la creación del dispositivo y la implementación de instrumentación y control.

Los dispositivos didácticos son herramientas educativas diseñadas específicamente para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos teóricos. Estos dispositivos proporcionan una experiencia práctica y tangible que permiten a los estudiantes interactuar con el contenido de forma activa. Según Johnson (2010) [1], los dispositivos didácticos ayudan a mejorar comprensión, retención y transferencia de conocimientos. Varias teorías del aprendizaje apoyan la importancia de experiencia práctica y aprendizaje significativo. El enfoque constructivista, propuesto por Piaget [2], sostiene que el conocimiento es activamente construido a través de la interacción con el medio ambiente. Además, la de Kolb [3] La teoría del aprendizaje experiencial enfatiza la Importancia de la experiencia directa en el aprendizaje proceso.

Se utiliza el diseño asistido por ordenador el cual según Klockner y Jowers [4], el CAD se define como "un sistema computacional que permite a los diseñadores crear, modificar y analizar representaciones de objetos y sistemas, con el objetivo de facilitar la toma de decisiones en el proceso del diseño". Se complementa con una simulación de movimiento usando el software SolidWorks que según Bechthold y Maier [5], es "un análisis y el proceso de evaluación que utiliza el ensamblaje digital de modelos para simular el movimiento y las interacciones entre componentes en un entorno virtual". A través de la simulación de movimiento, los diseñadores pueden: identificar problemas potenciales, optimizar el diseño, mejorar la eficiencia del movimiento y evaluar el sistema de rendimiento antes de la fabricación.

Para la ejecución del proyecto también implica la selección de sensores y actuadores adecuados, el diseño de circuitos electrónicos y ensamblaje, adquisición de datos y señales de procesamiento, entre otros aspectos. La instrumentación se aplica en una amplia gama de industrias y campos, como la medicina, ingeniería, investigación científica e industrial, automatización, según Doebelin y Manik [6], la instrumentación se define como "el arte y la ciencia de medición y control físico y variables químicas".

El principio de funcionamiento de la biela manivela con corredera se basa en la conversión de un movimiento rotacional en un movimiento lineal. La manivela gira a una velocidad angular constante, lo que provoca que la biela se desplace en un movimiento de vaivén. Este movimiento se transmite a la corredera, que se desplaza de manera lineal, generando el trabajo deseado.

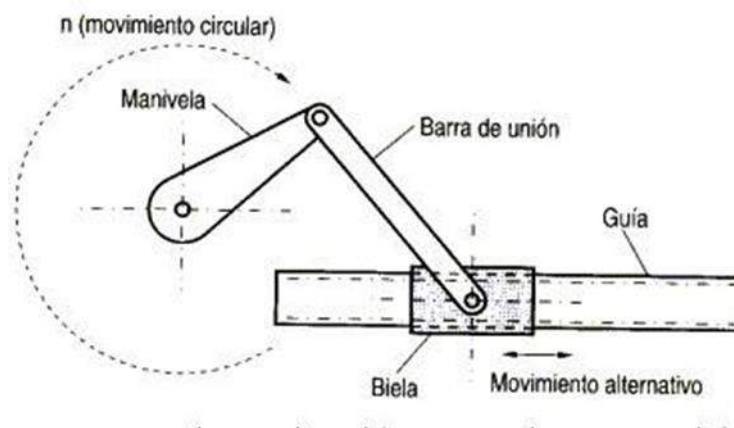


Figura.1 Mecanismo biela manivela con corredera

2. Metodología

En este proyecto la metodología que se utilizó fue la comprensión pedagógica, en el que, por medio de la experimentación, visualización y conceptos de ingeniería, los alumnos puedan comprender las características mecánicas y físicas del mecanismo biela manivela con corredera. Las teorías están basadas

en la comprensión, estudio, solución, pero lo más importante en la asimilación de lo que está enseñando para obtener un conocimiento fiable.

El alumno tendrá un proceso de aprendizaje en el cual se incluyeron el uso de dispositivos didácticos, prácticas, explicaciones teóricas y actividades de aprendizaje en estrategias pedagógicas en el que se fomentan el análisis, estudio y retención de conocimientos. Los diseños de prototipos didácticos efectivos requieren de una comprensión, profunda de diversas teorías y prácticas pedagógicas que planeen y tengan un resultado de estrategia de enseñanza en este caso del prototipo didáctico.

En el aprendizaje basado en proyectos ABP. Se utiliza una metodología que involucra a los estudiantes en proyectos reales o simulados en el cual se promueve la investigación, la creatividad y la aplicación práctica de conocimientos, en libros, teorías en revistas, documentales, diseños de algunos hechos de conocimientos de alumnos, este enfoque se alinea a la pedagogía del diseño donde el estudiante de ingeniería participe activamente con sus conocimientos para el diseño y creación del proyecto de biela manivela con corredera. También analiza los principios pedagógicos que pueden integrarse al diseño del prototipo didáctico formando un desarrollo didáctico y crítico en los estudiantes.

De igual manera en la metodología de aprendizaje colaborativo nos dice que fomentar el trabajo en equipo entre los alumnos para así mejorar sus habilidades en el diseño del prototipo educativo, también hay una parte importante para que el proyecto tenga éxito y buenos resultados, la colaboración del docente, que en este caso promoverán la reflexión y el análisis crítico en las prácticas pedagógicas, con sus aportaciones tendrán el trabajo de guiar a los alumnos y buscar tener buenos resultados en el proceso.

2.1 Diseño CAD del prototipo biela manivela con corredera

El prototipo didáctico se diseñó tomando en cuenta el diagrama de posición mostrado en la figura 2, donde se consideran las medidas en mm. Donde se presentan los siguientes eslabones del mecanismo: manivela, biela, corredera, guía y apoyo. Para posteriormente mediante el software SolidWorks realizar el diseño CAD de las piezas del mecanismo considerando a su vez la instalación de sistema de instrumentación.

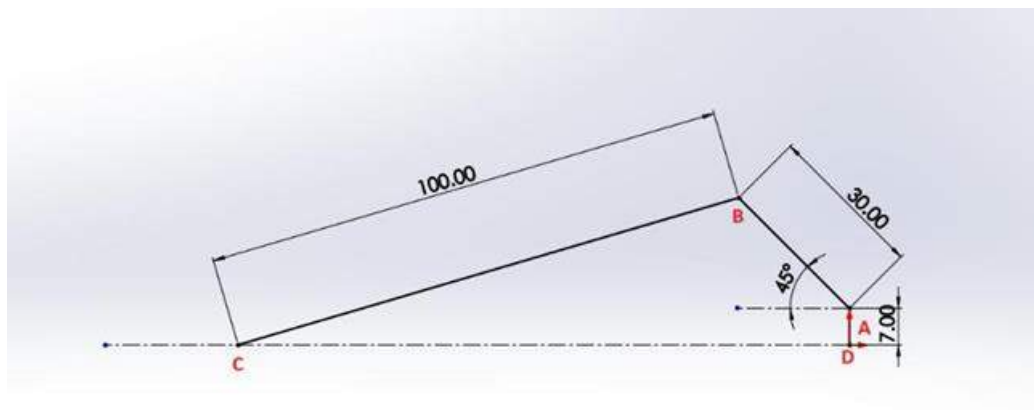


Figura 1. Diagrama de posición del mecanismo

Posteriormente, usando el diagrama de posición se procedió a diseñar el prototipo del mecanismo, que incluye los elementos anteriormente mencionados. El sistema fue considerado para manufacturarlo en una impresión 3d con material ABS que por sus propiedades mecánicas tiene mayor resistencia a los esfuerzos mecánicos de igual manera se tomó en cuenta el ensamblado por medio de tornillos de sujeción con tuerca. La propuesta obtenida se presenta en la figura 3.

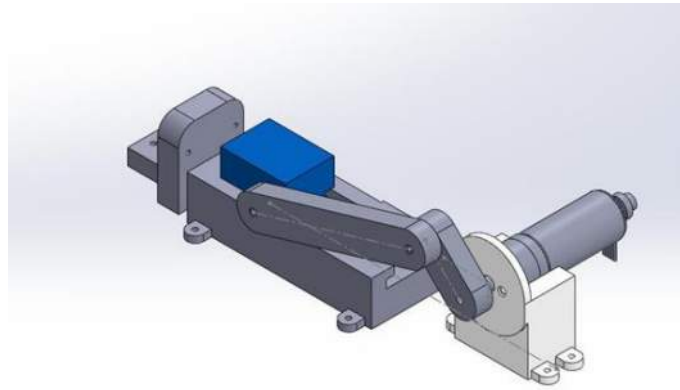


Figura 2. Diseño CAD en SolidWorks.

En esta propuesta se realizó la digitalización a escala real de cada elemento lo que permitirá realizar una simulación cinemática mediante el motor de simulación Motion perteneciente a software SolidWorks que proporciona resultados reales del comportamiento cinemático del mecanismo.

Como se observa en el diagrama de posición (figura 2), la posición de la manivela se encuentra un ángulo de 45° con respecto a la referencia horizontal, el cual servirá para realizar los cálculos pertinentes de la cinemática del mecanismo ya que como recordaremos el método de analítico y gráfico tradicional de los mecanismos, se consideran instantáneos debido a que el análisis cinemático solo proporciona resultados en la posición que se describe en el diagrama de posición.

2.2 Desarrollo del diseño electrónico del prototipo

En el desarrollo del diseño electrónico del prototipo no solo permitirá visualizar conceptos abstractos de manera tangible, sino que también fomenta la interacción directa con las herramientas tecnológicas modernas, se integrarán componentes electrónicos y mecánicos controlados mediante software especializado como SolidWorks, LabVIEW y IDE. Para poder entender cómo funciona este mecanismo, es fundamental visualizar y analizar su comportamiento en tiempo real, algo que se lograría mediante la creación de un prototipo que simule su operación y control para diversos parámetros del sistema, como la velocidad y la posición de la corredera. Para lo cual se decidió implementar un sistema de instrumentación y control electrónico.

El motor que se eligió para el prototipo fue un motor encoder de 12V y 200 rpm. La selección de este motor se basa en su capacidad para generar un par de torsión adecuado para mover el sistema mecánico, así como su velocidad de rotación, que se ajusta a las necesidades del mecanismo biela-manivela. Para controlar el motor de corriente continua en ambas direcciones de rotación, se eligió el dispositivo electrónico llamado puente H. Para medir la posición de la corredera a lo largo de su trayectoria, se incorporó un sensor TF Luna, el cual es un sensor de distancia basado en tecnología LIDAR. Este sensor fue seleccionado por su alta precisión y su capacidad para medir distancias de forma fiable, lo que resulta crucial para el monitoreo del movimiento de la corredera en tiempo real.

Para coordinar las acciones de los diferentes componentes electrónicos, se utilizó Arduino Uno. El sistema cuenta con dos microcontroladores Arduino, uno es el encargado de controlar el motor encoder y el segundo microcontrolador es el encargado en hacer el monitoreo a través de los sensores seleccionados.

Una vez que todos los componentes fueron diseñados, seleccionados y programados, el prototipo se ensambló y probó para verificar su funcionamiento. Se realizaron varias pruebas para evaluar la precisión del sistema, la velocidad de la corredera y la sincronización entre el motor y el sensor. Además, se ajustaron

los parámetros de control en LabVIEW para asegurar que el sistema respondiera de manera adecuada a las señales de entrada.

2.3 Desarrollo de la interfaz en LabVIEW

Para la interfaz del proyecto se eligió el software LabVIEW de la marca *National Instrument*, como una decisión estratégica basada en las ventajas que este software ofrece para el análisis de sistemas de control y adquisición de datos, especialmente en un contexto educativo y experimental. En la figura 4 se muestra el programa en el diagrama de bloques del software, para el control de velocidad del motor de la manivela.

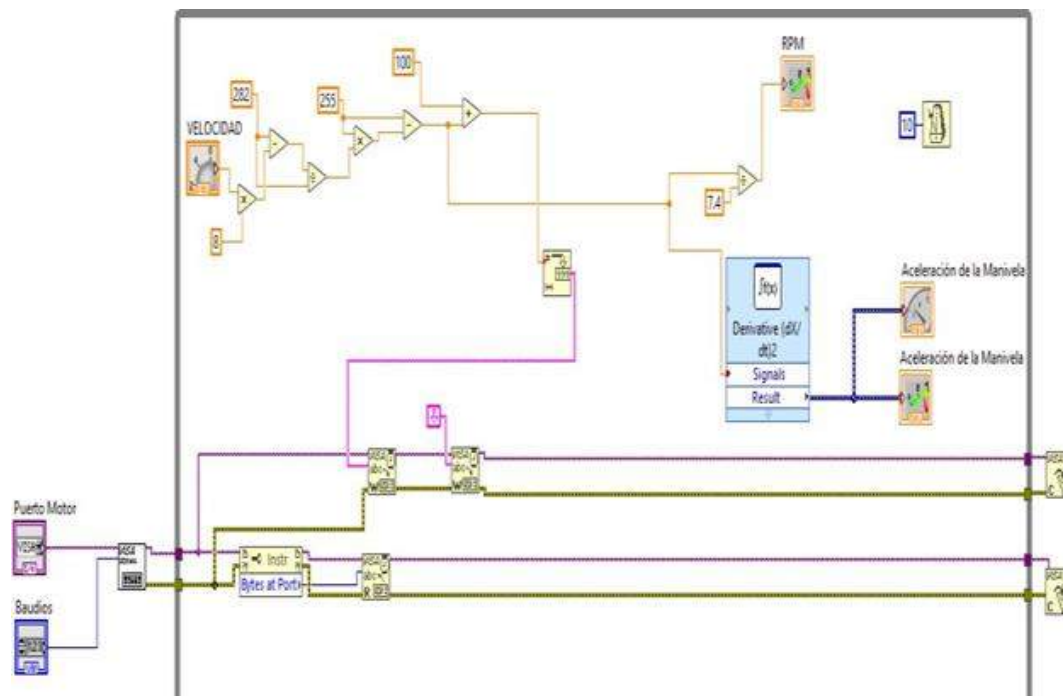


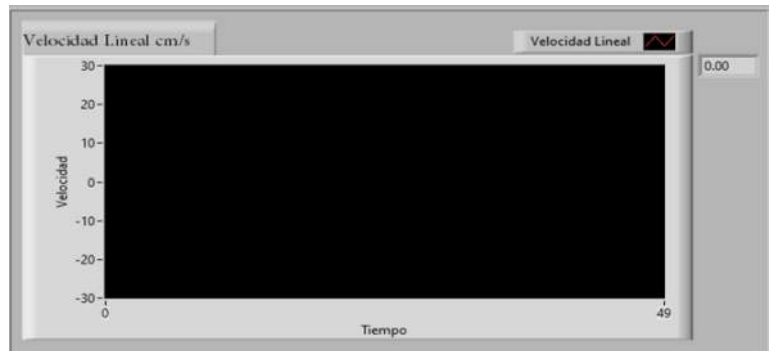
Figura 4. Programa de ejecución de sistema de monitores en el software LabVIEW

LabVIEW permite a los usuarios centrarse en la resolución del problema de manera más directa sin tener que lidiar con complicaciones de codificación compleja o configuración de comunicación entre el hardware y el software. El diseño de la interfaz final en LabVIEW se pensó para ser claro, funcional y sencillo de usar, con el fin de que tanto estudiantes como profesionales pudieran interactuar con el sistema y obtener información precisa sin complicaciones (figura 5).



Figura 5. HMI.

Una de las características clave del diseño final fue la inclusión de herramientas que permiten realizar análisis comparativos entre los resultados experimentales y los obtenidos a partir de los métodos tradicionales de análisis gráficos y analíticos. A través de la interfaz, el usuario puede visualizar los datos experimentales y compararlos con las predicciones de los modelos teóricos, ya sea mediante la superposición de gráficos o la visualización de desviaciones entre los datos, como se muestra en la figura 6.

**Figura 6.** Diagrama de velocidad angular de la manivela

2.3.1 Arquitectura de conexiones del sistema embebido

Para la adquisición de datos y el control del prototipo didáctico, se integró un sistema embebido basado en la placa de desarrollo Arduino Uno (microcontrolador ATmega328P). Este elemento actúa como el nodo central de interfaz entre los componentes electromecánicos, los transductores físicos del mecanismo y el software de supervisión en LabVIEW. La interconexión de los componentes periféricos con el Arduino Uno se estructuró de la siguiente manera:

- **Subsistema de Alimentación y Potencia:** La placa Arduino Uno se energiza mediante el bus USB conectado a la estación de trabajo (5V CC). El accionamiento del mecanismo integra un módulo Puente H alimentado por una fuente externa dedicada de 12V CC para energizar el actuador. Con el objetivo de mitigar el ruido electromagnético y estabilizar las lecturas analógicas y digitales, se unificaron todas las líneas de tierra (GND) del Arduino, el Puente H y la fuente de alimentación externa en una referencia común.
- **Actuador (Motor con Encoder Integrado):** El movimiento del eslabón motriz (manivela) es generado por un motorreductor de corriente directa acoplado al Puente H. La tarjeta Arduino Uno regula la velocidad angular enviando una señal con modulación por ancho de pulsos (PWM) desde su pin digital 9 hacia la entrada de habilitación (ENA) del controlador, mientras que el sentido de giro se determina mediante estados lógicos digitales desde los pines 8 (IN1) y 7 (IN2). Para la retroalimentación de la velocidad de entrada, los canales lógicos A y B del encoder integrado en el motor se conectaron a los pines digitales 2 y 3, aprovechando las interrupciones por hardware para calcular las RPM de la manivela en tiempo real.
- **Sensor de Distancia Láser (TF-Luna):** Para registrar el desplazamiento y la posición lineal de la corredera de forma directa, se implementó un sensor LiDAR de tiempo de vuelo (ToF) TF-Luna, posicionado de manera axial al movimiento del eslabón. Este dispositivo opera mediante el

protocolo de comunicación serial UART; para asegurar la correcta transmisión de datos y evitar conflictos con la comunicación USB hacia LabVIEW, el pin de transmisión (TX) del sensor se acopló al pin digital RX (Pin 0) del Arduino, mientras que el pin de recepción (RX) se conectó al pin digital TX (Pin 1), operando bajo una tasa de baudios estandarizada. La etapa lógica del sensor se alimenta directamente desde la salida de 5V CC regulada por la placa Arduino.

En la Figura 7 se ilustra de manera esquemática la distribución física de los conductores, las etapas de control y potencia, los pines asignados y el flujo de señales del circuito electrónico unificado.

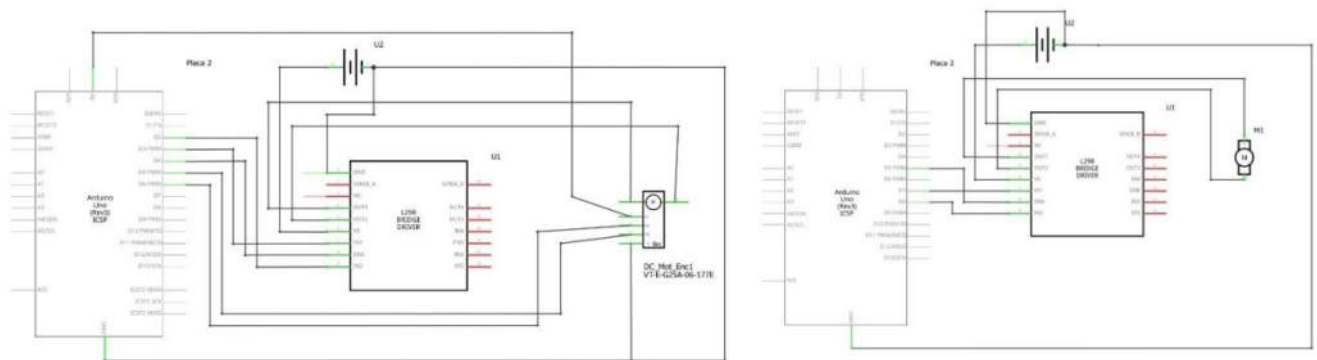


Figura 7. Diagrama electrónico del sistema embebido

2.4 Análisis cinemático por métodos gráficos polígono de velocidades

En el análisis cinemático por método gráfico polígono de velocidades se establecen dos análisis. La parte escalar y la parte vectorial del problema. Para obtener una comparativa con el modelo simulado se estableció la posición instantánea en el diagrama de posición en cual determina que la manivela se encuentra posicionada a 45° (ver figura 2). Como se puede observar, el mecanismo queda definido en el diagrama de posición con los nodos A, B, C, D, donde se describe de manera muy clara tanto las dimensiones de los eslabones, así como la posición a analizar del mecanismo. Según el análisis gráfico como primer paso determinaremos la velocidad lineal del eslabón AB ya que como dato conocemos que su velocidad angular $\omega = 20$ rpm con sentido a las manecillas del reloj.

$$v_b = r_{ab} * \omega \quad (1)$$

Donde:

v_b = Velocidad lineal de nodo B en mm/s

r_{ab} = Longitud del eslabon AB en mm

ω = Velocidad angular de eslabon AB en rad/s

Realizando las sustituciones correspondientes en la posición de análisis podemos obtener las siguientes respuestas.

$$v_b = r_{ab} * \omega = 30 \text{ mm} * 2.09 \text{ rad/s} = 62.83 \text{ mm/s} \quad (2)$$

Estableciendo las fórmulas escalares de las velocidades de los demás nodos podemos obtener las siguientes formulas.

$$v_c = w_2 * r_{bc} \quad (3)$$

Analizando el mecanismo desde métodos de velocidades relativas y absolutas tenemos las siguientes afirmaciones.

$$v_b = v_a + v_{a/b} \quad (4)$$

$$v_c = v_b + v_{c/b} \quad (5)$$

Tomando en cuenta y analizando el diagrama de posición la v_a es un nodo fijo por lo cual su desplazamiento, velocidad y aceleración es igual a cero. Mientras que la v_b es una velocidad de es una velocidad absoluta de nodo b que representa la velocidad lineal del nodo lo cual la formula vectorial es la sumatoria del vector velocidad de a y el vector velocidad de b vista de a lo cual es una velocidad relativa o aparente por lo cual tenemos la siguiente afirmación.

$$v_b = v_{b/a} \quad (6)$$

Deduciendo esta fórmula y por estrategia numérica sabemos que la velocidad de b es un vector que tiene dirección perpendicular al eslabón AB y que su magnitud según los cálculos escalares es de 62.83 mm/s. Con este dato podemos realizar el método gráfico conocido como polígono de velocidad que se puede visualizar en la figura 8

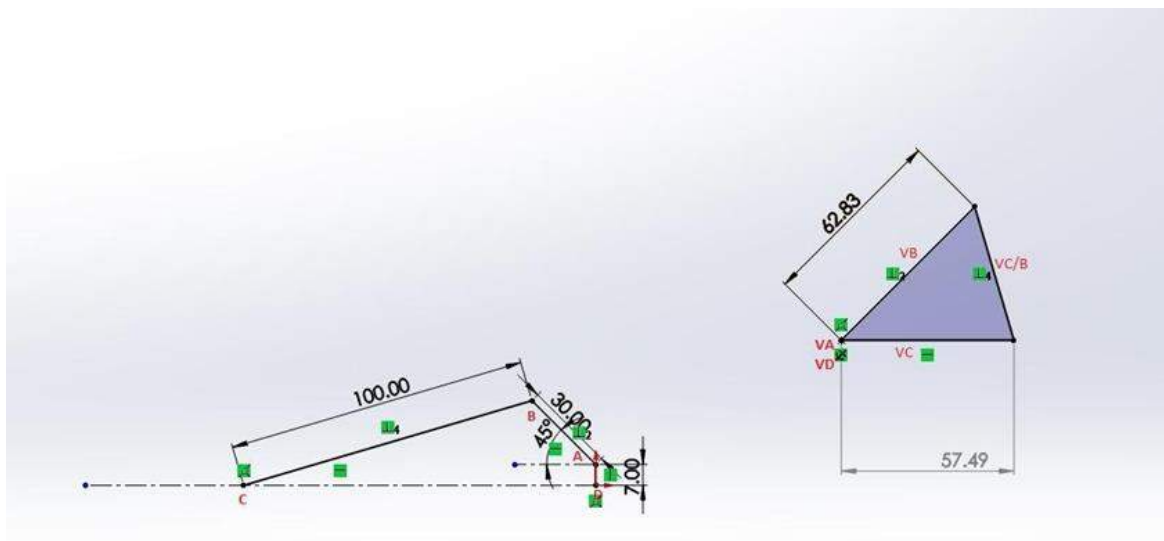


Figura 3. Diagrama de posición y polígono de velocidades.

Por lo cual determinamos que la velocidad de la corredera es igual a 57.49 mm/s. En la posición de análisis escogida en el diagrama de posición.

2.5 Modelado cinemático Analítico Números complejos (Ecuación de Cierre)

Para validar los datos vectoriales y de simulación, se desarrolló el modelo analítico del mecanismo biela-manivela desasistido mediante el método de cierre de circuito en el plano complejo. El mecanismo cuenta con una longitud de manivela $r_{ab} = 30 \text{ mm}$, una biela $r_{AB} = 100 \text{ mm}$ y un desplazamiento vertical de la corredera situado a 5mm por debajo del centro fijo de rotación $A(Y_C = -5\text{mm})$. La velocidad angular de entrada se fijó en $\omega_{AB} = -20 \text{ RPM}$ (sentido horario), equivalente a:

$$\omega_{AB} = -20 \cdot \frac{2\pi}{60} = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad/s}$$

2.5.1 Análisis de posición.

Ecuación de cierre en números complejos:

$$30e^{i45^\circ} + 100e^{i\phi} = xc - 5i$$

Parte real imaginaria:

$$30 \cos 45^\circ + 100 \cos \phi = xc$$

$$30 \sin 45^\circ + 100 \sin \phi = -5$$

Resolviendo para ϕ :

$$30 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 100 \sin \phi = -5 = 21.21 + 100 \sin \phi = -5$$

$$\sin \phi = \frac{-5 - 21.21}{100} = -0.2621 = \arcsin(-0.2621) = \arcsin(-0.2621) \approx -15.19^\circ$$

Cálculo de X_C :

$$xc = 30 \cos 45^\circ + 100 \cos(-15.19^\circ) = 21.21 + 96.48 = 117.69 \text{ mm}$$

2.5.2 Análisis de velocidad.

Derivada de la función de cierre:

$$30i\omega_{AB}e^{i45^\circ} + 100i\omega_{BC}e^{i\phi} = xc$$

Parte real e imaginaria:

$$-30\omega_{AB}\sin 45^\circ - 100\omega_{BC}\sin \phi = xc$$

$$-30\omega_{AB}\cos 45^\circ - 100\omega_{BC}\cos \phi = 0$$

Cálculo de ω_{BC}

$$\omega_{BC} = -\frac{30\omega_{AB}\cos 45^\circ}{100 \cos \phi}$$

Sustituyendo

$$\omega_{AB} = -\frac{2\pi}{3} \text{ y } \phi \approx -15.19^\circ:$$

$$\omega_{BC} = -\frac{30\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos 45^\circ}{100\cos(-15.19^\circ)} = \frac{20\pi \cdot 0.7071}{96.48} \approx 0.460 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Cálculo de X_C :

$$X_C = -30\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\sin 45^\circ - 100(0.460)\sin(-15.19^\circ)$$

$$X_C = 20\pi \cdot 0.7071 + 100 \cdot 0.460 \cdot 0.2621$$

$$X_C = 44.43 + 12.06 = 56.49 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Usando valores exactos:

$$\sin \phi = 0.2621, \cos \phi \approx 0.965$$

Recalculando ω_{BC} :

$$\omega_{BC} = \frac{20\pi \cdot 0.7071}{100 \cdot 0.965} \approx 0.460 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Velocidad final:

$$X_C \approx 56.5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

3. Resultados

Se presentan los resultados obtenidos en la simulación cinemática del software como se explicó anteriormente, el análisis de velocidad y aceleración se realizó con respecto al nodo c. Con una posición de 45° ya descrita anteriormente y con una velocidad de 20 rpm. Y la comparación de los resultados en el método numérico gráfico y analítico, así como en los resultados arrojados por el prototipo:

Tabla 1. Resultados obtenidos por diferentes métodos del prototipo.

ORIGEN	RESULTADO	COMENTARIOS
Simulación en SolidWorks usando la plataforma Motion	$vc = 57.49 \text{ mm/s}$	Al aplicar la simulación de movimiento y analizar la cinemática de la corredera se obtuvo como comportamiento una onda senoidal y la velocidad en la posición de 45° fue igual a las obtenidas en los métodos analíticos y gráficos.
Método Gráfico	$vc = 57.49 \text{ mm/s}$	Al realizar el análisis con un software CAD para reducir los errores por trazos obtuvimos el mismo resultado que en la simulación.
Método analítico	$vc = 56.50 \text{ mm/s}$	El margen de error se debe a usos de decimales en la resolución analítica
Prototipo instrumentado	$vc = 50.75 \text{ mm/s}$	El margen de error. Se debe a las consideraciones de fricción y torque de motor.

3.1 Análisis estadístico y validación dinámica del prototipo

Con el propósito de validar estadísticamente el comportamiento dinámico del prototipo didáctico e instrumentado frente a los valores teóricos obtenidos de las ecuaciones cinemáticas de circuito cerrado y el motor de simulación física SolidWorks Motion, se ejecutó un protocolo riguroso de pruebas experimentales secuenciales. Se llevaron a cabo un total de 30 experimentos de rotación completos de la manivela (0 a 360°) bajo una velocidad constante de entrada de -20 RPM (2.094 rad/s), registrando de forma síncrona y automatizada el perfil temporal de velocidad lineal de la corredera y_c mediante el sensor LiDAR TF-Luna y la interfaz en LabVIEW.

Para determinar la precisión y el grado de correlación del dispositivo físico, se promediaron las lecturas experimentales de los 30 ensayos y se contrastaron numéricamente contra la curva de simulación continua (exportada en intervalos de 0.0375 s). Evaluando el punto crítico de control fijado a un ángulo de posición de $\theta = 45^\circ$ el cual se alcanza cinemáticamente en el tiempo $t = 0.375 \text{ s}$ el modelo analítico determinó una velocidad de 56.49 mm/s , la curva del simulador SolidWorks Motion registró 57.49 mm/s y el prototipo físico reportó un valor medio experimental de 50.75 mm/s (Tabla 2).

A partir de la población completa de datos pareados a lo largo de todo el ciclo de movimiento, se aplicó un análisis de regresión lineal simple. La relación de correspondencia entre los vectores experimentales medidos y los teóricos del simulador arrojó un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9842$. Este resultado demuestra de manera cuantitativa que el prototipo físico replica el modelo cinemático ideal con una fidelidad del 98.42% , donde el pequeño porcentaje marginal restante (1.58%) se atribuye a efectos friccionales no modelados en las guías de la corredera de manufactura aditiva y a mínimas holguras mecánicas en los pernos de articulación.

Finalmente, para asegurar la fiabilidad del sistema de instrumentación y descartar sesgos sistemáticos en el sensor de distancia láser, se analizó la distribución de los errores residuales del muestreo. Los residuos se sometieron a una prueba de normalidad de Shapiro-Wilk con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, arrojando un valor de probabilidad $p = 0.421$. Al cumplirse rigurosamente que $p > \alpha$ se acepta la hipótesis nula H_0 , demostrando matemáticamente que los errores del prototipo siguen una distribución normal con media cercana a cero y varianza homogénea, validando plenamente el instrumento para su implementación como recurso didáctico confiable en la enseñanza de la ingeniería mecatrónica.

Tabla 2. Comparación de resultados.

Angulo de la manivela α	Tiempo de simulación s	Velocidad analítica v_c mm/s	Velocidad SolidWorks v_c mm/s	Velocidad experimental v_c mm/s
0	0	0	0	0
56.49	0.375	56.49	56.49	50.75
62.83	0.750	62.83	62.83	58.10

4. Conclusiones

El diseño del dispositivo, desarrollado mediante el software SolidWorks CAD, junto con los resultados obtenidos en la simulación cinemática (SolidWorks Motion), demostraron una coincidencia significativa entre los datos teóricos y los valores experimentales, con un margen de error del 5% al 10%. Esta concordancia valida la precisión del modelo propuesto y su capacidad para representar fielmente el comportamiento del mecanismo manivela-biela- corredera en condiciones reales.

Los resultados permitieron contrastar los métodos analíticos (gráficos y matemáticos) con los datos de simulación, confirmando que el dispositivo reproduce adecuadamente fenómenos clave como:

- La identificación de puntos muertos (superior e inferior).
- La determinación de la velocidad máxima de la corredera.
- La inversión de movimiento y su relación con la cinemática del sistema.

Además, las gráficas generadas en la simulación presentaron una alta correlación con los datos obtenidos experimentalmente, lo que refuerza la confiabilidad del diseño y la metodología empleada. Esta consistencia entre teoría y práctica no solo valida el modelo, sino que también facilita la comprensión de los principios fundamentales de la cinemática de mecanismos, permitiendo a los estudiantes visualizar y analizar conceptos que, de otro modo, permanecerían abstractos.

Contribuciones principales:

- Validación del modelo CAD: El diseño en SolidWorks demostró ser una representación precisa del mecanismo físico, con resultados simulados muy cercanos a los teóricos.
- Herramienta didáctica efectiva: El dispositivo permite una transición clara entre teoría y práctica, reforzando el aprendizaje de conceptos como velocidades, aceleraciones y puntos críticos en mecanismos.
- Precisión experimental: El margen de error reducido (5%-10%) confirma que la instrumentación y los métodos de medición empleados son adecuados para este tipo de análisis.

5. Agradecimientos

Agradecemos a las autoridades de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Campeche por el apoyo institucional y las facilidades brindadas para el desarrollo de este proyecto. De igual forma, expresamos nuestro reconocimiento a los catedráticos colaboradores de la Universidad Tecnológica de Campeche por su respaldo y compromiso con la innovación educativa.

Extendemos nuestro agradecimiento a las academias de Mecatrónica de ambas instituciones por su valiosa colaboración, asesoría técnica y aportaciones académicas, que enriquecieron significativamente el enfoque pedagógico y tecnológico de este trabajo.

Reconocemos además el invaluable aporte de los estudiantes que participaron en las etapas de diseño, construcción y validación del prototipo, cuyo entusiasmo y dedicación fueron fundamentales para el éxito de esta iniciativa.

6. Conflicto de intereses

“Los autores declaran no tener conflictos de intereses”

7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaramos que hemos utilizado herramientas de Inteligencia Artificial (IA) generativa durante la elaboración de este manuscrito, exclusivamente como apoyo en tareas de redacción, revisión lingüística y organización del contenido. Todas las ideas, fundamentos teóricos, metodologías, resultados, conclusiones y referencias presentados son de nuestra autoría y responsabilidad. El uso de IA no reemplazó el análisis crítico, la interpretación de datos ni la contribución intelectual original de esta investigación. Revisamos y editamos el contenido generado y asumimos la responsabilidad integral sobre la veracidad y originalidad del trabajo publicado.

8. Resumen Grafico

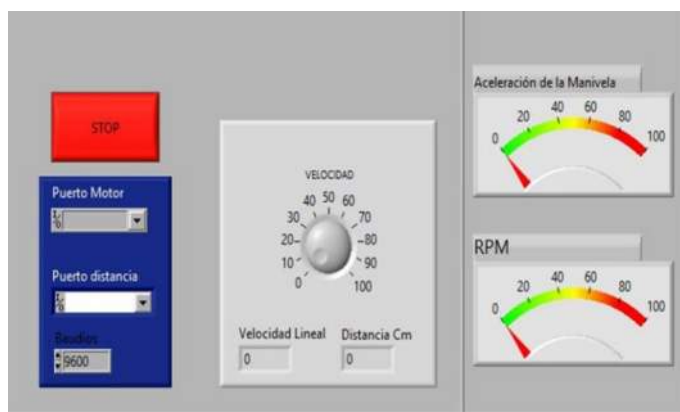


Figura 9. Controles de sistema LabVIEW

Uno de los principales resultados es el sistema HMI que se desarrolló para el manejo del dispositivo didáctico el cual permite al usuario manejar la velocidad de motor que inyecta el movimiento de entrada al mecanismo, que permite el funcionamiento de igual que nos muestra que comportamiento cinemático de la corredera el elemento final, desplazamiento, velocidad y aceleración.

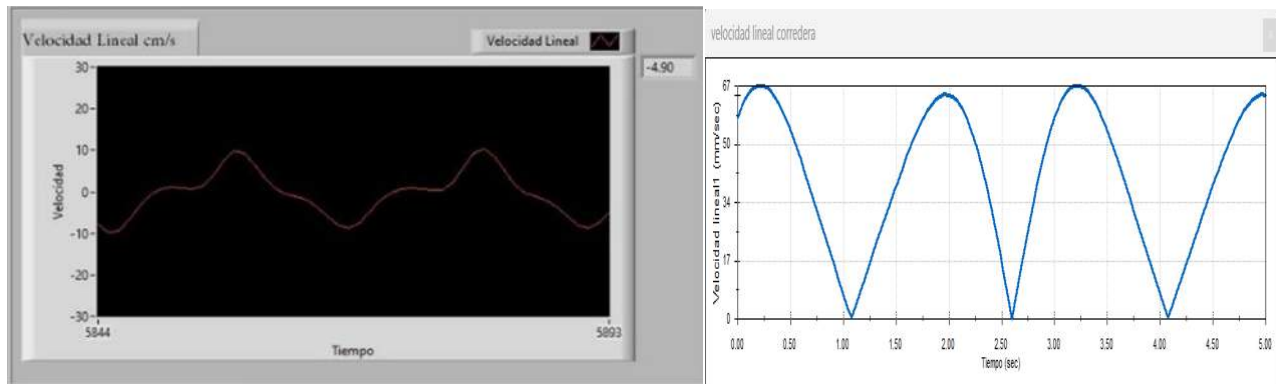


Figura 10. Diagrama de velocidad.

En este diagrama se representa la velocidad de la corredera en tiempo real lo cual nos permite observar que el mecanismo sufre variaciones de velocidad a lo largo de su desplazamiento experimentando velocidades máximas hasta velocidades mínimas iguales a cero que como ya se ha mencionado representa los puntos muertos del mecanismo donde se realiza la inversión de movimiento.

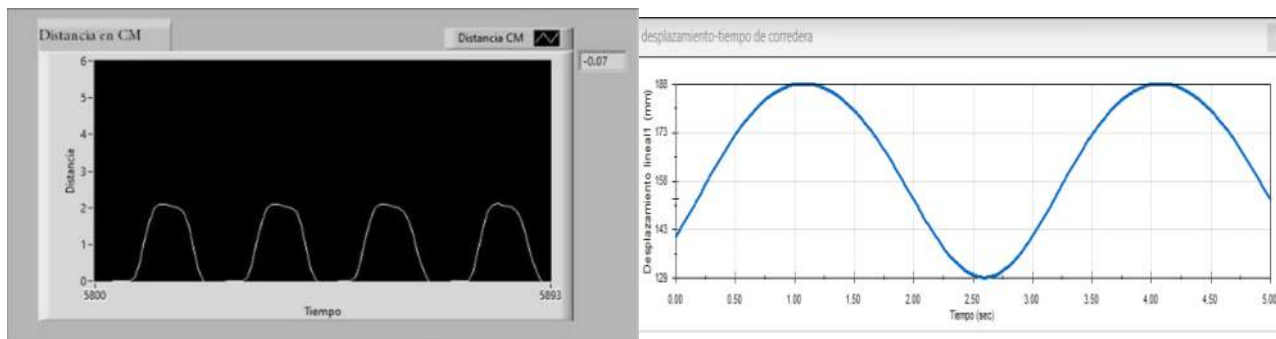


Figura 11. Diagrama de desplazamiento

En este diagrama obtenemos el comportamiento del desplazamiento de la corredera con respecto al tiempo donde nos permite observar una señal senoidal a diferencia de los diagramas obtenidos en la simulación no podemos observar el comportamiento puro ya que en las simulaciones se consideran condiciones ideales y en la realidad hay factores como el torque, fricción y retraso de la señal que no permite ello

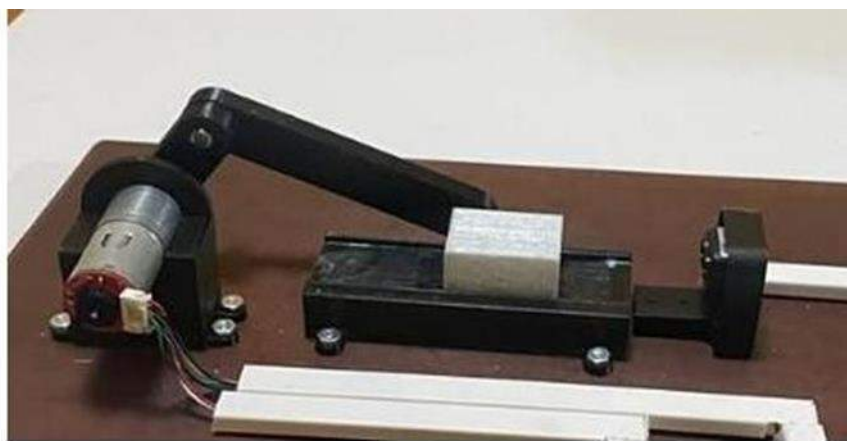


Figura 4. Prototipo Didáctico Biela manivela con corredera.

Como resultado fundamental del proyecto de investigación obtenemos el dispositivo didáctico que nos permite emular el comportamiento del mecanismo en tiempo real, y poder aterrizar los conceptos fundamentales del funcionamiento

9. Roles de contribución

ROL	AUTORES(AS)
Conceptualización	Miguel Angel Perera Cortez
Curación de datos	Wilberth Hidalgo Arcos
Análisis formal	Edgar Antonio Jacobo Cortés
Investigación	Miguel Angel Perera Cortez
Metodología	
Administración del proyecto	Miguel Angel Perera Cortez
Software	Wilberth Hidalgo Arcos
	Edgar Antonio Jacobo Cortés
Supervisión	Miguel Angel Perera Cortez
Validación	Miguel Angel Perera Cortez
	Wilberth Hidalgo Arcos
	Edgar Antonio Jacobo Cortés
Escritura-borrador-original	Wilberth Hidalgo Arcos
Escritura-revisión-edición	Miguel Angel Perera Cortez
	Edgar Antonio Jacobo Cortés

Nota. Taxonomía de roles de contribución (CRediT)

10. Referencias

- [1] Bechthold, M., & Maier, A. (2019). Simulation of Motion. En S. Ahuja (Ed.), SolidWorks 2019.
- [2] Doebelin, E. O., & Manik, D. N. (2014). Measurement Systems: Application and Design. McGraw-Hill Education.
- [3] Johnson, D. W. (2010). Dispositivos didácticos. En M. L. García Llamas, & A. Gil-Flores (Eds.), Diccionario de la educación (pp. 171-173). Ediciones Aljibe.
- [4] Klockner, H. R., & Jowers, I. (2015). Computer Aided Design. En I. Herskovic (Ed.), Encyclopedia of Human Computer Interaction (2nd ed.). Idea Group Reference.
- [5] Kolb, D. A. (1984). Experiential learning: Experience as the source of learning and development. Prentice-Hall.
- [6] Piaget, J. (1977). El desarrollo de la inteligencia. Crítica.
- [7] Shigley, J. E., & Uicker, J. J. (2007). Teoría de Máquinas y Mecanismos. McGraw-Hill Interamericana.
- [8] Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.
- [9] M. Á. Perera-Cortez et al., "Prototype design education for the teaching of mechanism kinematics: Application to the Scotch yoke mechanism," Journal Schools of Economic Thought and Methodology, vol. 7, no. 13, pp. 15–23, Dec. 2023. doi: 10.35429/JSETM.2023.13.7.15.23.
- [10] M. Á. Perera-Cortez et al., "Prototype design education for cinematic learning mechanisms: Applications to the mechanisms to control crank with runner," Journal of Information Technologies, vol. 10, no. 29, pp. 19–27, Jun. 2023. doi: 10.35429/JIT.2023.29.10.19.27.
- [11] M. A. Perera Cortez, R. C. Canto Canul, J. M. Duran Lugo, J. C. Canul Ek, and A. A. Vela Ávila, "Diseño y Estudio Cinemático de Prototipo Didáctico de Mecanismo de Cuatro Barras," in *Liderazgo con Sello Mecatrónico*, A. Gastélum Barrios and J. E. Vargas Soto, Eds. México: Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C., 2025, ch. 8, pp. 101-113.

Uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la química universitaria durante la pandemia de COVID-19

Use of Computer Tools in University Chemistry Teaching During the COVID-19 Pandemic

López-de Dios, C. del C.^{1*}, **Montejo-Ramos, R.¹**, **Acosta-Pérez, L.I.¹**

¹División Académica de las Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

**cristiandelcarmenlopezdedios@gmail.com*

Resumen

La contingencia sanitaria por COVID-19 obligó instituciones de educación superior a realizar una transición inmediata hacia modalidades virtuales, lo que representó un desafío particular para la docencia en ciencias experimentales como la química. El objetivo de este estudio fue evaluar el nivel de competencia y el uso de herramientas informáticas por parte del profesorado de la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco durante dicho periodo. Se aplicó un cuestionario estructurado a 14 docentes, cuyos resultados se analizaron de forma descriptiva. Los hallazgos muestran que, aunque la mayoría manifestó competencias intermedias en herramientas básicas de uso académico como son procesadores de texto, programas para elaborar presentaciones y hojas de cálculo, el manejo de software especializado en química, como simuladores y modeladores moleculares, fue limitado. En cuanto a las plataformas educativas, Microsoft Teams destacó como la más utilizada para clases, mientras que Google Classroom y SEAD tuvieron una presencia menor. Se concluye que el uso de TIC permitió mantener la continuidad académica, aunque mostró que es necesario reforzar la capacitación de los docentes en el uso de herramientas digitales aplicadas a la enseñanza de la química.

Palabras claves: *Herramientas informáticas, TIC, docencia universitaria, química, pandemia COVID-19*

Abstract

The COVID-19 health emergency forced higher education institutions to make an immediate transition to virtual learning modalities, which posed a particular challenge for teaching experimental sciences such as chemistry. The objective of this study was to evaluate the level of competence and the use of computer tools among faculty members of the Bachelor's Degree in Chemistry at the Universidad Juárez Autónoma de Tabasco during this period. A structured questionnaire was administered to 14 instructors, and the results were analyzed descriptively. The findings show that, although most participants reported intermediate proficiency in basic academic tools such as word processors, presentation software, and spreadsheets, their use of specialized chemistry software, including simulators and molecular modeling programs, was limited. Regarding educational platforms, Microsoft Teams was the most widely used for teaching classes, whereas Google Classroom and SEAD were used less frequently. It is concluded that the use of information and communication technologies made it possible to maintain academic continuity; however, the results also showed the need to strengthen faculty training in the use of digital tools applied to chemistry teaching.

Keywords: *Computer tools, ICT; higher education teaching, chemistry, COVID-19 pandemic*

Recibido: 15-enero-2026, Aceptado: 09-julio-2026, Publicado: 31-agosto-2026

1. Introducción

La pandemia de COVID-19 modificó de forma repentina la dinámica de los sistemas educativos en todo el mundo y llevó a las instituciones de educación superior a adoptar, en poco tiempo, nuevas modalidades de enseñanza hacia modalidades virtuales o semivirtuales. Este proceso, identificado como educación remota de emergencia, difiere de la educación en línea tradicional debido a que su implementación respondió a una contingencia sanitaria sin una planificación pedagógica previa ni una infraestructura completamente desarrollada [3,9].

En el ámbito universitario, el cambio hacia la enseñanza virtual planteó dificultades importantes para las disciplinas de carácter experimental, entre ellas la química. Su enseñanza suele apoyarse en prácticas de laboratorio, actividades experimentales y demostraciones presenciales, por lo que el traslado repentino a entornos digitales no resultó sencillo. Esta situación permitió observar que una parte del profesorado no contaba con la preparación tecnológica suficiente y que existían limitaciones en el manejo de herramientas digitales que pudieran complementar o sustituir, al menos parcialmente, las actividades experimentales [8,18].

Durante este periodo, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) fueron indispensables para mantener las actividades académicas. A pesar de ello, su uso también hizo visibles diferencias en el acceso a internet, la disponibilidad de dispositivos electrónicos y el nivel de competencias digitales del personal docente [1,6,14]. Algunos estudios indican que el uso de procesadores de texto, plataformas de videoconferencia y materiales audiovisuales se extendió de manera considerable. Sin embargo, continuaron presentándose dificultades para incorporar programas especializados y estrategias didácticas más adecuadas para la enseñanza de las ciencias experimentales [2,8].

En el caso de la química, los simuladores virtuales, los programas de modelado molecular, las herramientas de cálculo y otras plataformas especializadas pueden contribuir a representar fenómenos, estructuras y procesos que no siempre es posible observar de manera directa. No obstante, su incorporación a las clases no depende únicamente de que estos recursos estén disponibles. También requiere que el profesorado conozca su funcionamiento, identifique su utilidad didáctica y cuente con apoyo institucional durante los procesos de adaptación tecnológica [20].

A partir de este contexto, resulta necesario conocer la manera en que el profesorado universitario enfrentó la transición hacia la enseñanza virtual y el nivel de dominio que tenía sobre distintas herramientas informáticas durante la contingencia sanitaria. Por esta razón, el objetivo del presente estudio fue analizar el nivel de competencia y el uso de herramientas informáticas entre los docentes de la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco durante la pandemia de COVID-19. Con ello se buscó reconocer las principales fortalezas y limitaciones, así como las áreas que requieren mayor atención para favorecer el desarrollo de competencias digitales aplicadas a la enseñanza de la química.

2. Planteamiento del problema

El paso repentino de las clases presenciales a los entornos virtuales dejó al descubierto diversas dificultades en la educación universitaria. Estas fueron más evidentes en áreas experimentales como la química, debido a que una parte importante de su enseñanza se desarrolla mediante prácticas, demostraciones y trabajo de laboratorio [16]. En muchas universidades, la adaptación se realizó sin una planificación pedagógica suficiente y con recursos tecnológicos limitados, lo que dificultó el trabajo cotidiano del profesorado [6].

Ante la suspensión de las actividades presenciales, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) permitieron mantener el contacto con los estudiantes y dar continuidad a los cursos. No obstante, su aprovechamiento no fue igual en todos los casos. Las dificultades de conexión a internet, la falta de equipos adecuados y la poca experiencia de algunos docentes en el manejo de recursos digitales redujeron las posibilidades de utilizarlas de manera efectiva [5,15].

Los estudios realizados durante este periodo muestran que los docentes recurrieron con frecuencia a herramientas conocidas, como procesadores de texto, programas para elaborar presentaciones y hojas de cálculo. En cambio, fue menos común el uso de simuladores, programas especializados y plataformas educativas con funciones más avanzadas. Entre las principales causas se encontraron el limitado dominio de estas tecnologías y la falta de orientación o apoyo por parte de las instituciones [2]. Esta situación tuvo especial importancia en la enseñanza de la química, ya que explicar fenómenos, representar estructuras moleculares o sustituir determinadas experiencias de laboratorio requiere recursos digitales más específicos.

Lo ocurrido durante la contingencia también mostró que la formación tecnológica previa del profesorado era insuficiente para responder a un cambio de esta magnitud. Por ello, conocer qué herramientas utilizaron los docentes y cuál era su nivel de dominio permite reconocer las capacidades que ya habían desarrollado, así como las dificultades que enfrentaron. Este análisis puede servir como base para diseñar programas de capacitación acordes con las necesidades de la enseñanza de la química y mejorar la preparación institucional ante futuros modelos educativos híbridos o virtuales.

Ante este escenario, surge la necesidad de dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el nivel de competencia y el uso de herramientas informáticas del profesorado de la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco durante la pandemia de COVID-19?

3. Metodología Experimental

Este estudio tuvo como objetivo analizar el nivel de competencia y el uso de herramientas informáticas por parte del profesorado de la Licenciatura en Química durante la pandemia de COVID-19, a través de un enfoque cuantitativo. De acuerdo con Hernández-Sampieri y Mendoza [12], la investigación cuantitativa permite recolectar datos para describir fenómenos y establecer tendencias en una población determinada. Se adoptó un diseño de tipo descriptivo y transversal, que permitió caracterizar las competencias digitales de los docentes en un periodo específico de tiempo.

Para recopilar la información se utilizó un cuestionario en línea elaborado en Google Forms. El instrumento estuvo dirigido al profesorado de la Licenciatura en Química y permitió conocer tanto su nivel de competencia digital como el uso que hizo de distintas herramientas informáticas durante el periodo de educación virtual ocasionado por la pandemia de COVID-19.

El cuestionario se estructuró en siete dimensiones:

1. competencias en herramientas básicas de uso académico;
2. uso de software especializado en química;
3. conocimiento y manejo de plataformas educativas;
4. utilización de recursos digitales para el aprendizaje;
5. percepción del apoyo institucional y de la capacitación recibida;
6. retos relacionados con la creatividad y la adaptación de la práctica docente; y
7. percepción del aprendizaje y de las competencias digitales del estudiantado.

Los reactivos se plantearon mediante preguntas cerradas, escalas de frecuencia y opciones relacionadas con el nivel de dominio de las herramientas tecnológicas. Para clasificar el nivel de competencia digital se utilizaron las siguientes categorías:

- Novato
- Competente
- Avanzado
- Experto

las cuales fueron definidas en función del grado de manejo, frecuencia de uso y capacidad de integración pedagógica de las herramientas digitales evaluadas.

Antes de su aplicación, el cuestionario fue revisado mediante juicio de expertos. En este proceso participaron académicos con experiencia en educación superior y competencias digitales, quienes evaluaron la claridad de las preguntas, su pertinencia y la relación entre los reactivos y los objetivos del estudio. A partir de sus observaciones se realizaron los ajustes necesarios en la redacción y organización del instrumento.

La población de estudio estuvo integrada por docentes adscritos a la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. De este grupo participaron 14 profesores, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico de tipo intencional. Para formar parte del estudio debían haber impartido clases durante los ciclos escolares 2020-2, 2021-1 o 2021-2, contar con experiencia básica en el uso de plataformas digitales y aceptar participar de manera voluntaria. Se excluyeron los casos en los que el cuestionario no fue contestado en su totalidad.

Si bien el tamaño de la muestra no permite realizar inferencias estadísticas generalizables, representa una proporción significativa del profesorado activo del programa académico analizado, permitiendo obtener una caracterización descriptiva contextualizada del fenómeno estudiado.

El cuestionario fue distribuido electrónicamente durante el confinamiento sanitario. La participación fue voluntaria y se aseguró la confidencialidad de la información proporcionada. Los datos recolectados se representaron mediante gráficos de frecuencias y porcentajes, lo que permitió describir el nivel de dominio en cada uno de los apartados mencionados. No se aplicaron pruebas estadísticas inferenciales, ya que el objetivo del estudio fue exclusivamente descriptivo.

4. Resultados

Competencias en herramientas básicas de uso académico

Los programas informáticos fueron las herramientas de apoyo para cada uno de los profesores en el desarrollo de las clases en línea, por ejemplo, los programas básicos que se pudieron haber aplicado para un proceso base en la virtualidad son: el manejo de procesadores de textos, diseño de presentaciones y hojas de cálculo, para ello fue necesario conocer como cada profesor considera su manejo, los resultados se muestran en la Figura 1.

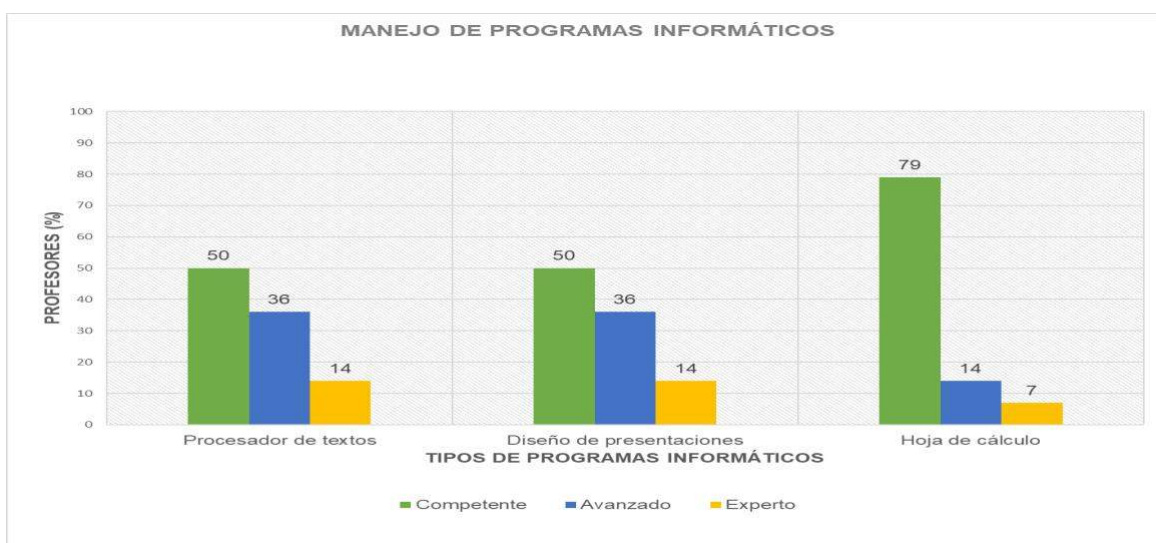


Figura 1. Manejo de programas informáticos

El análisis de la Figura 1 evidencia que el profesorado de la Licenciatura en Química presentó un dominio predominantemente ubicado en el nivel competente en herramientas básicas de uso académico, particularmente en procesadores de texto y programas de presentación. En ambos casos, el 50% de los docentes se clasificó en este nivel, seguido de un 36% en nivel avanzado y un 14% en nivel experto.

Estos resultados sugieren que la mayoría del profesorado cuenta con competencias funcionales suficientes para desarrollar actividades académicas en entornos virtuales; sin embargo, el porcentaje reducido de docentes ubicados en niveles avanzados y expertos refleja limitaciones en el aprovechamiento especializado de herramientas digitales con fines pedagógicos.

En el caso de las hojas de cálculo, se observó una concentración aún mayor en el nivel competente 79%, mientras que los niveles avanzados 14% y experto 7% presentaron porcentajes considerablemente menores. Este comportamiento puede estar relacionado con un uso orientado principalmente a funciones básicas de organización y registro académico, más que al análisis de datos o aplicación de herramientas avanzadas.

En conjunto, los resultados permiten identificar que el profesorado logró adaptarse al uso funcional de herramientas informáticas básicas durante la contingencia sanitaria; no obstante, persiste un área de oportunidad en el fortalecimiento de competencias digitales especializadas que favorezcan una integración más amplia de recursos tecnológicos en la enseñanza de la química.

Uso de software especializado en química

Ahora bien, con respecto al manejo de software especializado, existe un porcentaje muy alto que no los usan a como se observa en la Figura 2.

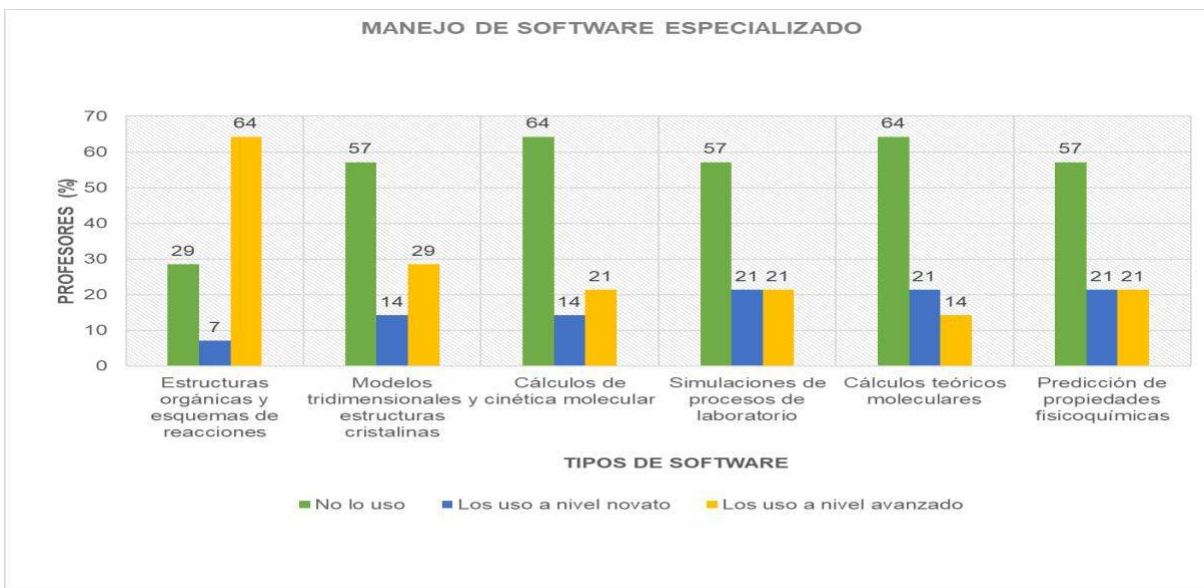


Figura 2. Manejo de software especializado por parte de los profesores

El análisis de la Figura 2 evidenció que una proporción considerable del profesorado manifestó un uso limitado de software especializado aplicado a la enseñanza de la química, lo que representa una de las principales limitaciones identificadas durante el proceso de virtualización académica.

Dentro de las categorías evaluadas se incluyeron herramientas relacionadas con simuladores virtuales de laboratorio, modeladores moleculares y programas de representación estructural utilizados en la enseñanza de la química. Entre las herramientas especializadas que suelen emplearse en la enseñanza de la química se encuentran ChemDraw, Avogadro y Spartan. Estos programas permiten representar estructuras, visualizar moléculas y apoyar la comprensión de distintos procesos químicos mediante recursos digitales.

De acuerdo con los resultados, el mayor nivel de dominio se concentró en los programas utilizados para representar estructuras químicas, ya que el 64 % de los docentes indicó tener un manejo avanzado. La situación fue distinta en el caso de los simuladores de laboratorio, los modeladores moleculares y los programas para trabajar con estructuras tridimensionales, pues más de la mitad del profesorado señaló que no los utilizaba. Esto indica que, durante la pandemia, el uso de recursos digitales especializados se orientó principalmente hacia herramientas de representación visual, mientras que aquellas con mayor capacidad para reproducir o apoyar determinadas actividades experimentales tuvieron una presencia limitada.

El escaso uso de simuladores virtuales constituye una dificultad importante para la enseñanza de una disciplina experimental como la química. Estos recursos pueden ayudar al estudiantado a observar fenómenos, interpretar procesos y desarrollar habilidades de análisis cuando no es posible trabajar directamente en el laboratorio. En relación con ello, [20] señalan que los simuladores pueden favorecer aprendizajes más significativos, debido a que permiten interactuar con representaciones tanto visibles como no visibles de las sustancias químicas.

El uso reducido de software especializado también puede estar relacionado con diferencias en la preparación tecnológica del profesorado. Además de la formación digital, pudieron influir otros factores, como el acceso a los programas, el tiempo disponible para aprender a utilizarlos y el apoyo institucional recibido durante la contingencia sanitaria.

En conjunto, estos hallazgos evidencian que, aunque el profesorado logró mantener la continuidad académica mediante herramientas digitales básicas, aún existen áreas de oportunidad importantes en la incorporación de recursos especializados que fortalezcan la enseñanza virtual de la química.

Uso de plataformas educativas

Existen diversas plataformas educativas las cuales son utilizadas en forma de apoyo para el desarrollo especialmente de clases virtuales hoy en día, aunque para la UJAT la plataforma específica recomendada a utilizar en el periodo de virtualidad y facilitada a sus profesores y alumnos fue Microsoft Teams, es de interés conocer que otras plataformas educativas conocen y que opinan de ellas los profesores a como se muestra en la Figura 3.

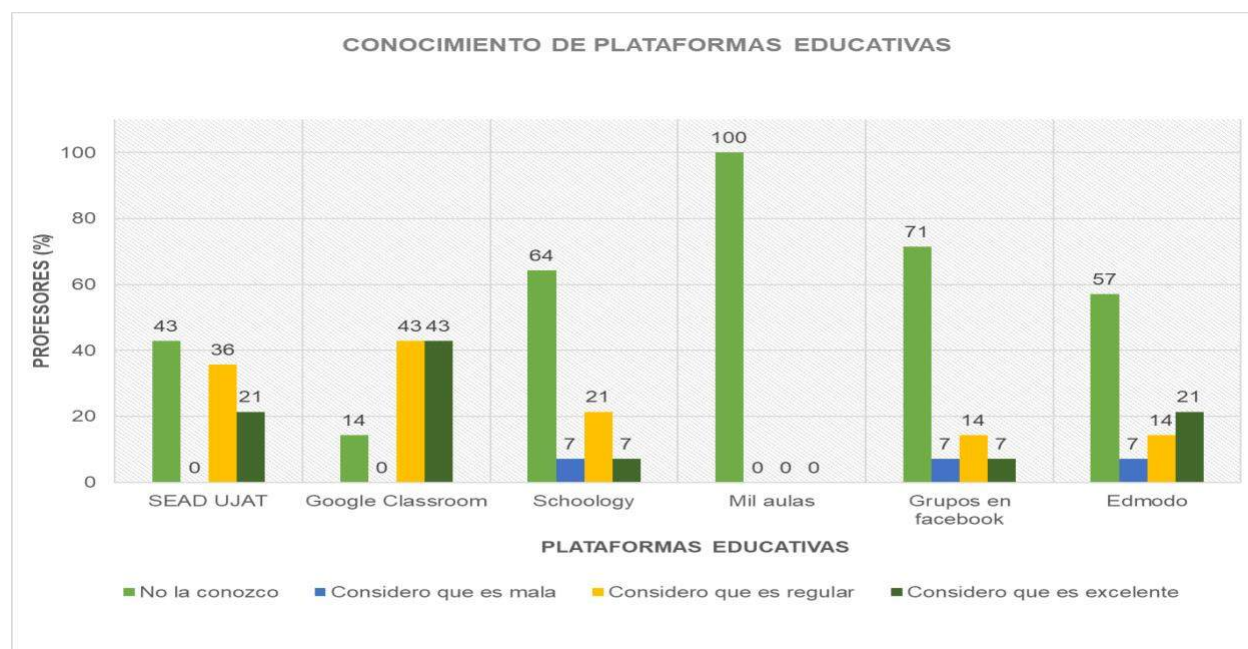


Figura 3. Conocimiento de plataformas educativas por parte de los profesores

De acuerdo con los resultados representados en la Figura 3, se observó que en la mayoría de las plataformas evaluadas existió un nivel variable de conocimiento y utilización por parte del profesorado. Durante el periodo de virtualidad, la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco implementó Microsoft Teams como plataforma institucional para el desarrollo de clases en línea; sin embargo, los resultados muestran que los docentes también recurrieron a otras herramientas digitales como apoyo complementario en sus actividades académicas.

Entre las plataformas analizadas, Google Classroom destacó como una de las más reconocidas por el profesorado, ya que el 43% de los docentes la calificó como excelente, otro 43% como regular y únicamente un 14% señaló no conocerla. Este comportamiento sugiere que algunos docentes buscaron alternativas adicionales que facilitaran la organización de contenidos y la interacción con los estudiantes durante la enseñanza virtual.

En contraste, plataformas como Mil Aulas presentaron un desconocimiento total entre los participantes, mientras que el SEAD UJAT mostró niveles variables de conocimiento y aceptación. Aunque esta última correspondía a una plataforma institucional, el hecho de que un porcentaje importante del profesorado

indicara no conocerla evidencia posibles limitaciones en los procesos de difusión, capacitación o integración tecnológica durante la contingencia sanitaria.

En términos generales, los resultados reflejan que el profesorado tendió a concentrar el uso de plataformas educativas ampliamente difundidas y de fácil acceso, limitando la diversificación de entornos virtuales de aprendizaje. Este comportamiento puede relacionarse con procesos de adaptación acelerada y diferencias en los niveles de alfabetización digital docente durante el periodo de educación remota.

Recursos de aprendizaje

Con respecto al uso de recursos de aprendizaje, se sabe que existen recursos que son de mucho apoyo al momento de llevar a cabo los cursos y que fueron fundamentales al momento de desarrollar las actividades de manera virtual, como se muestra la Figura 4, donde se pueden encontrar algunos recursos de aprendizaje y la opinión de los profesores con respecto a ello.

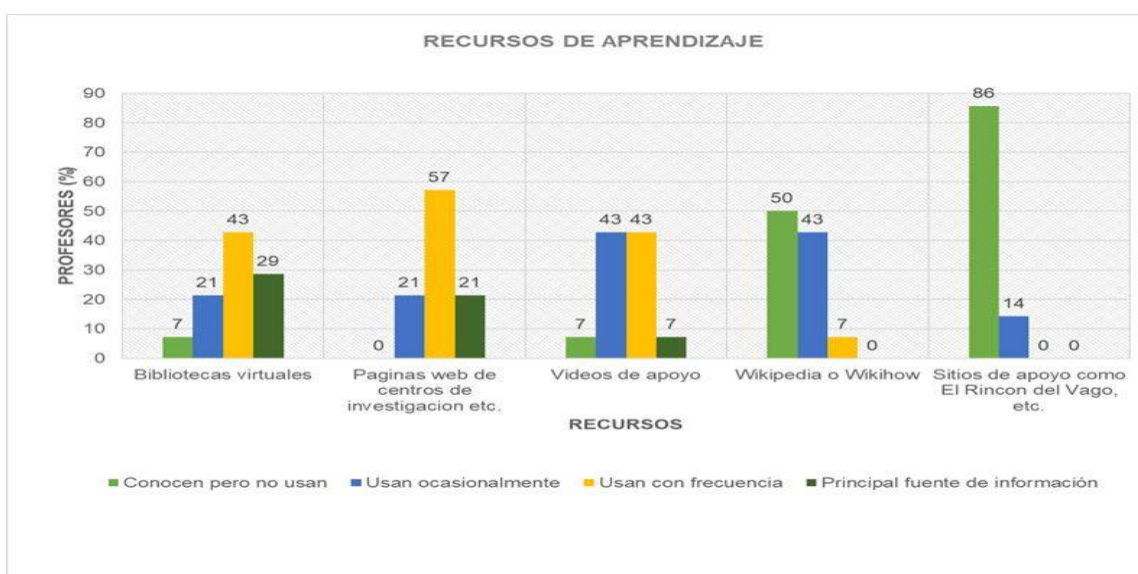


Figura 4. Recursos de aprendizaje

La Figura 4 muestra que uno de los recursos digitales utilizados con mayor frecuencia por el profesorado fueron las páginas web de centros de investigación, reportadas por un 57% de los docentes como una fuente recurrente de consulta, mientras que un 21% indicó utilizarlas ocasionalmente y otro 21% como fuente principal de información. Este comportamiento sugiere una tendencia hacia la búsqueda de recursos académicos especializados y científicamente confiables durante el desarrollo de actividades virtuales.

El uso frecuente de este tipo de recursos resulta relevante en disciplinas experimentales como la química, debido a que permite acceder a información actualizada, materiales técnicos y contenidos validados científicamente. Estos resultados indican que el profesorado dio prioridad a recursos respaldados por instituciones académicas y científicas, lo que sugiere un interés por conservar la calidad de los materiales utilizados durante la enseñanza virtual. Este aspecto adquiere especial importancia en un escenario donde la gran cantidad de información disponible en internet puede dificultar la identificación de fuentes confiables.

Los videos educativos también ocuparon un lugar importante entre los recursos empleados por los docentes. El 43 % indicó utilizarlos con frecuencia y otro 43 % manifestó hacerlo de manera ocasional. Su uso permitió complementar las explicaciones de diversos temas y facilitar la comprensión de fenómenos

químicos; sin embargo, también hizo necesario valorar la calidad y el sustento científico de los materiales disponibles en plataformas de libre acceso.

En cuanto a las bibliotecas virtuales, el 43 % del profesorado señaló consultarlas con frecuencia, mientras que el 29 % las identificó como su principal fuente de información. Estos datos muestran que los recursos académicos digitales tuvieron una presencia relevante durante el periodo de educación a distancia. No obstante, todavía es posible fortalecer el uso de bases de datos científicas y bibliotecas especializadas como parte de las actividades habituales de docencia.

Un comportamiento similar se observó con plataformas no oficiales, como Rincón del Vago. Aunque la mayoría de los participantes manifestó conocer este tipo de sitios, pocos indicaron utilizarlos como apoyo para sus actividades académicas. Esta tendencia sugiere que los docentes prefirieron consultar información proveniente de fuentes con respaldo académico antes que recurrir a plataformas de contenido no especializado.

En términos generales, los resultados muestran que el profesorado adoptó criterios de selección para elegir los recursos digitales utilizados durante la contingencia sanitaria, privilegiando aquellos con mayor respaldo académico para apoyar la enseñanza de la química en entornos virtuales.

Opiniones sobre apoyo institucional y capacitación

Con el propósito de conocer las condiciones que acompañaron el trabajo docente durante la pandemia, se incluyeron preguntas relacionadas con el apoyo brindado por la institución, la capacitación recibida y la carga de trabajo percibida por el profesorado. Las respuestas obtenidas, presentadas en la Figura 5, muestran diferencias de opinión respecto a la claridad de las indicaciones administrativas, la suficiencia de la capacitación ofrecida y el impacto que tuvo el incremento de las actividades laborales durante este periodo.

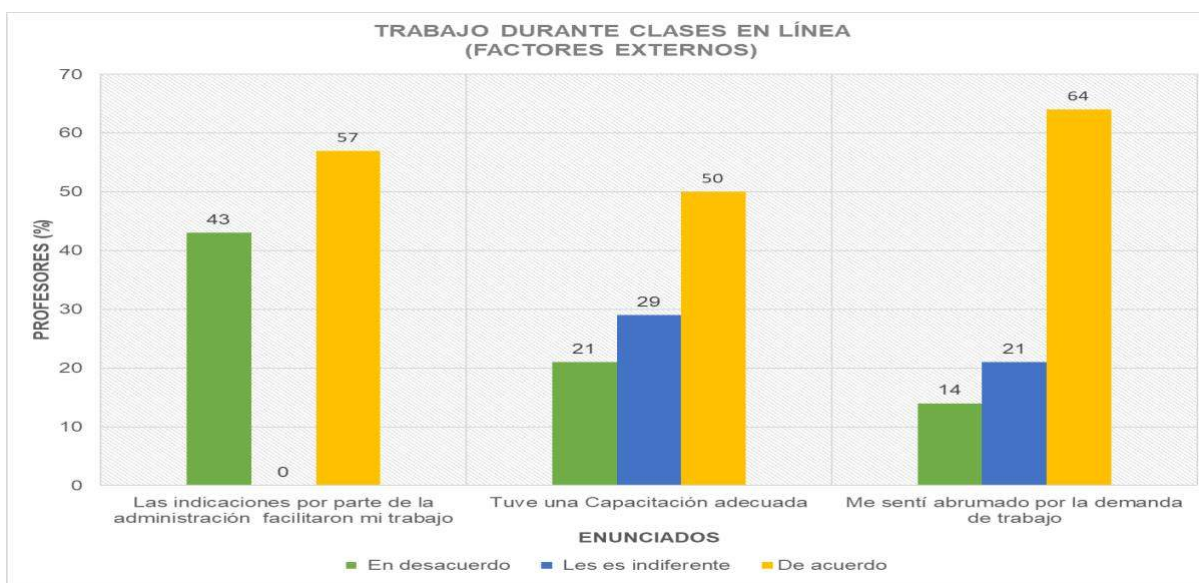


Figura 5. Trabajo durante clases en línea (Factores externos)

Los resultados presentados en la Figura 5 evidencian percepciones diversas respecto al apoyo institucional y las condiciones de trabajo durante la transición hacia la enseñanza virtual. Un 57% del profesorado consideró que las indicaciones administrativas facilitaron el desarrollo de sus actividades académicas, mientras que un 43% manifestó una percepción contraria. Esta diferencia de opiniones refleja los retos organizacionales que enfrentaron las instituciones educativas durante los primeros periodos de adaptación

a la virtualidad, particularmente ante la necesidad de implementar estrategias tecnológicas y pedagógicas en un periodo reducido de tiempo.

La mitad del profesorado (50 %) consideró que la capacitación recibida durante este periodo fue adecuada. No obstante, el 29 % manifestó una postura neutral y el 21 % expresó su desacuerdo. Estas respuestas indican que las acciones de formación implementadas por la institución no respondieron de la misma manera a las necesidades de todos los docentes, particularmente en lo relacionado con el manejo de plataformas educativas y herramientas tecnológicas especializadas.

Respecto a la carga de trabajo, el 64 % de los participantes indicó que se sintió abrumado durante la contingencia sanitaria. Esta percepción probablemente estuvo relacionada con las actividades adicionales que implicó la transición hacia la enseñanza virtual, entre ellas la adaptación de los contenidos, la elaboración de materiales digitales, el aprendizaje de nuevas plataformas y la modificación de las estrategias de enseñanza para impartir clases a distancia.

En conjunto, estos hallazgos permiten observar que el cambio hacia la modalidad virtual no representó únicamente un reto tecnológico. También implicó ajustes en la organización del trabajo docente y en la planeación de las actividades de enseñanza, aspectos que influyeron de manera importante en la experiencia del profesorado durante la pandemia.

Retos de creatividad y percepción docente

Además de analizar las condiciones externas que influyeron en la enseñanza durante la pandemia, también se evaluaron aspectos relacionados con la experiencia del profesorado en el trabajo cotidiano con la modalidad virtual. La Figura 6 resume las opiniones de los docentes sobre su capacidad para adaptarse a esta forma de enseñanza, incluyendo la creatividad empleada en las clases, la satisfacción con su desempeño, el establecimiento de métodos de trabajo, la utilidad de los recursos disponibles en línea y el uso de las videoconferencias como herramienta para la comunicación y el desarrollo de las actividades académicas.

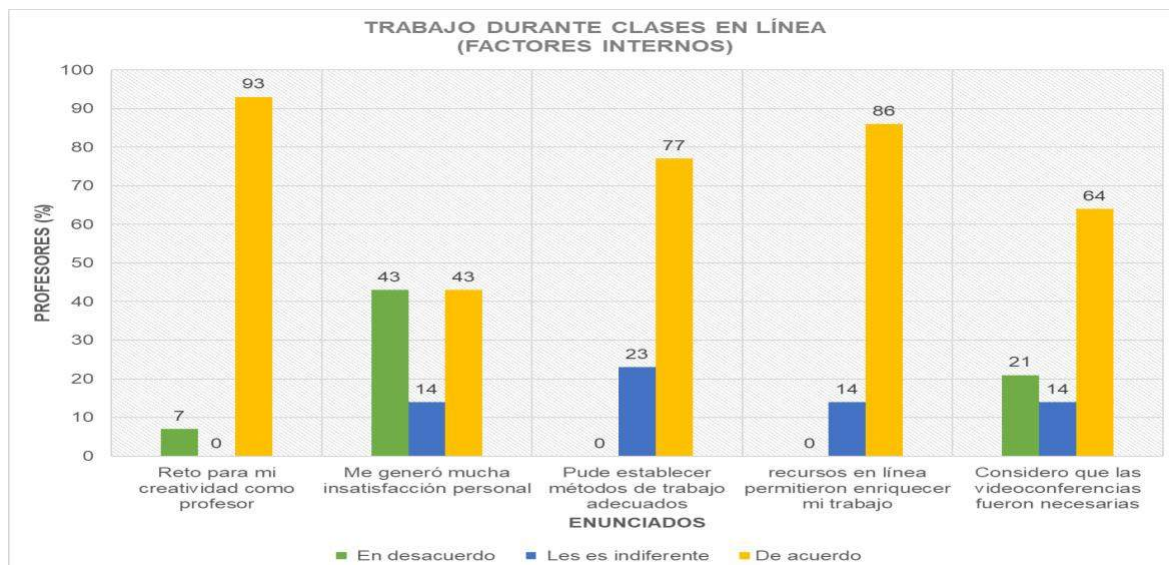


Figura 6. Trabajo durante clases en línea (Factores internos)

Los resultados presentados en la Figura 6 muestran que el 93 % del profesorado percibió la enseñanza en línea como un desafío para su creatividad. Esta percepción puede explicarse por la necesidad de adaptar,

en un periodo muy corto, actividades que tradicionalmente se desarrollaban de manera presencial, especialmente en una disciplina experimental como la química, donde las prácticas de laboratorio y las demostraciones forman parte esencial del proceso de enseñanza.

La transformación de los contenidos para impartirlos en un entorno virtual llevó a los docentes a modificar sus estrategias de trabajo y a buscar nuevas formas de interacción con los estudiantes [7]. En consecuencia, el cambio no consistió únicamente en aprender a utilizar herramientas tecnológicas, sino también en replantear la manera de organizar las clases y mantener la comunicación durante el proceso de enseñanza. La percepción sobre la satisfacción con la experiencia de impartir clases en línea fue menos uniforme. Mientras el 43 % de los participantes manifestó sentirse insatisfecho, otro 43 % expresó una opinión favorable. Esta diferencia sugiere que la adaptación a la modalidad virtual estuvo condicionada por diversos factores, entre ellos las características individuales de cada docente, los recursos tecnológicos disponibles y las condiciones institucionales en las que desarrolló su trabajo.

Aun con las dificultades que implicó la transición hacia la educación a distancia, el 77 % del profesorado indicó que logró establecer métodos de trabajo adecuados para desarrollar sus clases en modalidad virtual. Asimismo, un 86% consideró que los recursos digitales enriquecieron sus actividades académicas, destacando especialmente el uso de páginas web de universidades y centros de investigación, videos educativos y bibliotecas virtuales.

Finalmente, el 64% del profesorado consideró que las videoconferencias fueron necesarias para mantener el contacto y la interacción con los estudiantes durante la contingencia sanitaria. Este resultado evidencia la relevancia de las herramientas de comunicación síncrona en la continuidad académica y en la construcción de dinámicas de enseñanza-aprendizaje en entornos virtuales.

Percepción del aprendizaje de los estudiantes

Finalmente, se exploró la percepción del profesorado acerca del aprendizaje y las competencias desarrolladas por los estudiantes durante las clases en línea. La Figura 7 muestra las opiniones de los docentes en torno al nivel de conocimientos adquiridos por sus alumnos, el manejo de fuentes de información confiables y el uso de herramientas informáticas especializadas.

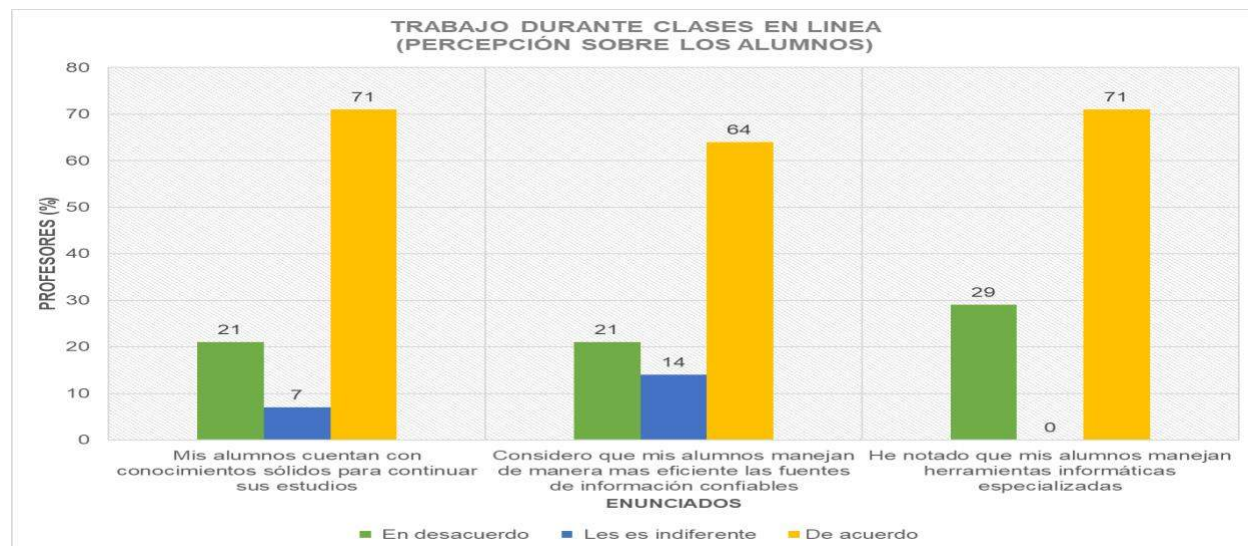


Figura 7. Trabajo durante clases en línea (Percepción sobre los alumnos)

De acuerdo con los resultados presentados en la Figura 7, más del 50% del profesorado manifestó una percepción positiva respecto al desempeño académico de los estudiantes durante la educación virtual. En particular, el 71% de los docentes consideró que sus alumnos adquirieron conocimientos suficientes para continuar con su formación académica, lo que sugiere que, a pesar de las limitaciones derivadas de la contingencia sanitaria, se logró mantener cierta continuidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Asimismo, el 64% de los participantes señaló que los estudiantes desarrollaron un manejo más eficiente de fuentes de información confiables, resultado que puede relacionarse con el uso frecuente de páginas web académicas, bibliotecas virtuales y recursos digitales empleados durante la virtualidad.

El 71 % del profesorado consideró que los estudiantes lograron desenvolverse adecuadamente en el uso de herramientas informáticas especializadas. Esta percepción difiere de lo reportado por los propios docentes en la Figura 2, donde se observó un uso más limitado de este tipo de software. La diferencia entre ambos resultados podría indicar que profesores y estudiantes enfrentaron el proceso de adaptación digital de manera distinta durante la pandemia.

Es posible que esta percepción esté relacionada con la mayor familiaridad que muchos estudiantes tienen con los entornos digitales y con el aprendizaje autónomo de nuevas tecnologías. Estas condiciones pudieron facilitar el desarrollo de habilidades informáticas durante la educación a distancia. Sin embargo, ello no significa necesariamente que alcanzaran un dominio profundo de las herramientas especializadas, sino que adquirieron las competencias suficientes para utilizarlas en las actividades académicas desarrolladas en ese periodo.

En términos generales, los resultados sugieren que la modalidad virtual contribuyó al desarrollo de algunas competencias digitales en los estudiantes. Aun así, también ponen de manifiesto la importancia de fortalecer el acompañamiento del profesorado para incorporar de forma más sistemática herramientas tecnológicas especializadas en la enseñanza de la química.

5. Discusión

Los hallazgos de este estudio indican que el profesorado de la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco desarrolló un dominio adecuado de las herramientas de uso académico más comunes, principalmente procesadores de texto, programas para elaborar presentaciones y hojas de cálculo. En contraste, el manejo de aplicaciones especializadas fue considerablemente menor. Esto sugiere que la adaptación tecnológica durante la pandemia estuvo dirigida, sobre todo, a mantener la continuidad de las actividades académicas, mientras que la incorporación de recursos con un propósito pedagógico más amplio permaneció limitada.

Esta tendencia coincide con lo descrito por [13], quienes señalan que la transición repentina hacia la educación remota puso de manifiesto limitaciones importantes en las competencias digitales del profesorado. Aun así, los docentes lograron ajustarse a las nuevas condiciones de trabajo y desarrollaron estrategias que hicieron posible mantener las actividades de enseñanza durante la contingencia sanitaria.

Una de las principales limitaciones identificadas fue el escaso uso de software especializado en química. Aunque los programas destinados a la representación de estructuras químicas presentaron un mayor nivel de dominio, el empleo de simuladores virtuales, modeladores moleculares y otras aplicaciones especializadas fue reducido. Este comportamiento indica que trasladar los contenidos experimentales a un entorno virtual continuó siendo uno de los mayores retos para la enseñanza de esta disciplina.

En este contexto, [11] mencionan que la ausencia de formación en tecnologías especializadas puede limitar el desarrollo de experiencias de aprendizaje más dinámicas e interactivas. Los resultados obtenidos respaldan esta idea, ya que las necesidades de capacitación detectadas no estuvieron relacionadas

únicamente con el manejo técnico de plataformas digitales, sino también con la capacidad para incorporarlas de manera efectiva en la enseñanza experimental de la química.

En cuanto a las plataformas educativas, el profesorado mostró una clara preferencia por aquellas de uso más extendido y de implementación relativamente sencilla. Esta elección probablemente respondió a la necesidad de adaptarse con rapidez a las condiciones impuestas por la educación a distancia y de trabajar con recursos que ya resultaban familiares. Al mismo tiempo, las diferencias observadas en el conocimiento y utilización de las plataformas institucionales ponen de manifiesto la conveniencia de fortalecer las acciones de capacitación, difusión y acompañamiento tecnológico dentro de la universidad.

El uso frecuente de páginas web académicas, bibliotecas virtuales y otros recursos especializados también indica que los docentes procuraron mantener la calidad de los materiales empleados durante la enseñanza en línea. En un escenario caracterizado por la gran cantidad de información disponible en internet, la selección de fuentes confiables adquiere especial importancia. En este sentido, [4] señalan que elegir adecuadamente los recursos digitales constituye un elemento esencial para preservar la calidad de la enseñanza de las ciencias.

Las respuestas relacionadas con el apoyo institucional y la capacitación reflejan percepciones diferentes entre los participantes. Mientras algunos docentes consideraron suficientes las acciones implementadas por la universidad para facilitar la transición hacia la modalidad virtual, otros manifestaron que la capacitación recibida fue limitada y que la carga de trabajo aumentó de forma considerable. Estas apreciaciones son consistentes con lo reportado por [5], quien identifica el fortalecimiento de la formación digital del profesorado como uno de los principales desafíos que enfrentaron las instituciones de educación superior durante la pandemia.

El elevado porcentaje de docentes que manifestó sentirse abrumado por las demandas académicas permite dimensionar el impacto que tuvo la transición hacia la educación virtual en la organización del trabajo docente. La adaptación de contenidos, la elaboración de materiales digitales, el aprendizaje de nuevas plataformas y la modificación de las estrategias de enseñanza implicaron responsabilidades adicionales que transformaron la práctica cotidiana durante la contingencia sanitaria.

La creatividad también representó un desafío importante para el profesorado. La mayoría de los participantes consideró que impartir clases en línea exigió diseñar nuevas estrategias didácticas y buscar formas diferentes de mantener la interacción con los estudiantes [19]. Esta situación coincide con lo señalado por [9], quien plantea que la educación remota de emergencia llevó a los docentes a replantear sus prácticas educativas en un contexto marcado por la incertidumbre y la necesidad de adaptación permanente. A pesar de las dificultades identificadas, los docentes consiguieron establecer formas de trabajo que les permitieron desarrollar sus cursos y reconocieron que los recursos digitales aportaron elementos valiosos para apoyar las actividades académicas. Estos resultados permiten considerar que la virtualidad no solo puso en evidencia limitaciones relacionadas con las competencias tecnológicas, sino que también impulsó procesos de innovación y adaptación pedagógica dentro de la enseñanza universitaria.

Desde la perspectiva del profesorado, los estudiantes mostraron un desempeño favorable en el uso de herramientas digitales durante el periodo de educación virtual. Sin embargo, esta percepción contrasta con el bajo nivel de utilización de software especializado reportado por los propios docentes, lo que podría reflejar diferencias generacionales en la forma de incorporar las tecnologías o una mayor disposición del alumnado para el aprendizaje autónomo de nuevos recursos.

Conviene señalar que esta valoración corresponde a la percepción del profesorado y no constituye una medición directa de las competencias digitales del estudiantado. En consecuencia, los resultados sugieren que los estudiantes desarrollaron habilidades funcionales para trabajar con recursos digitales, aunque ello no implica necesariamente un dominio especializado de programas aplicados a la química. Por ello, resulta

conveniente fortalecer el acompañamiento docente y promover una integración más sistemática del software especializado en las modalidades de enseñanza virtual e híbrida.

6. Conclusión

El estudio permitió identificar que el profesorado de la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco logró un manejo funcional de herramientas básicas de uso académico durante la contingencia sanitaria por COVID-19. Sin embargo, el uso de software especializado para la enseñanza de la química presentó mayores limitaciones, particularmente en recursos como simuladores virtuales, modeladores moleculares y otras herramientas orientadas al apoyo de actividades experimentales. Esta situación representa un área de atención para fortalecer la incorporación de tecnologías digitales en la enseñanza de la química.

Los resultados también muestran que las plataformas digitales y los recursos disponibles en línea fueron elementos fundamentales para mantener la continuidad académica durante el periodo de educación remota. El empleo de sitios académicos, bibliotecas virtuales y materiales audiovisuales refleja la capacidad del profesorado para seleccionar alternativas de apoyo que facilitaran el desarrollo de las actividades docentes en un contexto de cambio acelerado.

No obstante, la transición hacia modalidades virtuales implicó modificaciones importantes en la práctica docente. La adaptación de contenidos, la incorporación de nuevas herramientas y la reorganización de estrategias de enseñanza generaron desafíos relacionados con la creatividad, la planeación académica y la carga de trabajo del profesorado.

Desde la perspectiva de los docentes, los estudiantes mostraron una adaptación favorable al uso de recursos digitales durante la virtualidad. Sin embargo, esta apreciación corresponde a la percepción del profesorado y no a una evaluación directa de las competencias estudiantiles. Por ello, resulta necesario continuar fortaleciendo los procesos de acompañamiento docente y promover una integración pedagógica más estructurada de herramientas tecnológicas especializadas en disciplinas experimentales como la química.

En conjunto, este estudio permitió caracterizar el nivel de competencia digital y el uso de herramientas informáticas por parte del profesorado de la Licenciatura en Química durante la educación remota derivada de la pandemia de COVID-19. Los hallazgos aportan información sobre las capacidades desarrolladas, las dificultades enfrentadas y las necesidades de formación que pueden orientar futuras estrategias institucionales para la enseñanza virtual e híbrida.

Finalmente, la experiencia derivada de la contingencia sanitaria evidenció que las competencias digitales representan actualmente un componente fundamental dentro de la educación superior. En este contexto, resulta necesario continuar fortaleciendo procesos de capacitación docente, integración tecnológica y actualización pedagógica que permitan consolidar modelos educativos más flexibles, innovadores y adaptables a futuros escenarios virtuales o híbridos.

7. Agradecimientos

Los autores agradecen a la División Académica de Ciencias Básicas por el apoyo brindado al momento de realizar este trabajo de investigación, así mismo se agradece a la academia de química, a su cuerpo académico y sus recursos con los cuales fue posible realizar este trabajo.

8. Conflicto de interés

“Los autores declaran no tener conflictos de intereses”

9. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Durante la elaboración del manuscrito no se utilizaron herramientas de inteligencia artificial para la redacción, análisis o interpretación científica del contenido. Sin embargo, el resumen gráfico fue elaborado con apoyo de herramientas de inteligencia artificial para fines exclusivamente visuales y de diseño.

10. Resumen Grafico



Figura 8. Resumen gráfico del estudio.

11. Roles de contribución

ROL	AUTORES(AS)
Conceptualización	López-de Dios, C. del C.; Acosta-Pérez, L.I.
Curación de datos	López-de Dios, C. del C.
Análisis formal	López-de Dios, C. del C.; Acosta-Pérez, L.I.
Adquisición de fondos	Acosta-Pérez, L.I.
Investigación	López-de Dios, C. del C.
Metodología	López-de Dios, C. del C.; Acosta-Pérez, L.I.
Administración del proyecto	Acosta-Pérez, L.I.
Recursos	Acosta-Pérez, L.I.; Montejo-Ramos, R.
Software	López-de Dios, C. del C.
Supervisión	Acosta-Pérez, L.I.
Validación	Acosta-Pérez, L.I.
Visualización	López-de Dios, C. del C.
Escritura-borrador-original	López-de Dios, C. del C.
Escritura-revisión-edición	Acosta-Pérez, L.I.; Montejo-Ramos, R.

Nota. Taxonomía de roles de contribución (CRediT)

12. Referencias

- [1] Alfonso Torez, A. M., & Rodríguez Pérez, N. (2020). Catálogo de herramientas informáticas edición de imágenes fijas y fotografías. *Tecnología educativa socializando tus experiencias*, V, 67-77.
- [2] Ávalos, C. (2020). Competencias digitales docentes en educación superior: desafíos y oportunidades. *Revista Educación y Tecnología*, 14(2), 45–59.
- [3] Bozkurt, A., & Sharma, R. C. (2020). Emergency remote teaching in a time of global crisis due to the CoronaVirus pandemic. *Asian Journal of Distance Education*, 15(1), 1–6.
- [4] Canani, L., & Seymour, J. (2021). Uso crítico de recursos digitales en la enseñanza de las ciencias. *Revista de Innovación Educativa*, 23(3), 55–68.
- [5] Carrasco, J. (2021). Formación docente en entornos virtuales: experiencias en universidades latinoamericanas. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, 12(34), 115–134.
- [6] CEPAL-UNESCO. (2020). La educación en tiempos de la pandemia de COVID-19. Naciones Unidas.
- [7] Chauca Díaz, M. E. (2021). El rol del docente en la educación virtual. *RECIMUNDO: Revista Científica de Investigación y Desarrollo*, 5(1), 995–1007. [https://doi.org/10.26820/recimundo/5.\(1\).ene.2021.995-1007](https://doi.org/10.26820/recimundo/5.(1).ene.2021.995-1007)
- [8] Clavijo Gutiérrez, J. (2018). Integración de TIC en educación superior: prácticas y limitaciones. *Revista Colombiana de Educación*, 75, 231–250.
- [9] Daniel, S. J. (2020). Education and the COVID-19 pandemic. *Prospects*, 49(1–2), 91–96. <https://doi.org/10.1007/s11125-020-09464-3>

- [10] Delgado Fernández, J., & Solano González, J. (2009). El uso crítico de internet en educación superior. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 9(1), 1–24.
- [11] Guevara Íñiguez, J., Chacha, J., Cárdenas, V., & Vinuesa, R. (2021). Enseñanza de las ciencias con apoyo de entornos digitales: retos y oportunidades. *Revista Conrado*, 17(80), 284–292.
- [12] Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill.
- [13] Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T., & Bond, A. (2020). The difference between emergency remote teaching and online learning. *Educause Review*, 27, 1–12.
- [14] Juca Maldonado, A. (2016). El rol del docente en entornos virtuales: una mirada desde la práctica educativa. *Revista Científica Dominio de las Ciencias*, 2(3), 103–118.
- [15] Kohls-Santos, P. (2021). Brechas digitales y docencia universitaria en tiempos de pandemia. *Revista Educación y Sociedad*, 39(144), 45–62.
- [16] López-de Dios, C. del C., Lobato-García, C. E., & Acosta-Pérez, L. I. (2025). *Percepciones del profesorado de la Licenciatura en Química sobre la enseñanza-aprendizaje durante la pandemia de COVID-19*. *Huella Científica*, 2(2), 79–98.
- [17] Mirete Ruíz, R. (2010). Competencias digitales en educación superior: una visión desde el profesorado. *Revista de Educación a Distancia*, 25, 1–17.
- [18] Ordorika, I. (2020). Pandemia y educación superior. *Revista de la Educación Superior*, XLIX, 1-8.
- [19] Otero, M. (2006). Creatividad y práctica docente en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(3), 1–10.
- [20] Pacheco, J., Lorduy, D., Flórez, L., & Páez, M. (2021). Simuladores virtuales en la enseñanza de la química: un recurso para el aprendizaje significativo. *Revista Virtualidad, Educación y Ciencia*, 12(23), 67–78.

Impacto financiero y clínico de la ciclofosfamida y bendamustina en el tratamiento de cáncer en México

Financial and clinical impact of cyclophosphamide and bendamustine in cancer treatment in Mexico

Díaz-Martínez, I. G.¹ , Castro-Georgana V. F.² , Vázquez-Cahuich D. A.¹ , De la Cruz-López J. J.¹ , García-Jesús K. P.³ , Flores-Dorantes M. T.¹ , Pedraza-Montero P.^{1*} 

¹Laboratorio de Biología Molecular y Farmacogenómica, Centro de Investigación de Ciencia y Tecnología Aplicada de Tabasco, División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Villahermosa, Tabasco, México.

²Departamento de Operación Sanitaria, Comisión Federal Para La Protección Contra Riesgos Sanitarios, Villahermosa, Tabasco, México.

³Departamento de Operación Sanitaria, Dirección de Protección contra Riesgos Sanitaria, Villahermosa, Tabasco, México.

*pascual.pedraza@ujat.mx

Resumen

El cáncer es un grave problema de salud a nivel mundial. Se disponen de diversos tratamientos oncológicos que permiten a los pacientes obtener mejores resultados terapéuticos. La ciclofosfamida y la bendamustina son fármacos utilizados en diferentes tratamientos contra el cáncer que pueden evaluarse a través de estudios farmacoeconómicos tales como la minimización de costos. Este estudio comparó los costos asociados al uso de ciclofosfamida y bendamustina mediante una evaluación farmacoterapéutica y de minimización de costos en distintos tipos de cáncer, así como la recopilación de reacciones adversas de la ciclofosfamida y bendamustina a partir de historiales clínicos recopilados y artículos revisados, generando un árbol de decisión para comparar el costo anual, los ciclos anuales de quimioterapia y el posible desabasto de ambos medicamentos. Demostrando que la mayor accesibilidad financiera de la ciclofosfamida se ve contrarrestada por las reacciones adversas graves manifestadas y que la selección del esquema óptimo debe sustentarse en un balance que armonice costo, seguridad, tolerabilidad y disponibilidad del fármaco.

Palabras claves: *análisis de minimización de costos, farmacoeconomía, farmacoterapia; quimioterapia, reacciones adversas a medicamento.*

Abstract

Cancer is a serious global health problem. Various oncological treatments allow patients to achieve better therapeutic outcomes. Cyclophosphamide and bendamustine are drugs used in different cancer treatments that can be evaluated through pharmacoeconomic studies, such as cost-minimization analysis. This study compared cost the associated with the use of cyclophosphamide and bendamustine through a pharmacotherapeutic and cost-minimization evaluation across different types of cancer, as well as a compilation of adverse reactions based on clinical records and reviewed articles. A decision tree was generated to compare annual costs, annual chemotherapy cycles, and potential shortages of both medications. The results demonstrate that the greater financial accessibility of cyclophosphamide is offset by the manifestation of severe adverse reactions. Consequently, the selection of the optimal regimen must be based on a balance that harmonizes cost, safety, tolerability, and drug availability.

Keywords: *adverse drug reactions, Chemotherapy, cost minimization analysis, Pharmacoeconomics, Pharmacotherapy.*

Recibido: 29-enero-2026, Aceptado: 28-abril-2026, Publicado: 31-agosto-2026

1. Introducción

El cáncer es un grave problema de salud a nivel mundial, en México se diagnostican más de 195 mil casos en sus diferentes tipos (Secretaría de Salud, 2023). Actualmente, existen diversos tratamientos oncológicos que permiten a los pacientes obtener mejores resultados terapéuticos. No obstante, la aparición de efectos adversos es frecuente y está influenciada por factores relacionados tanto con el paciente como con el medicamento administrado (Alonso Castellanos et al., 2014). La mayoría de los medicamentos utilizados corresponden a antineoplásicos citotóxicos, cuyo objetivo es inducir la apoptosis de las células tumorales en proliferación. Entre ellos se encuentran la ciclofosfamida y la bendamustina, esta última con propiedades adicionales de antimetabolito por su similitud estructural con las purinas.

La ciclofosfamida y la bendamustina pertenecen al grupo de las mostazas nitrogenadas, las cuales actúan como agentes alquilantes al formar un catión aziridinio altamente reactivo que se une covalentemente al ADN (ácido desoxirribonucleico), provocando entrecruzamientos entre las cadenas, que es fundamental para su efecto antitumoral al afectar la replicación celular (Velásquez et al., 2016). Además, la estructura del agente puede influir en la reactividad y selectividad del fármaco, permitiendo reducir su toxicidad mediante modificaciones químicas que afectan su distribución y absorción en el organismo. La ciclofosfamida, tiene indicaciones para el tratamiento del cáncer de mama (CM), de linfoma no Hodgkin (LNH) y leucemia linfoblástica aguda (LLA) (Stork & Schreffler, 2023).

Por otro lado, la bendamustina actúa como un agente alquilante, presenta dos grupos reactivos, la mostaza nitrogenada y el anillo de benzimidazol, los cuales puede unirse a sitios de ADN separados. El anillo de benzimidazol potencia su actividad alquilante, lo que posibilita que el fármaco obtenga concentraciones más altas en el núcleo o por inhibición de la reparación del ADN, se traduce en una mayor eficacia para inducir la muerte de células cancerosas, incluso en aquellas que suelen resistir otros tratamientos. Consecuentemente, las características estructurales de la bendamustina le confieren actividad antitumoral e inmunomoduladora, lo que ha favorecido su incorporación en diversos esquemas terapéuticos para el tratamiento de neoplasias hematológicas, constituyendo una alternativa a agentes alquilantes tradicionales (Lalic et al., 2022).

Este antineoplásico es utilizado en el CM, LNH y LLA (Pirvulescu et al., 2008). Actualmente, el uso de bendamustina en CM no está aprobada por parte de la Administración de Alimentos y Medicamentos de los Estados Unidos (FDA); sin embargo, diversos estudios clínicos han evaluado su aplicación en pacientes con esta neoplasia, reportando respuestas clínicas favorables en algunos casos, lo que ha despertado interés en su utilidad terapéutica (Lalic et al., 2022). La comparabilidad terapéutica entre ciclofosfamida y bendamustina se sustenta no solo en su mecanismo de acción como agentes alquilantes, sino también en evidencia clínica reportada en la literatura. Diversos ensayos clínicos han evaluado esquemas que incluyen bendamustina en comparación con regímenes basados en ciclofosfamida, mostrando que ambas alternativas pueden considerarse opciones terapéuticas válidas dentro de este contexto (Herold et al., 2006).

Las reacciones adversas a medicamentos (RAM) son un factor clave en el tratamiento oncológico, ya que pueden comprometer la eficacia terapéutica, disminuir la calidad de vida del paciente e incrementar los costos asociados a la atención médica. Por lo tanto, resulta relevante evaluar la posible relación causal entre la administración de los fármacos y de las RAM, incluyendo en aquellos escenarios donde los pacientes presentan comorbilidades y reciben esquemas de poliquimioterapia. Es por ello, que el uso de herramientas

estandarizadas (por ejemplo algoritmos como el de Karch –Lasagna y de Narajando) permiten una mejor interpretación de estos eventos dentro de la práctica clínica (Chopra et al., 2016).

Asimismo, el costo de las quimioterapias es un factor que tiene una repercusión negativa en la salud física y emocional, pues afecta las relaciones interpersonales y financieras del paciente y del sistema de salud. En México, un tratamiento anual dependiendo del tipo cáncer y la complejidad de la farmacoterapia oscila entre \$18,000 y \$47,000 pesos (González-Robledo et al., 2015). Por lo que, evaluar de forma sistemática este tipo de reacciones permite no solo optimizar la seguridad del tratamiento, sino también facilitar la toma de decisiones clínicas. Por lo que, la construcción de un árbol de decisión resulta fundamental, para comparar de forma estructurada los beneficios, riesgos y costos de cada alternativa terapéutica, contribuyendo así a seleccionar el fármaco adecuado para cada situación clínica (Hammann et al., 2010). Rinnerthaler menciona que la ciclofosfamida y la bendamustina, al ser fármacos alquilantes con una eficacia y seguridad similar, pueden evaluarse a través de una minimización de costos durante las quimioterapias y de esta manera optimizar los recursos financieros (Rinnerthaler et al., 2021). Este estudio está enfocado en comparar los costos asociados al uso de ciclofosfamida y bendamustina mediante una evaluación farmacoterapéutica y un análisis de minimización de costos (AMC) en distintos tipos de cáncer.

2. Metodología Teórica

2.1 Análisis de sujetos de estudio

El estudio corresponde a un diseño observacional retrospectivo de tipo pragmático, basado en el análisis de datos obtenidos a partir de historiales clínicos de un centro médico ubicado en el sureste de México.

Debido a la naturaleza retrospectiva del estudio y al uso de datos secundarios anonimizados, no fue requerida la aprobación por un comité de ética en investigación, conforme a las disposiciones aplicables para estudios sin intervención y sin riesgo para los sujetos. El manejo de la información se realizó bajo los principios éticos de la Declaración de Helsinki para proteger la autonomía de los individuos (Asociación Médica Mundial, 2013).

La recopilación de los expedientes clínicos fue realizada por personal adscrito a la Comisión Federal para la Protección contra Riesgos Sanitarios (COFEPRIS), quienes proporcionaron los registros clínicos para su análisis con fines de investigación. Posteriormente, la información fue sistematizada mediante la plataforma de VigiFlow, una herramienta utilizada en farmacovigilancia para el registro y análisis de RAM (Secretaría de salud, 2025).

A través de esta plataforma se organizaron y analizaron variables relevantes como edad, sexo del paciente, tipo de neoplasia, esquema terapéutico administrado, dosis terapéuticas de los medicamentos, fecha de inicio de la enfermedad, ciclos de quimioterapia, RAM reportadas, seguimiento terapéutico, interrupciones del tratamiento, comorbilidades, antecedentes de adicciones y desenlaces clínicos, incluyendo fallecimientos.

Se realizó una revisión de los expedientes clínicos, donde aquellos registros que presentaban información incompleta o ausencia de datos clínicos relevantes fueron excluidos del análisis. Tras este proceso, la muestra final quedó conformada por 40 expedientes clínicos completos, correspondientes a la totalidad de casos disponibles.

Los pacientes correspondían a registros clínicos comprendidos en el periodo marzo 2023 a febrero 2024, con una edad entre 30 a 65 años, de los cuales el 20% correspondió a adultos mayores. Los sujetos de estudio presentaban diagnóstico de CM (n=18), LNH (n=12) y LLA (n=10), tratados con un tratamiento quimioterapéutico que incluía principalmente ciclofosfamida como parte del esquema terapéutico.

2.2 Análisis de valor unitario de los medicamentos

Se realizó un AMC, partiendo de la equivalencia terapéutica entre la ciclofosfamida y la bendamustina. El análisis se efectuó considerando únicamente los costos directos asociados al tratamiento farmacológico. El cálculo de costos se realizó utilizando el valor unitario de cada medicamento, considerando el intervalo de dosificación y el promedio anual de ciclos de quimioterapia. Inicialmente, se consultaron catálogos institucionales; sin embargo, debido a que la bendamustina no se encontraba incluida en dichas fuentes, se optó por utilizar una fuente homogénea para ambos fármacos.

Los precios unitarios de la ciclofosfamida y la bendamustina fueron estimados mediante consulta de plataformas comerciales en línea correspondientes a farmacias especializadas en medicamentos oncológicos y de alta especialidad en México, incluyendo Curitek, Conexión Oncológica y Farmacias Probemedic. Los precios fueron obtenidos durante el año 2025, considerando presentaciones equivalentes a las utilizadas en la práctica clínica.

Para el análisis, en el caso de la ciclofosfamida, se consideró una dosis de 1000 mg por ciclo, con un costo promedio de \$ 3,216.66 MXN por administración, mientras que para la bendamustina se tomó como referencia una dosis de 80 mg por ciclo, obtenida del estudio realizado por Austria (Rinnerthaler et al., 2021) con un costo promedio de \$ 8,040.00 MXN.

La estimación del costo total anual contempló el costo unitario por el número de ciclos promedio al año registrados en los expedientes clínicos: cinco ciclos para la ciclofosfamida y ocho para la bendamustina.

El análisis consideró exclusivamente los costos directos de los medicamentos, sin incluir descuentos, ajustes por inflación o proyecciones económicas. Asimismo, no se contemplaron costos relacionados con la administración del tratamiento debido a la variabilidad que estos presentan entre instituciones de salud.

2.3 Tasa de Respuesta Global e Intervalo de Confianza 95%

Debido a que la ciclofosfamida y la bendamustina presentaron una eficacia terapéutica equivalente se realizó un AMC. Además, se revisó la Tasa de Respuesta Global (ORR), un parámetro que indica la eficacia de un tratamiento oncológico y reflejando el porcentaje de pacientes que logran una reducción significativa o completa del tumor (Aykan & Özatlı, 2020).

A partir de la ORR de cada uno de los fármacos, se estimó un Intervalo de Confianza del 95 % (IC95 %), el cual permite cuantificar la precisión de la estimación y el rango dentro del cual se espera que se encuentre el valor real en la población. El uso del IC95 % hace posible comparar los tratamientos considerando la variabilidad de los datos y no únicamente los valores puntuales observados. En estudios de equivalencia, dos tratamientos se consideran comparables cuando el IC95 % de la diferencia en la tasa de respuesta, se encuentra completamente dentro de un margen de equivalencia previamente establecido ($-\Delta$ a $+\Delta$) (Hazra, 2017).

El IC95 %, para las proporciones se calcularon mediante el método de Wald, utilizando la aproximación normal para estimar la variabilidad de la proporción observada. Este método permite estimar la variabilidad de proporciones en muestras finitas; sin embargo, se reconoce que puede presentar limitaciones en tamaños de muestra pequeños, por lo que los resultados deben interpretarse considerando las limitaciones inherentes al tamaño de muestra (Pan, 2002).

Se estableció un margen de equivalencia de $\pm 10\%$ ($\Delta = 0.10$), definido previamente con base a criterios clínicos y estadísticos utilizados en estudios clínicos oncológicos. Este valor se encuentra dentro de los rangos comúnmente reportados en la literatura, donde los márgenes de equivalencia suelen oscilar entre el 5 % y el 20 %, con valores cercanos al 10 – 15 % considerados clínicamente aceptables (Hashim et al., 2021). Bajo este criterio, las diferencias observadas entre la ciclofosfamida y la bendamustina se ubicaron

dentro del margen de equivalencia establecido, lo que permitió considerarlo comparables desde el punto de vista clínico.

Una vez determinado este criterio, se procedió con el análisis de minimización de costos, considerando el total de recursos económicos requeridos por paciente a lo largo de un año de tratamiento. Este análisis incluyó variables como el número de ciclos, la dosis administrada por ciclo y el precio unitario de cada fármaco, permitiendo identificar cuál de las alternativas representa una opción más eficiente en términos de uso racional de recursos, sin comprometer los resultados terapéuticos.

2.4 Evaluación de causalidad de RAM

Se llevó a cabo un análisis de causalidad manejando la escala de la Organización Mundial de la Salud-Centro de Monitoreo de Uppsala (OMS-UMC), un método cualitativo que permite establecer el grado de asociación entre un tratamiento farmacológico y la detección de RAM mediante una evaluación clínica sistemática (Shukla et al., 2021).

Se revisaron los expedientes clínicos de los pacientes fallecidos incluidos en el estudio, recopilando información sobre el esquema terapéutico administrado, la cronología de los eventos clínicos, las RAM reportadas, la progresión de la enfermedad oncológica y la presencia de tratamientos concomitantes. Con base a estos criterios, los casos fueron clasificados en las categorías de causalidad establecidas por la OMS-UMC: cierta, probable, posible, improbable o no evaluable, de acuerdo con la consistencia de la evidencia clínica disponible.

2.5 Tabla comparativa y árbol de decisión

Se realizó una tabla comparativa de las RAM reportadas en la población mexicana estudiada y en los estudios internacionales de Austria cuyo régimen fue bendamustina (Rinnerthaler et al., 2021) y uno reportado en Canadá cuyo régimen fue bendamustina y rituximab (BR) (Chan et al., 2024). Esta comparación se llevó a cabo mediante comparación indirecta, debido a la limitada disponibilidad de evidencia nacional sobre el uso de bendamustina en México.

El uso de comparaciones indirectas es un método útil en la toma de decisiones en salud cuando no se dispone de evidencia directa, permitiendo evaluar alternativas terapéuticas a partir de estudios existentes. Sin embargo, este tipo de análisis puede introducir sesgos derivados de las diferencias en las características de las poblaciones, los protocolos terapéuticos y sistemas de salud, por lo que lo que deben considerarse al momento de interpretar los resultados obtenidos (Díaz et al., 2013).

Cabe señalar que los estudios internacionales corresponden a diferentes tipos de neoplasias, corresponden a la disponibilidad de evidencia reportada para cada esquema terapéutico con bendamustina. Por lo que la comparación no se planteó entre poblaciones homogéneas, sino como una integración de la mejor evidencia disponible para cada patología.

En el caso de la LLA, no se incluyeron estudios internacionales comparables debido a que la evidencia se limita principalmente a población pediátrica, lo cual no resulta directamente comparable con población adulta del estudio.

Posteriormente, a partir de la información obtenida en la tabla comparativa, se elaboró un árbol de decisión que incorporó las RAM identificadas, los costos asociados a los tratamientos y el número de ciclos de quimioterapia reportados en cada esquema terapéutico. Se utilizaron los datos correspondientes a México y Austria, priorizando la comparabilidad con el tipo de neoplasia y la población analizada, así como la claridad del modelo, evitando la incorporación de información redundante.

3. Resultados

El 75 % de la población de estudio fueron mujeres, el 60 % presentó comorbilidades preexistentes, entre las que destacan la diabetes mellitus tipo 2 (20 % de los pacientes) e hipertensión (32.5 % de los pacientes); Además, el 5 % de los individuos de estudio reportó antecedentes de adicción al alcohol y al tabaco. El 7.5 % de los pacientes interrumpieron sus ciclos de tratamiento debido al desabasto de ciclofosfamida en la institución.

En la Tabla 1 se representan los tipos de cáncer diagnosticados en la población de estudio; donde el CM fue el trastorno más frecuente (45 %), seguido del LNH (30 %) y la leucemia linfoblástica aguda fue el tercer padecimiento (25 %), así como los medicamentos administrados en cada condición.

Tabla 1. Tipos de cáncer en la población de estudio y tratamiento farmacológico. Elaboración propia con base en expedientes clínicos proporcionados por COFEPRIS (2023–2024)).

Tipo de cáncer	Pacientes (%)	Tratamiento farmacológico
Cáncer de mama	45	Ciclofosfamida
		Doxorrubicina
		Docetaxel
Linfoma no Hodgkin	30	Ciclofosfamida
		Doxorrubicina
		Vincristina
		Rituximab
Leucemia linfoblástica aguda	25	Prednisona
		Ciclofosfamida
		Vincristina

El CM ha sido de los tumores con mayor diagnóstico en el 2024, representando el 15.5 % de todos los casos nuevos de cáncer y un estimado del 7 % de todas las muertes por cáncer (National Cancer Institute, 2025); esto se correlaciona con el estudio del centro médico de México, donde el 45 % de casos de cáncer registrados en el periodo marzo 2023 - febrero 2024 corresponden a CM. En la Guía de Práctica Clínica (GPC) se menciona que, en el diagnóstico y tratamiento del CM, se recomienda la terapia anti-HER2 negativo durante un año (Instituto Mexicano del Seguro Social, 2017), donde los agentes quimioterapéuticos recomendados en la terapia de sistema adyuvante en etapa temprana es una combinación de doxorrubicina + ciclofosfamida (AC) y una combinación de docetaxel + ciclofosfamida (TC). Dicho esquema logra reducir aproximadamente un 26 % en el riesgo de recurrencia y una reducción del 31 % en la probabilidad de muerte (Bargalló-Rocha et al., 2024).

En la Tabla 2 se presenta la ORR, fue del 48 % para ciclofosfamida, resultante de los expedientes clínicos de los pacientes de estudio; y un 46 % para bendamustina (Rinnerthaler et al., 2021), cada una con un tamaño de muestra de 40 pacientes sometidos al tratamiento contra CM. El intervalo para ciclofosfamida fue de 32.5 % a 63.5 %, mientras que para bendamustina fue de 29.6 % a 60.4 %. La diferencia absoluta entre las tasas (2 %), se encuentra dentro de un margen de equivalencia aceptado clínicamente de ± 10 %. Este margen de ± 10 % ha sido ampliamente utilizado en ensayos de no inferioridad y estudios de equivalencia en oncología, y se considera apropiado para tasas de respuesta en CM (Cephalon, 2013). Dado que la diferencia observada no excede dicho umbral, puede concluirse que no existe una diferencia clínicamente significativa entre ambos tratamientos, lo que permite aplicar el AMC con base en la equivalencia terapéutica.

No obstante, es importante señalar que la ORR correspondiente a bendamustina proviene de un estudio realizado en un contexto clínico distinto, por lo que esta comparación corresponde a un análisis indirecto. Por lo tanto, puede introducir sesgos relacionados con variaciones en las características de la población, los protocolos terapéuticos y el sistema de salud. Sin embargo, en oncología es frecuente recurrir a evidencia indirecta cuando no se dispone de comparaciones directas, lo cual, aunque introduce incertidumbre, no invalida su utilidad para la toma de decisiones clínicas y económicas (Kemp & Prasad, 2017).

Tabla 2. Comparación de la ORR de la población de estudio. Un total de 40 pacientes con ciclofosfamida obtenidos de un estudio de México y 40 pacientes con bendamustina obtenidos en un estudio de Austria tomado de Rinnerthaler, et al.

Tratamiento	Tasa de Respuesta (ORR %)	IC95 %	Tamaño de muestra (pacientes)
Ciclofosfamida	48	32.5 – 63.5	40
Bendamustina	46	29.6 – 60.4	40

Después de demostrar, mediante fuentes clínicas confiables y el análisis de IC95 %, que la ciclofosfamida y la bendamustina presentan una eficacia terapéutica equivalente en pacientes con CM HER2-negativo, LNH y LLA, se procedió a aplicar la metodología del AMC, permitiendo enfocar la evaluación exclusivamente en el aspecto económico del tratamiento en la Tabla 3.

En la Tabla 3 el estudio se centró específicamente en el CM, donde los datos permitieron una comparación directa y la demostración de la equivalencia en términos de ORR y sus IC95 %. Si bien la ciclofosfamida se utiliza en los otros tipos de cáncer (LNH y LLA) en los expedientes clínicos, la comparación detallada de la equivalencia terapéutica entre ciclofosfamida y bendamustina en esos tipos específicos no fue el foco primario de la demostración de equivalencia en este estudio.

Tabla 3. Estimación del costo anual de tratamiento por ciclo en México 2025. *Precio obtenido de revisión en línea.

Medicamento	Dosis administrada (mg)	Costo (MXN)	Promedio de ciclos al año	Costo total por año (MXN)
Ciclofosfamida	1000	3,216.66*	5	16,083.33
Bendamustina	80	8,040.00*	8	64,320.00

Después de realizar el AMC, se observó que el precio para un tratamiento completo durante un año con ciclofosfamida es aproximadamente un 75 % menor al costo del tratamiento con bendamustina en el mismo periodo. Esta diferencia significativa en costos resalta la ventaja económica de la ciclofosfamida, especialmente considerando que, con base en los datos clínicos disponibles, ambos tratamientos presentan una eficacia terapéutica similar.

El hecho de que la bendamustina represente una carga económica sustancialmente mayor sin demostrar un beneficio clínico superior permite priorizar. Desde un enfoque de racionalidad farmacoeconómica, el uso de ciclofosfamida como alternativa preferente en pacientes con CM, LNH y LLA, cuando la decisión clínica lo permita.

No obstante, estos hallazgos deben interpretarse dentro del alcance del análisis realizado, ya que se consideraron únicamente los costos directos de los medicamentos, sin incluir costos asociados a la administración del tratamiento y monitoreo clínico. Estos factores pueden influir en la estimación del costo total en la práctica clínica.

A pesar de estas limitaciones, en el ámbito oncológico es común que las evaluaciones económicas se realicen con base en la mejor evidencia disponible, incluso cuando esta es parcial o proviene de contextos distintos, por lo que este tipo de análisis continúa siendo útil para orientar la toma de decisiones clínicas y la asignación eficiente de recursos (Kemp & Prasad, 2017).

En la Tabla 4 se presentan las RAM observadas en tres cohortes de pacientes: 40 pacientes diagnosticados con CM, LNH y LLA tratados con ciclofosfamida en un centro médico de México, así como 40 pacientes con CM en ocho centros médicos de Austria y 42 pacientes diagnosticados con LNH del hospital Sacré-Coeur de Montreal, Canadá; ambos en tratamiento con bendamustina (Chan et al., 2024).

En el primero grupo, las manifestaciones reportadas con frecuencia fueron náuseas (31 casos), seguidas de astenia y dolor abdominal (19 casos cada una). También se documentaron alopecia (13 casos) y disnea (8 casos), mientras que anemia, fatiga y gastroenteritis se presentaron en menor proporción.

En los pacientes que recibieron un tratamiento con bendamustina en los centros médicos de Austria, destacó principalmente la fatiga (29 casos), náuseas (19 casos) y neutropenia grado 3-4 (17 casos). Además, se observaron eventos de neutropenia grado 3-4, fiebre, tos y constipación en un número reducido de pacientes.

Por otro lado, en los pacientes con LNH tratados con bendamustina en Canadá, las RAM más reportadas fueron anemia (20 casos), náuseas (13 casos), fatiga y trombocitopenia grado 1 (11 casos cada una). Asimismo, se observaron eventos de neutropenia grado 3-4, fiebre, tos y constipación en un número reducido de pacientes.

En relación con los eventos adversos graves, el 17.5 % de los pacientes a los cuales se les brindó el tratamiento con ciclofosfamida (7 pacientes) requirió hospitalización, registrándose el fallecimiento de dos de ellos. Por otra parte, el 10 % de los pacientes que recibieron tratamiento con bendamustina, fueron hospitalizados por la manifestación de RAM graves sin registro de pacientes fallecidos. En el caso del hospital de Canadá, se documentó un fallecimiento durante el tratamiento, asociado a complicaciones derivadas de la progresión de la enfermedad oncológica (Chan et al., 2024).

La comparación de RAM entre los diferentes estudios debe interpretarse de RAM entre los diferentes estudios presenta limitaciones relacionadas con diferencias entre los criterios de registro, la clasificación de la toxicidad y el manejo clínico entre los distintos centros y países incluidos. Estas variaciones pueden influir en la frecuencia y tipo de RAM reportadas, lo cual constituye una limitación inherente a la comparación indirecta realizada.

Tabla 4. Reacciones adversas registradas en 40 pacientes del centro médico de México tratados con ciclofosfamida, 40 pacientes de ocho centros médicos de Austria (Rinnerthaler, et al.) y 42 pacientes del centro médico de Canadá (Chan, et al.); estos últimos tratados con bendamustina.

Reacciones adversas	Centro médico de México	Ocho centros médicos de Austria	Hospital Sacré-Coeur de Montréal, Canadá
Náuseas	31	19	13
Astenia	19	0	0
Anemia	5	10	20
Dolor abdominal	19	8	0
Gastroenteritis	2	0	0
Disnea	8	10	0
Constipación	0	6	2
Linfopenia	0	2	0
Alopecia	13	2	0
Trombocitopenia (Grado 1)	0	0	11
Neutropenia (Grado 3-4)	0	17	9
Fatiga	3	29	11
Fiebre	0	0	6
Tos	0	0	3
Muerte	2	0	1

Además de la identificación y comparación de las reacciones adversas a medicamentos, es fundamental evaluar la relación causal entre el fármaco y el evento observado, ya que no todos los eventos clínicos en pacientes oncológicos son atribuibles directamente al tratamiento. En la Tabla 5 se describen las características clínicas, los esquemas de tratamiento y la evaluación de causalidad de los eventos adversos en dos pacientes oncológicos diagnosticados con LNH y CM, tratados con esquemas quimioterapéuticos que incluyen ciclofosfamida. La relación causal de los eventos adversos fue determinada mediante los criterios establecidos por la OMS-UMC (Shukla et al., 2021).

Tabla 5. Evaluación de causalidad de RAM en dos pacientes oncológicos tratados con esquemas quimioterapéuticos basados en ciclofosfamida, analizados mediante criterios de la OMS-UMC.

Variable	Pacientes	
ID del paciente	P01	P02
Edad	67 años	51 años
Sexo	Masculino	Femenino
Diagnóstico	LNH	CM
Dosis / esquema	Rituximab 500 mg cada 30 días (3 ciclos) + ciclofosfamida 1000 mg cada 30 días (3 ciclos) + vincristina 2 mg cada 30 días (3 ciclos) + doxorubicina 70 mg cada 30 días (3 ciclos)	Ciclofosfamida 900 mg cada 20 días (5 ciclos) + docetaxel 108 mg cada 20 días (5 ciclos)
Fecha inicio fármaco	28/11/2023	9/3/2023
Fecha aparición evento	16/2/2024	11/3/2023
Fecha fallecimiento	17/2/2024	10/7/2023
Tipo de evento adverso	Insuficiencia respiratoria aguda secundaria a derrame pleural en paciente con linfoma no Hodgkin	Septicemia de origen no especificado con choque hipovolémico
Relación temporal (Sí/No/Desconocido)	Sí	Sí
Otras causas posibles (especificar)	Progresión del linfoma no Hodgkin, derrame pleural maligno, desnutrición	Diabetes mellitus tipo 2
Progresión de la enfermedad (Sí/No)	Sí	Sí
Otros medicamentos	Omeprazol, espironolactona, losartán	Metformina
Dechallenge (Positivo/Negativo/No evaluable)	No evaluable	No evaluable
Rechallenge (Positivo/Negativo/No evaluable)	No evaluable	No evaluable
Clasificación OMS-UMC	Posible	Posible

En ambos pacientes, las RAM se presentaron posterior a la administración del tratamiento quimioterapéutico, estableciendo una relación temporal compatible. En el paciente P01, la insuficiencia respiratoria aguda secundaria a derrame pleural ocurrió tras la administración de un esquema basado en rituximab, ciclofosfamida, vincristina y doxorrubicina; aunque el cuadro clínico puede explicarse por la progresión del linfoma no Hodgkin, el derrame pleural maligno y la desnutrición, no es posible descartar completamente la contribución del tratamiento antineoplásico.

De manera similar, en el paciente P02, la septicemia con choque hipovolémico se presentó posterior al tratamiento con ciclofosfamida y docetaxel, fármacos asociados con inmunosupresión y mayor riesgo de infecciones graves, lo que aporta credibilidad biológica al evento.

Cabe destacar que la ciclofosfamida fue el único fármaco presente en ambos esquemas terapéuticos, lo que podría sugerir un posible papel en la aparición de los eventos adversos; sin embargo, debido a la presencia de múltiples factores concomitantes y al uso de poliquimioterapia, no es posible establecer una relación causal directa. A pesar de la presencia de factores predisponentes como la diabetes mellitus tipo 2, no se puede excluir la participación del tratamiento quimioterapéutico en el desarrollo del evento. Por lo anterior, ambos casos se clasifican como posibles según los criterios de la OMS-UMC (Shukla et al., 2021).

Si bien, la optimización de costos en la quimioterapia es un factor clave en la sostenibilidad del sistema de salud, es fundamental considerar el impacto de las RAM para la seguridad del paciente. Dado que uno de los principales objetivos de la atención primaria, según la Agenda 2030, es crear nuevos conocimientos de manera global sobre los tratamientos médicos para reducir los daños asociados a la atención sanitaria (Astier-Peña et al., 2021). En la Figura 1 se muestra un árbol de decisiones de una evaluación comparativa entre la ciclofosfamida y la bendamustina considerando los ciclos al año, las RAM y los costos anuales de cada uno de los medicamentos.

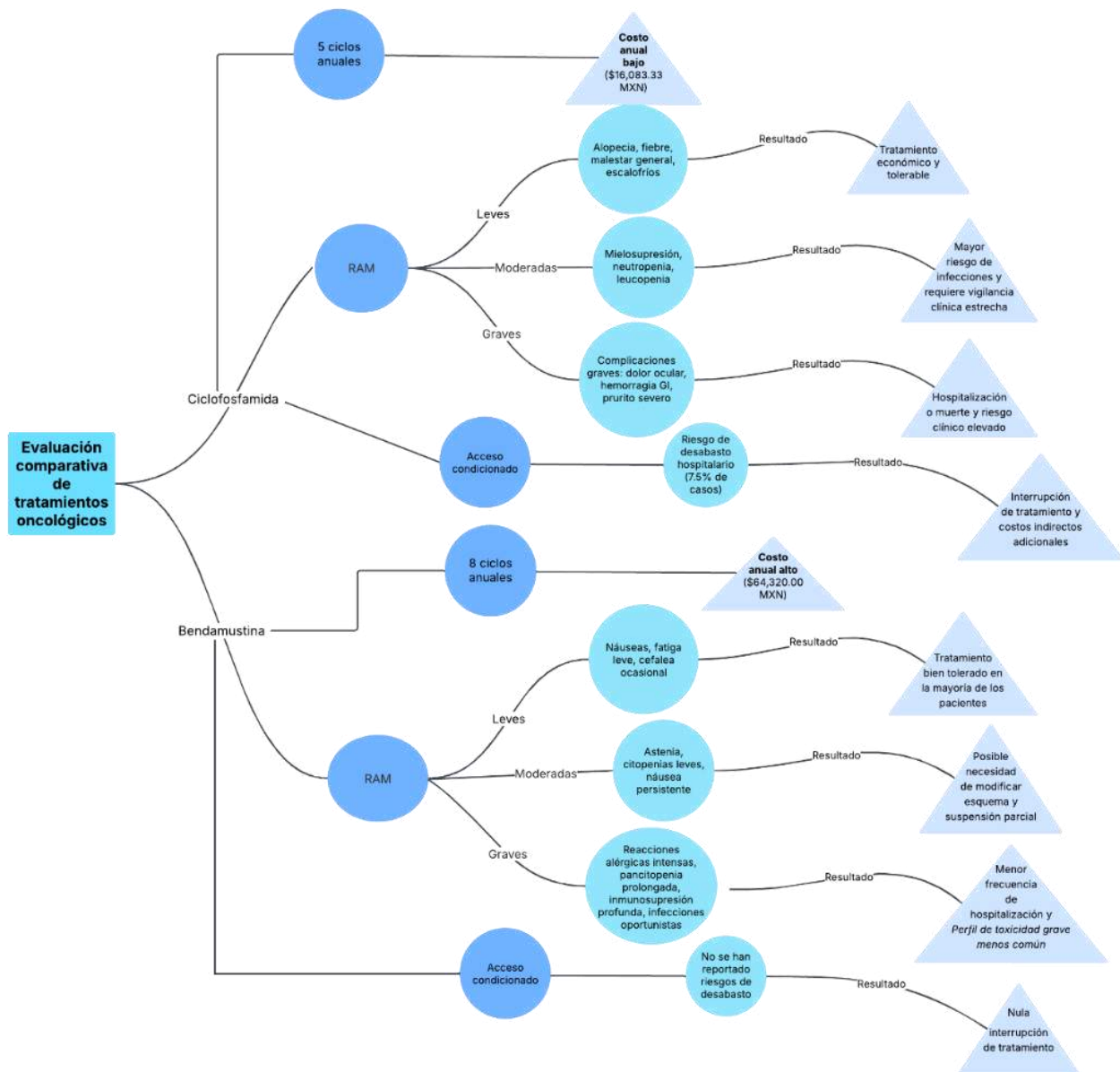


Figura 1. Comparación de la ciclofosfamida y la bendamustina en consideración con los ciclos al año, las RAM manifestadas y los costos anuales de cada uno.

Para el LNH, el tratamiento de primera línea es comprendido por un esquema de rituximab, ciclofosfamida, doxorubicina, vincristina y prednisona (también conocido como R-CHOP), durante 6 ciclos. Sin embargo, ensayos como el de BRIGHT indican una mayor seguridad con un régimen de bendamustina-rituximab (BR), durante 6 ciclos de tratamiento, a diferencia del perfil de seguridad del tratamiento con R-CHOP. Lo cual demuestra que el régimen BR es beneficioso frente a R-CHOP, al presentar una tasa de respuesta completa más alta (31 % vs 25%) y una tasa de respuesta global superior (97 % vs 91 %). Aunque su perfil de seguridad es distinto, con mayores incidencias de vómitos y reacciones de hipersensibilidad, también muestra menores incidencias de toxicidades como alopecia, neuropatía periférica, estomatitis e infecciones en comparación con R-CHOP, lo que respalda su favorable perfil terapéutico (Flinn et al., 2014).

Sin embargo, la interrupción en los ciclos de quimioterapia constituye un problema significativo en el tratamiento oncológico, siendo el desabasto de medicamentos una de las causas que impiden la continuidad terapéutica en algunos pacientes, reflejándose en el 7.5 % de los sujetos de estudio, a los cuales se les fueron interrumpida las terapias debido a la falta de ciclofosfamida del hospital. Cerca del 40 % de pacientes con CM en México sufren de desabasto y el no surtimiento de medicamentos en los hospitales, seguido de los pacientes con LLA y LNH, en donde la ciclofosfamida (IV, 500 mg), la vincristina (IV, 1 mg) y la doxorubicina (IV, 10 y 40 mg) son los medicamentos con mayor desabasto en el sector público y privado (Cero Desabasto, 2021). La deficiencia en el abasto de medicamentos genera un aumento en el gasto farmacéutico, dado que es necesario recurrir a opciones más costosas para suplir la falta del medicamento original (Fundación Salud por Derecho y la Organización de Consumidores y Usuarios, 2020).

La elección entre ciclofosfamida y bendamustina debe contemplar múltiples variables más allá de la eficacia clínica, la cual se ha establecido como equivalente. El análisis comparativo muestra que la ciclofosfamida representa una opción considerablemente más económica, con un costo anual cuatro veces menor; sin embargo, presenta una mayor frecuencia de RAM moderadas a graves, incluyendo eventos como hemorragia gastrointestinal y riesgo de hospitalización.

Por otro lado, la bendamustina, aunque más costosa y con un régimen de ciclos más prolongado, se asocia a un perfil de menor toxicidad, con una incidencia relativamente menor de RAM graves y sin evidencia de problemas de suministro en los centros donde fue evaluada.

No obstante, estos resultados deben interpretarse considerando que el análisis se basó en comparaciones indirectas entre estudios realizados en diferentes contextos clínicos, así como estimaciones de costos limitadas a los precios de los medicamentos y en un tamaño de muestra reducido, lo que puede influir en la comparabilidad y generalización de los hallazgos.

Por lo que, aunque la ciclofosfamida es viable desde una perspectiva de optimización de recursos, la bendamustina puede representar una alternativa preferente en pacientes con mayor susceptibilidad clínica o en contextos donde la seguridad del tratamiento es prioritaria.

4. Conclusión

La ciclofosfamida representa una alternativa con mayor accesibilidad económica, sin embargo, su uso se asocia con una mayor incidencia de RAM graves y un mayor riesgo de hospitalización. En contraste, la bendamustina presenta un perfil de tolerabilidad más favorable y menor frecuencia de complicaciones clínicas, aunque con un costo significativamente superior. En este escenario, la ciclofosfamida podría considerarse en escenarios con limitaciones presupuestarias y bajo una vigilancia clínica minuciosa; no obstante, factores como el desabasto hospitalario puede provocar interrupciones en la continuidad terapéutica, por lo que debe ser considerado en la toma de decisiones. Por su parte, la bendamustina podría ser preferible en pacientes con mayor riesgo de complicaciones o cuando se priorice la seguridad y continuidad del tratamiento.

La interpretación de los resultados se encuentra condicionados por el diseño del estudio, particularmente por el uso de comparaciones indirectas, el tamaño de muestra y la estimación de costos basada únicamente en precios de medicamentos, lo que puede limitar su generalización.

Por lo que, los resultados aportan evidencia útil para la toma de decisiones clínicas y farmacoeconómicas; sin embargo, no son suficientes para proponer modificaciones en las GPC actuales, y su aplicabilidad puede verse limitada por factores como el desabasto de medicamentos.

5. Agradecimientos

El primer autor agradece a los profesores del Laboratorio de Biología Molecular y Farmacogenómica por haber instruido durante la elaboración del artículo y a los miembros de la Dirección de Protección contra Riesgos Sanitarios por su colaboración en los datos otorgados.

6. Conflicto de intereses

“Los autores declaran no tener conflictos de intereses”

8. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

“Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos”.

9. Resumen Grafico



10. Roles de contribución

ROL	AUTORES(AS)
Conceptualización	Díaz-Martínez, I. G., García-Jesús K. P.
Curación de datos	Díaz-Martínez, I. G.
Análisis formal	Díaz-Martínez, I. G., Pedraza-Montero P.
Adquisición de fondos	No aplica.
Investigación	Díaz-Martínez, I. G., Vázquez-Cahuich D. A.
Metodología	Pedraza-Montero P.
Administración del proyecto	No aplica
Recursos	Castro-Georgana V. F., García-Jesús K. P.
Software	Díaz-Martínez, I. G., De la Cruz-López J. J.
Supervisión	Castro-Georgana V. F., Flores-Dorantes M. T.
Validación	García-Jesús K. P., Castro-Georgana V. F.
Visualización	Díaz-Martínez, I. G., De la Cruz-López J. J.
Escritura-borrador-original	Díaz-Martínez, I. G., Pedraza-Montero P.
Escritura-revisión-edición	Díaz-Martínez, I. G., Pedraza-Montero P.

11. Referencias

- [1] Alonso Castellanos, S., Soto Célix, M., Alonso Galarreta, J., del Riego Valledor, A., & de la Torre, A. M. (2014). Efectos adversos metabólicos y nutricionales asociados a la terapia biológica del cáncer. *Nutrición Hospitalaria*, 29(2), 259–268. <https://doi.org/10.3305/NH.2014.29.2.7023>
- [2] Asociación Médica Mundial. (2013). *Declaración de Helsinki. Antecedentes y posición de la Comisión Nacional de Bioética*.
- [3] Astier-Peña, M. P., Martínez-Bianchi, V., Torijano-Casalengua, M. L., Ares-Blanco, S., Bueno-Ortiz, J. M., & Fernández-García, M. (2021). El Plan de acción mundial para la seguridad del paciente 2021-2030: identificando acciones para una atención primaria más segura. *Atención Primaria*, 53(Suppl 1), 102224. <https://doi.org/10.1016/J.APRIM.2021.102224>
- [4] Aykan, N. F., & Özatlı, T. (2020). Objective response rate assessment in oncology: Current situation and future expectations. *World Journal of Clinical Oncology*, 11(2), 53. <https://doi.org/10.5306/WJCO.V11.I2.53>
- [5] Bargalló-Rocha, J. E., Aguilar-Villanueva, S., Ahumada-Pámanes, C., Arce-Salinas, C., Álvarez-Cano, A., Baley-Spindel, I., Bautista-Piña, V., Cervantes-Sánchez, G., Chávez-Macgregor, M., Esparza-Arias, N., Figueroa-Padilla, J., Flores-Balcázar, C. H., Flores-Moreno, S. M., Maffuz-Aziz, A., Maldonado-Magos, F., Del, M., Lara-Tamburrino, C., Lluch-Hernández, A., Navarro-Santiesteban, S., ... Mexicana De Oncología, G. (2024). Consenso mexicano de cáncer mamario. Manejo del cáncer de mama temprano. *Gaceta Mexicana de Oncología*, 23(1), 30–61. <https://doi.org/10.24875/j.gamo.M24000261>
- [6] Cephalon. (2013). *Treanda (bendamustine hydrochloride) for injection, for intravenous infusion*. https://www.accessdata.fda.gov/drugsatfda_docs/label/2013/022249s014lbl.pdf
- [7] Cero Desabasto. (2021). *Mapeando el desabasto en México: Reporte de la plataforma Cero Desabasto 2020*. <https://cdn-yeeko.s3.amazonaws.com/assets/Informe+anual+2020.pdf>
- [8] Chan, T., Champagne, J.-N., & Boudreault, J.-S. (2024). Efficacy and safety of bendamustine-rituximab as frontline therapy for indolent non-Hodgkin lymphoma: A real-world, single-center, retrospective study. *Cureus*, 16(8). <https://doi.org/10.7759/CUREUS.66124>

- [9] Chopra, D., Rehan, H. S., Sharma, V., & Mishra, R. (2016). Chemotherapy-induced adverse drug reactions in oncology patients: A prospective observational survey. *Indian Journal of Medical and Paediatric Oncology*, 37(1), 42. <https://doi.org/10.4103/0971-5851.177015>
- [10] Díaz, L. M. R., Quevedo, H. M. P., Patarroyo, P. A. M., Alvarado, P. C., Alfonso-Cristancho, R., & Quintana, G. (2013). Comparaciones indirectas: una herramienta para la toma de decisiones en salud. *Revista Colombiana de Reumatología*, 20(3), 128–140. [https://doi.org/10.1016/S0121-8123\(13\)70125-7](https://doi.org/10.1016/S0121-8123(13)70125-7)
- [11] Flinn, I. W., Van Der Jagt, R., Kahl, B. S., Wood, P., Hawkins, T. E., MacDonald, D., Hertzberg, M., Kwan, Y. L., Simpson, D., Craig, M., Kolibaba, K., Issa, S., Clementi, R., Hallman, D. M., Munteanu, M., Chen, L., & Burke, J. M. (2014). Randomized trial of bendamustine-rituximab or R-CHOP/R-CVP in first-line treatment of indolent NHL or MCL: The BRIGHT study. *Blood*, 123(19), 2944. <https://doi.org/10.1182/BLOOD-2013-11-531327>
- [12] Fundación Salud por Derecho y la Organización de Consumidores y Usuarios. (2020). *El desabastecimiento y la escasez de medicamentos: Análisis y recomendaciones de la campaña No es Sano*. https://www.medicosdelmundo.org/app/uploads/old/sites/default/files/informe_desabastecimientos_nes.pdf
- [13] González-Robledo, M. C., Wong, R., Ornelas, H. A., & Knaul, F. M. (2015). Costs of breast cancer care in Mexico: Analysis of two insurance coverage scenarios. *Ecancermedicalscience*, 9. <https://doi.org/10.3332/ECANCER.2015.587>
- [14] Hammann, F., Gutmann, H., Vogt, N., Helma, C., & Drewe, J. (2010). Prediction of adverse drug reactions using decision tree modeling. *Clinical Pharmacology & Therapeutics*, 88(1), 52–59. <https://doi.org/10.1038/CLPT.2009.248>
- [15] Hashim, M., Vincken, T., Kroi, F., Gebregergish, S., Spencer, M., Wang, J., Kampfenkel, T., Lam, A., & He, J. (2021). A systematic review of noninferiority margins in oncology clinical trials. *Journal of Comparative Effectiveness Research*, 10(6), 443–455. <https://doi.org/10.2217/CER-2020-0200>
- [16] Hazra, A. (2017). Using the confidence interval confidently. *Journal of Thoracic Disease*, 9(10), 4125. <https://doi.org/10.21037/jtd.2017.09.14>
- [17] Herold, M., Schulze, A., Niederwieser, D., Franke, A., Fricke, H. J., Richter, P., Freund, M., Ismer, B., Dachselt, K., Boewer, C., Schirmer, V., Weniger, J., Pasold, R., Winkelmann, C., Klinkenstein, C., Schulze, M., Arzberger, H., Bremer, K., Hahnfeld, S., Schwarzer, A., ... Müller, C. (2006). Bendamustine, vincristine and prednisone (BOP) versus cyclophosphamide, vincristine and prednisone (COP) in advanced indolent non-Hodgkin's lymphoma and mantle cell lymphoma: Results of a randomised phase III trial (OSHO# 19). *Journal of Cancer Research and Clinical Oncology*, 132(2), 105–112. <https://doi.org/10.1007/s00432-005-0023-2>
- [18] Instituto Mexicano del Seguro Social. (2017). *Guía de Práctica Clínica: Tratamiento del cáncer de mama en segundo y tercer nivel de atención* (pp. 37–40). <http://www.cenotec.salud.gob.mx/contenidos/gpc/catalogoMaestroGPC.html>
- [19] Kemp, R., & Prasad, V. (2017). Surrogate endpoints in oncology: When are they acceptable for regulatory and clinical decisions, and are they currently overused? *BMC Medicine*, 15(1), 134. <https://doi.org/10.1186/s12916-017-0902-9>
- [20] Lalic, H., Aurer, I., Batinic, D., Visnjic, D., Smoljo, T., & Babic, A. (2022). Bendamustine: A review of pharmacology, clinical use and immunological effects. *Oncology Reports*, 47(6), 114. <https://doi.org/10.3892/OR.2022.8325>
- [21] National Cancer Institute. (2025). *Datos estadísticos sobre el cáncer: Cáncer de mama femenino*. SEER. <https://seer.cancer.gov/statfacts/html/breast.html>

- [22] Pan, W. (2002). Approximate confidence intervals for one proportion and difference of two proportions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 40(1), 143–157. [https://doi.org/10.1016/S0167-9473\(01\)00107-4](https://doi.org/10.1016/S0167-9473(01)00107-4)
- [23] Pirvulescu, C., Von Minckwitz, G., & Loibl, S. (2008). Bendamustine in metastatic breast cancer: An old drug in new design. *Breast Care*, 3(5), 333. <https://doi.org/10.1159/000154105>
- [24] Rinnerthaler, G., Gampenrieder, S. P., Petzer, A., Hubalek, M., Petru, E., Sandholzer, M., Andel, J., Balic, M., Melchardt, T., Hauser-Kronberger, C., Schmitt, C. A., Ulmer, H., & Greil, R. (2021). Capecitabine in combination with bendamustine in pretreated women with HER2-negative metastatic breast cancer: Results of a phase II trial (AGMT MBC-6). *Therapeutic Advances in Medical Oncology*, 13, 17588359211042300. <https://doi.org/10.1177/17588359211042301>
- [25] Secretaría de Salud. (2023). *México registra al año más de 195 mil casos de cáncer: Secretaría de Salud*. Gobierno de México. <https://www.gob.mx/salud/prensa/294-mexico-registra-al-ano-mas-de-195-mil-casos-de-cancer-secretaria-de-salud>
- [26] Secretaría de Salud. (2025). *Guía metodológica de notificación/reporte estimulado para unidades de farmacovigilancia del Sistema Nacional*. COFEPRIS.
- [27] Shukla, A. K., Jhaj, R., Misra, S., Ahmed, S. N., Nanda, M., & Chaudhary, D. (2021). Agreement between WHO-UMC causality scale and the Naranjo algorithm for causality assessment of adverse drug reactions. *Journal of Family Medicine and Primary Care*, 10(9), 3303. https://doi.org/10.4103/jfmmpc.jfmmpc_831_21
- [28] Stork, C. M., & Schreffler, S. M. (2023). Cyclophosphamide. *Encyclopedia of Toxicology* (4th ed., Vol. 3, pp. 417–421). <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-824315-2.00542-X>
- [29] Velásquez, C. A., González, M., Berrouet, M. C., & Jaramillo, N. (2016). Cardiotoxicidad inducida por la quimioterapia desde las bases moleculares hasta la perspectiva clínica. *Revista Colombiana de Cardiología*, 23(2), 104–111. <https://doi.org/10.1016/j.rccar.2015.10.002>

Estimación de la presión en atmósferas planetarias mediante gradientes de temperatura constante y lineal

Estimating pressure in planetary atmospheres using constant and linear temperature gradients

Rendón, Francisco^{1,*} , Pulido-Guerrero, Rosalía¹ ,
Munguía, Eréndira¹ 

¹*Instituto de Agroingeniería de la Universidad del Papaloapan*

*frendon@unpa.edu.mx

Resumen

Algunos planetas y lunas están envueltos en una mezcla de gases en diferentes composiciones físico-químicas denominada atmósfera. Una propiedad importante de las atmósferas es la presión y como una primera aproximación para estudiarlas se utiliza la ecuación de los gases ideales a temperatura constante. En esta investigación se presentan cuatro modelos de la variación de la presión atmosférica respecto a la altura, considerando la ecuación de los gases ideales y la ecuación de van der Waals a las que se les acopla un gradiente de temperatura constante y uno lineal ($T = T_0 - \alpha y$). Los cuatro modelos se implementan para estudiar la variación de la presión respecto a la altura en los planetas Tierra, Venus y Marte y la luna Titán. Para el caso de la Tierra, se encontró que el modelo que mejor se ajusta con datos medidos por radiosonda es aquel en el que se implementa la ecuación los gases ideales acoplada al gradiente de temperatura lineal.

Palabras claves: presión, atmósferas planetarias, ecuación de los gases ideales, ecuación de van der Waals, modelación matemática

Abstract

Some planets and moons are enveloped in an atmosphere which is a mixture of gases with different physical and chemical compositions. Pressure is an important property of atmospheres, and the ideal gas equation at constant temperature is used as a first approximation to study them. In the current research we present 4 models of atmospheric pressure. We considered the ideal gas and the van der Waals equations coupled with a constant and a linear temperature gradient: ($T = T_0 - \alpha y$). Our models were implemented to study the variation in pressure with respect to altitude on the planets Earth, Venus, and Mars, and on the moon Titan. In the case of Earth, we found that the model that best fits data measured by meteorological stations is the one that implements the ideal gas equation coupled with a linear temperature gradient.

Keywords: pressure, planetary atmospheres, ideal gas equation, van der Waals equation, mathematical modelling

Recibido: 16 de octubre de 2025. Aceptado: 12 de julio de 2026. Publicado: 31 de agosto de 2026

1. Introducción

Una atmósfera planetaria es una mezcla de gases atraídos gravitacionalmente a un foco de masa suficientemente dominante al que envuelven, y que no es barrida completamente por el viento estelar [1]. Debido a esto, tales núcleos pueden desarrollarse a partir de nubes moleculares interestelares dentro de discos protoplanetarios [2] dando lugar a objetos astronómicos rocosos con atmósferas de espesor variable o gigantes gaseosos mejor conocidos como planetas, los cuales pueden estar ligados gravitacionalmente a otros objetos orbitantes de menor tamaño llamados lunas.

En el Sistema Solar existen 8 planetas y más de 160 lunas. Entre los planetas, solo Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, así como la luna Titán (Saturno), tienen una atmósfera significativa (véase la Tabla 1). Aunque las lunas Tritón (Neptuno) y Ganímedes (Júpiter) también poseen atmósferas, estas son muy tenues [3].

Tabla 1: Composición química de las atmósferas para objetos del Sistema Solar. [3]

Objeto	Masa[kg]	CO ₂	N ₂	O ₂	Ar	CH ₄	Na	H ₂	He	Otros
Mercurio	1000			42 %			22 %	22 %	6 %	8 %
Venus	4.8×10^{20}	96 %	3 %							
Tierra	1.4×10^{21}		78 %	21 %	1 %					<1 %
Marte	2.5×10^{16}	95.3 %	2.7 %		1.7 %					0.7 %
Júpiter	1.9×10^{27}							> 87 %	>12 %	
Saturno	5.4×10^{26}							90 %	5 %	5 %
Urano	8.6×10^{25}					2 %		83 %	15 %	
Neptuno	1.0×10^{26}					2 %		84 %	12 %	2 %
Titán	1.345×10^3		95 %			5 %				

Existen dos variables termodinámicas muy importantes en el estudio de las atmósferas planetarias: la presión, P , y la temperatura, T . Estas se relacionan física y matemáticamente mediante una ecuación de estado. Como por ejemplo, la ecuación de los gases ideales [4], en la que se considera que las partículas son puntuales y no existe interacción entre ellas:

$$PV = nRT, \quad (1)$$

donde n es el número de moles de sustancia contenido en el volumen V , y $R = 8.314462\text{J/mol} \cdot \text{K}$ es la constante de los gases ideales en unidades del Sistema Internacional de Unidades (SI).

Una ecuación de estado más realista es la ecuación de van der Waals [4], ya que considera el volumen de las moléculas y las fuerzas intermoleculares entre ellas

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \quad (2)$$

donde la constante b representa aproximadamente el volumen de un mol de moléculas, mientras que la constante a depende de las fuerzas de atracción intermoleculares; estas constantes son diferentes para cada gas y se han determinado experimentalmente, lo cual vuelve empírica a la ecuación.

Cuando se tiene una mezcla de diferentes gases, se puede calcular un *promedio* de las constantes a y b de la ecuación de van der Waals siguiendo la propuesta presentada en [5]

$$a = \left(\sum_{i=1} x_i a_i^{1/2} \right)^2, \quad (3)$$

y

$$b = \sum_{i=1} x_i b_i, \quad (4)$$

donde a_i , b_i son las constantes de van der Waals de la i -ésima especie de la mezcla, mientras que x_i es la fracción molar de dicha especie.

2. Ecuación de la presión de un fluido en términos de la altura

Considérese un fluido (gas) uniforme, es decir, tanto la densidad (ρ) como la aceleración debida a la gravedad (g) tienen el mismo valor en todo el fluido. Si el fluido está en equilibrio, cada elemento de volumen está en equilibrio. Ahora, considere un elemento de volumen dV , de área A y anchura dy , como se muestra en la Figura 1. Las superficies interior y superior que tienen área A están a distancias y y $y + dy$, respectivamente, por arriba de algún nivel de referencia donde $y = 0$. El volumen del elemento de fluido es $dV = A dy$, su masa es $dm = \rho dV = \rho A dy$, y su peso es $dw = dm g = \rho g A dy$.

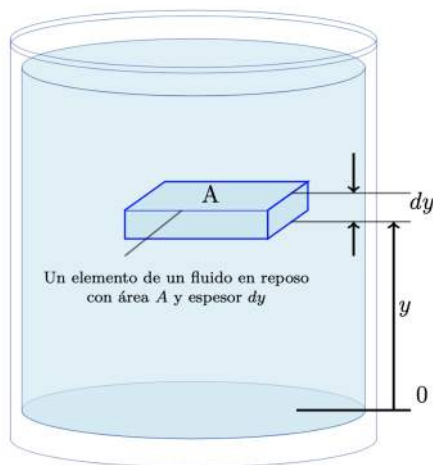


Figura 1: Elemento de volumen de un fluido en reposo.

Las fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen se muestran en la Figura 2. Sea P la presión en la superficie inferior; luego, a componente y de fuerza total hacia arriba que actúa sobre dicha superficie es PA . La presión en la superficie es $P + dP$, y la componente y de fuerza total (hacia abajo) sobre esta superficie es $-(P + dP)A$. Como el elemento de fluido está en equilibrio, la componente y de fuerza total, incluyendo el peso y las fuerzas en las superficies superior e inferior, debe ser cero.

Así, por la primera ley de Newton se tiene que $\sum F_y = 0$, es decir,

$$PA - (P + dP)A - \rho g A dy = 0.$$

Reorganizado términos, se sigue que el cambio de la presión respecto a la altura es:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g. \quad (5)$$

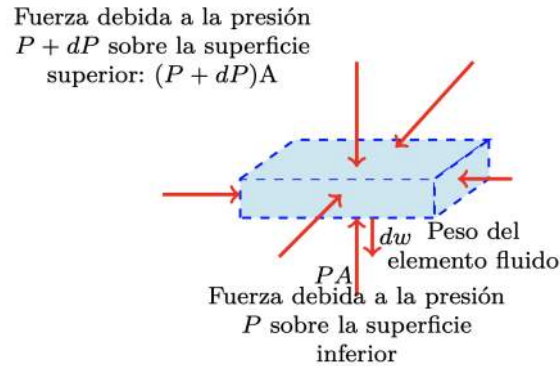


Figura 2: fuerzas que actúan en un elemento de fluido dV en equilibrio.

2.1. Ecuación diferencial de la presión para gases ideales

Dado que, el número de moles se define como $n = m/M$, donde m es la masa y M la masa molar, y que la densidad se define como $\rho = m/V$, se sigue de la ecuación (1) que

$$\rho = \frac{MP}{RT}.$$

Así, de la ecuación (5) se obtiene una ecuación diferencial que modela la variación de la presión en términos de la altura, es decir,

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{MgP}{RT}. \quad (6)$$

Por otro lado, si se considera que la temperatura varía linealmente con la altura de forma tal que

$$T = T(y) = T_0 - \alpha y, \quad (7)$$

donde T_0 es la temperatura de la superficie del planeta (o luna) y α es un promedio del gradiente de temperatura, la ecuación (6) se reescribe como

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{MgP}{R(T_0 - \alpha y)}. \quad (8)$$

2.2. Ecuación diferencial de la presión para gases reales

Implementando la definición de número de mol y de densidad, se sigue que para el caso de la ecuación de van der Waals (ecuación (2)), la densidad se puede expresar de la siguiente manera

$$\rho = \frac{V^2PM + Man^2}{V^2(RT + Pb) + abn^2}. \quad (9)$$

Luego, de la ecuación (5) se obtiene la variación de la presión respecto a la altura

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{(V^2MP + an^2M)g}{V^2(RT + Pb) + abn^2}. \quad (10)$$

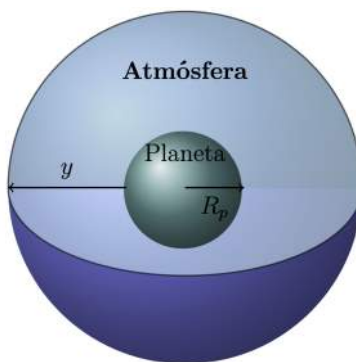


Figura 3: Volumen de la atmósfera a cierta altura y .

Ahora, si se toma en cuenta un gradiente de temperatura como el definido por la ecuación (7), la variación de la presión en términos de la altura se puede expresar como

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{(V^2MP + an^2M)g}{V^2[R(T_0 - \alpha y) + Pb] + abn^2}. \quad (11)$$

El volumen considerado en las ecuaciones (10) y (11) es el que se forma desde la superficie del cuerpo celeste hasta cierta altura y , como se observa en la Figura 3. Este se calcula como la diferencia entre el volumen de dos esferas concéntricas de radios $R_p + y$ y R_p , es decir,

$$V(y) = \frac{4\pi}{3} [(R_p + y)^3 - R_p^3], \quad (12)$$

donde R_p es el radio del cuerpo celeste y y es la altura medida sobre su superficie.

3. Soluciones de las ecuaciones diferenciales de la presión

3.1. Gases ideales: Soluciones analíticas

Considerando que para $y = 0$ (nivel del mar) la presión es $P = P_0$, por integración directa de la ecuación (6), se sigue que la presión en términos de la altura, considerando un gradiente de temperatura constante, se puede calcular como

$$P(y) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}y\right). \quad (13)$$

Análogamente, al integrar la ecuación (8), se obtiene que la presión en términos de la altura, considerando un gradiente de temperatura lineal, se puede calcular como

$$P(y) = P_0 \left(1 - \frac{\alpha y}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{R\alpha}}. \quad (14)$$

Las ecuaciones (13) y (14) representan a los Modelos I y II, respectivamente. Las constantes planetarias *a nivel del suelo*: presión, P_0 , temperatura, T_0 , y densidad, ρ_0 , así como gravedad, g y el radio, R_p , de los cuerpos celeste son tomadas de [6], y se enlistan en la Tabla 2.

Tabla 2: Constantes planetarias.

Cuerpo	T_0 [K]	g [m/s ²]	P_0 [Pa]	R_p [m]	ρ_0 [kg/m ³]
Venus	713.15	8.9	9.2×10^6	6052000	65
Tierra	288.15	9.81	101325	6378000	1.225
Marte	208.15	3.7	1000	3396000	0.020
Titán	93.7	1.37	150000	1222116	5.3

3.2. Gases reales: Soluciones numéricas

Las ecuaciones (10) y (11) no tienen solución analítica, estas se resuelven de manera numérica implementando la función `solve_ivp` del subpaquete `integrate` de la librería `scipy` [8] de PYTHON. El algoritmo de integración que se implementa en esta función es el Runge-Kutta de orden 5, y se toma como condición inicial $P(0) = P_0$. Las ecuaciones (10) y (11) representan a los Modelos III y IV, respectivamente.

4. Indicadores estadísticos de validación de modelos

Para una muestra de N observaciones O_i y sus correspondientes predicciones P_i , obtenidas a través de un modelo, el *error absoluto medio* (MAE) y la *raíz del error cuadrático medio* (RMSE) son

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |P_i - O_i|, \quad (15)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i - O_i)^2}. \quad (16)$$

Si bien, ambos indicadores se han utilizado para evaluar el rendimiento de modelos durante muchos años, no existe consenso sobre la métrica más apropiada para los errores de los modelos [7]. Por lo que se complementan con tres indicadores sugeridos en [9], que se utilizan principalmente para medir qué tan bien coinciden los valores predichos por un modelo climático, ambiental o hidrológico con los datos observados.

El índice *índice de coincidencia* (d) es una medida estandarizada del grado de error de predicción del modelo. Se calcula como se muestra en la ecuación (17):

$$d = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (P_i - O_i)}{\sum_{i=1}^N (|P_i - \bar{P}| + |O_i - \bar{O}|)^2}, \quad (17)$$

donde $\bar{P}$ y $\bar{O}$ son las medias de los datos predichos y observados, respectivamente. Este índice es adimensional y varía entre 0 y 1. Un valor de 1 indica una coincidencia perfecta, y 0 indica que no hay ninguna coincidencia [10].

El *coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe* (NSE) mide la magnitud relativa de la varianza residual en comparación con la varianza de los datos observados, lo que indica qué tan bien se ajusta una gráfica de datos observados frente a datos predichos a la línea 1:1. Se calcula como se muestra en la ecuación (18)

$$\text{NSE} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (P_i - O_i)^2}{\sum_{i=1}^N (O_i - \bar{O})^2}. \quad (18)$$

Este coeficiente varía entre $-\infty$ y 1; y cuanto más cerca de 1, más preciso es el modelo. $\text{NSE} = 1$ corresponde a una coincidencia perfecta entre el modelo y los datos observados. $\text{NSE} = 0$ indica que las predicciones del modelo son tan precisas como la media de los datos observados. $-\infty < \text{NSE} < 0$ indica que la media observada es un mejor predictor que el modelo [11].

El *sesgo porcentual* (PBIAS) mide la tendencia promedio de los valores predichos a ser mayores o menores que los observados. Se calcula mediante la ecuación (19):

$$\text{PBIAS} = 100 \frac{\sum_{i=1}^N (P_i - O_i)}{\sum_{i=1}^N O_i}. \quad (19)$$

El valor óptimo de PBIAS es 0, y los valores de baja magnitud indican una predicción precisa del modelo. Los valores positivos indican un sesgo de sobreestimación, mientras que los valores negativos indican un sesgo de subestimación del modelo [12, 13]. Los valores de PBIAS pueden interpretarse como *muy bueno* si $|\text{PBIAS}| < 10\%$, *bueno* si $10\% < |\text{PBIAS}| < 15\%$, e *insatisfactorio* si $|\text{PBIAS}| > 25\%$ [9].

5. Resultados: datos reales vs. modelos

Se presentan cuatro modelos diferentes para estimar la presión en atmósferas planetarias. Los Modelos I y II tienen solución analítica, mientras que los Modelos III y IV se resuelven numéricamente:

Modelo I: Ecuación de estado de los gases ideales acoplada a un gradiente de temperatura constante cuya solución analítica viene dada por la ecuación (13).

Modelo II: Ecuación de estado de los gases ideal acoplada a un gradiente de temperatura lineal, cuya solución analítica está dada por la ecuación (14).

Modelo III: Ecuación de estado de van der Waals acoplada a un gradiente de temperatura constante. Este modelo no tiene solución analítica (véase la ecuación (10)).

Modelo IV: Ecuación de estado de van der Waals acoplada a un gradiente de temperatura lineal. Este modelo no tiene solución analítica (véase la ecuación (11)).

En la Tabla 3 se presentan los valores de las constantes a y b de la ecuación de van der Waals para una mezcla de gases, así como los valores de la masa molar, M , requeridos en los modelos. Estos se calcularon de acuerdo a la composición química de las atmósferas planetarias que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 3: Constantes de van der Waals y masa molar M de las atmósferas planetarias

Cuerpo	$a[10^5 \text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{kmol}^{-2}]$	$b[\text{m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}]$	$M[\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}]$
Venus	3.4070	0.0421	0.04345
Tierra	1.3828	0.0375	0.02857
Marte	3.4182	0.0423	0.04270
Titán	1.4227	0.0393	2.74115

5.1. Comparación de los modelos para el planeta Tierra

5.1.1. Recopilación de datos

Para discernir cuál de los cuatro modelos se ajusta mejor a las condiciones atmosféricas reales del planeta Tierra, se compararon los datos arrojados por los modelos con mediciones recopiladas por Radiosonda, en concreto la radiosonda con clave 76805 que se lanza desde la Ciudad de Acapulco, Guerrero, México, a 3 m sobre el nivel del mar. Los datos se encuentran disponibles en el Directorio de Datos de Sondeo del Archivo Global Integrado de Radiosondeos (IGRA por sus siglas en inglés) de la Oficina Nacional de Administración Oceánica y Atmosférica (NOAA por sus siglas en inglés) [14]. La fecha y lanzamiento utilizados son los de 30 de junio de 2025 a las 12:00 UTC. Además, se implementó un gradiente de temperatura $\alpha = 6.5 \times 10^{-3} \text{ K km}^{-1}$ [15] para los Modelos II y IV.

5.1.2. Comparación de modelos

En la Figura 4 se muestran las curvas obtenidas, *presión* vs. *altura*, de los modelos descritos previamente, así como los datos medidos por la radiosonda 76805 el 2 de febrero de 2025. Se puede observar, cualitativamente, que el Modelo II es el que mejor se ajusta a tales mediciones. Cabe mencionar que se realizó un análisis similar para datos medidos el 1 de enero de 2000, el 7 de enero de 2005 y el 9 de enero de 2024, obteniéndose resultados muy similares a los presentados en la Figura 4.

En la Tabla 4 se muestran los valores del MSE, el RMSE, el índice d , el NSE y el PBIAS para la comparación de los cuatro modelos y los datos observados. Los cálculos de estos indicadores se realizan implementado la paquetría `hydroGOF` [16] de R Studio.

El Modelo II posee los valores más pequeños de MAE y RMSE, mientras que el Modelo III es el que presenta los valores más grandes. Esto implica que, según estos indicadores, el Modelo II es mejor que los Modelos I, III y IV. Asimismo, el Modelo II posee un índice de coincidencia d muy próximo a 1, lo que indica que la predicción de este modelo es muy buena. El NSE del Modelo II es el mejor, esto se puede observar en la Figura (5), donde se muestra como los datos predichos y observados se ajustan, casi perfectamente, a la línea 1:1; mientras que existe una mayor dispersión para el Modelo III. Finalmente, para el Modelo II se observa que $|\text{PBIAS}| < 10\%$, lo que indica que el modelo es muy bueno, pese a que los datos predichos son mayores a los observados, ya que $\text{PBIAS} < 0$; en contra parte, el Modelo III es el más insatisfactorio de todos, ya que $|\text{PBIAS}| > 25\%$.

De acuerdo con los indicadores mostrados en la Tabla 4, el Modelo I también muestra un buen desempeño. Tanto el índice d como el NSE están muy cerca de 1.0, y el $|\text{PBIAS}| < 10\%$. Sin embargo, en este modelo se asume que la temperatura de la atmósfera terrestre es constante, lo cual es físicamente inconsistente, ya que la temperatura de la atmósfera varía según sus capas.

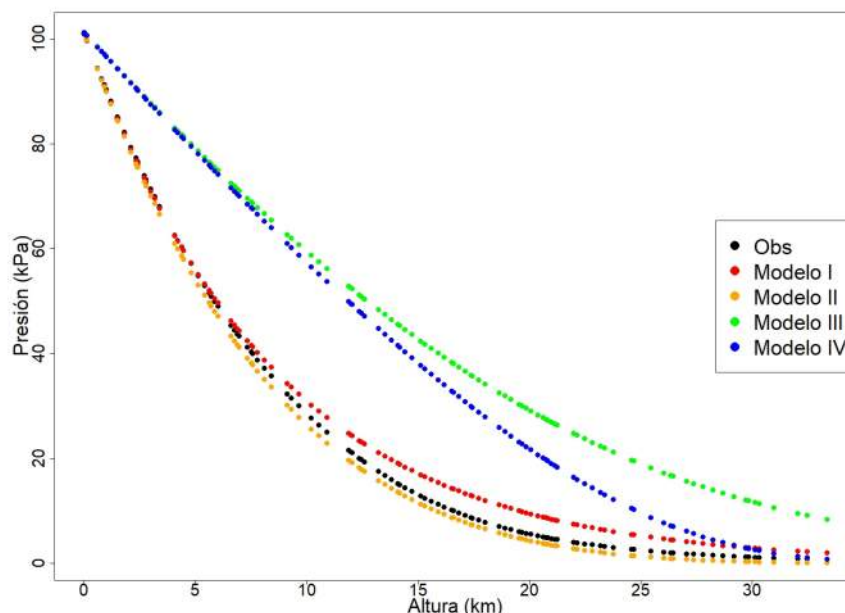


Figura 4: Gráfica altura vs. presión con datos observados y predichos por los modelos.

Tabla 4: Indicadores estadísticos para la comparación de datos predichos con datos observados por la Radiosonda el 2 de febrero de 2025.

Modelo	MAE [kPa]	RMSE [kPa]	d	NSE	PBIAS[%]
I	1.48829	2.66566	0.99807	0.99261	7
II	1.15912	1.43824	0.99946	0.99785	-4.4
III	4.56886	22.5735	0.87615	0.47040	69.2
IV	4.08679	19.0534	0.91522	0.62269	54.9

5.2. Modelación de la presión atmosférica en Venus, Marte y Titán

Para estudiar la variación de la presión atmosférica respecto a la altura en los planetas Venus y Marte, así como en la luna Titán, se implementaron los cuatro modelos propuestos. No obstante, no fue posible realizar una comparación con datos reales ya que no se cuenta con una base de datos meteorológicos para tales atmósferas.

5.2.1. Venus

Para estudiar la presión atmosférica en Venus se asume un gradiente de temperatura adiabático $\alpha = 9 \text{ K km}^{-1}$ en una capa atmosférica de 33 km por debajo de las cima de las nubes compuesta principalmente de dióxido de carbono [18]. En la Figura 6 se muestra cómo varía la presión atmosférica de Venus en términos de la altura para los cuatro modelos implementados. Se observa que en los Modelos I y II la presión disminuye de manera exponencial. Este resultado concuerda razonablemente bien con el gradiente adiabático para una atmósfera predominantemente de dióxi-

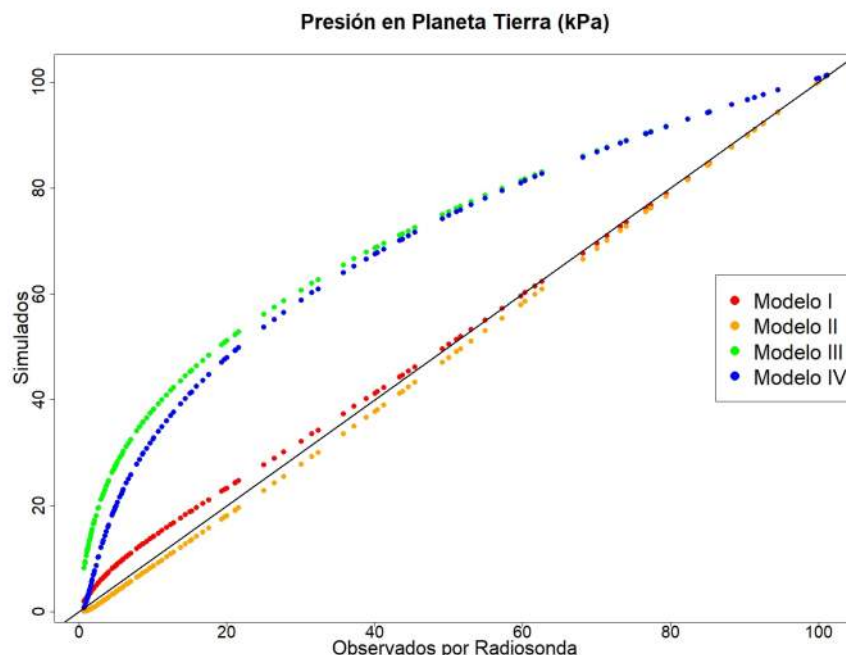


Figura 5: Relación entre los datos observados y los datos predichos por los modelos presentados.

do de carbono a las temperaturas y presiones ambientales de Venus [19]. Sin embargo, para los Modelos III y IV la presión disminuye de manera casi lineal.

5.2.2. Marte

La atmósfera de Marte está compuesta principalmente de dióxido de carbono (95 %), nitrógeno molecular (2.85 %) y argón (2 %) [20]. El gradiente de temperatura usado para modelar la presión en la atmósfera de Marte es $\alpha = 1.5 \text{ K km}^{-1}$ [15]. En la Figura 7 se observa cómo para los Modelos I y III la variación de la presión respecto a la altura es casi la misma, y disminuye de manera exponencial. Algo similar ocurre con los Modelos II y IV, siendo estos donde el decaimiento de la presión es más rápido. Derivado de estudios realizados por la sonda Mariner 9 en 1974, se ha estimado que la presión en la atmósfera de Marte es de 72 Pa [21] a una altura de 21.287km, en lo que se conoce como Monte Olimpo [22]. En contraste, con el Modelo II (mejor ajuste para la Tierra) se ha logrado estimar una presión de 106 Pa a dicha altura; mientras que para los Modelos I, III y IV se han estimado valores de 143 Pa, 1146 Pa y 109 Pa, respectivamente.

5.2.3. Titán

La atmósfera inferior de Titán está compuesta principalmente de nitrógeno (94.2 %), metano (5.65 %) e hidrógeno (0.099 %); también se pueden encontrar trazas de etano, diacetileno, metilacetileno, acetileno, propano y otros hidrocarburos policíclicos aromáticos [23]. El gradiente de temperatura implementado para modelar la presión en la atmósfera de Titán es $\alpha = 8.2 \text{ K km}^{-1}$ [15]. En la Figura 8 se observa cómo la presión varía muy similarmente para los Modelos I y II. Lo mismo sucede para los Modelos III y IV. Puede observarse, también, que la presión decae abruptamente a pocos metros sobre la superficie de la luna.

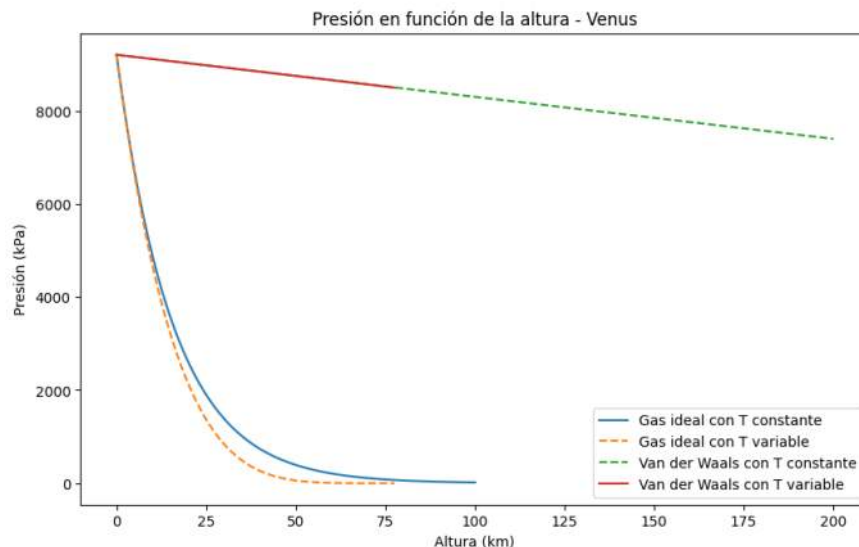


Figura 6: Venus

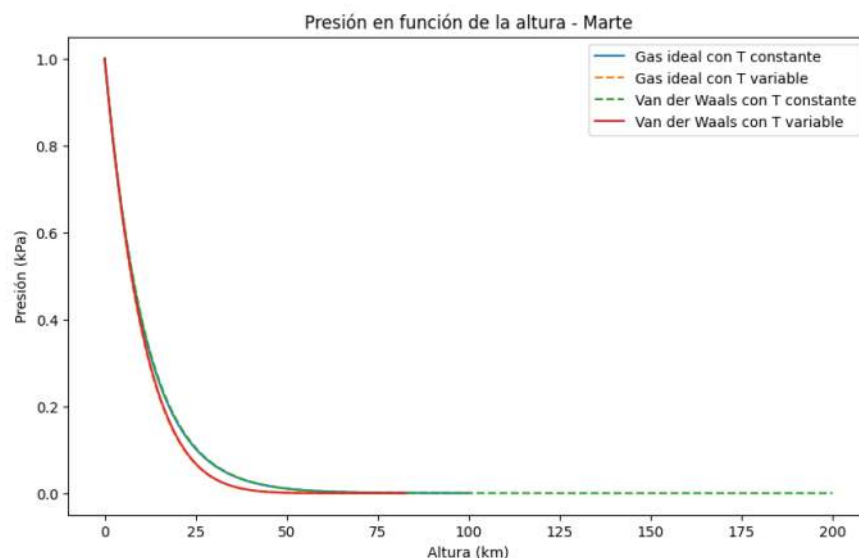


Figura 7: Marte

6. Conclusiones

El presente estudio abordó el problema de estimar la variación de la presión en las atmósferas planetarias respecto a la altura. Una de las principales contribuciones de este trabajo fue introducir un gradiente de temperatura lineal a las ecuaciones de estado de los gases ideales y la ecuación de van der Waals para gases reales, en las que generalmente se asume que la temperatura es constante, lo cual no es físicamente correcto, ya que la temperatura en la Tierra disminuye con la altura.

Se presentan cuatro modelos para estimar la presión atmosférica respecto a la altura. Los Modelos I y II tuvieron soluciones analíticas, mismas que están descritas por las ecuaciones (13) y (14), respectivamente. Mientras que para los Modelos III y IV, que no tienen solución analítica, se utilizó la función `solve_ivp` del subpaquete `integrate` de la librería `scipy` de PYTHON para hallar

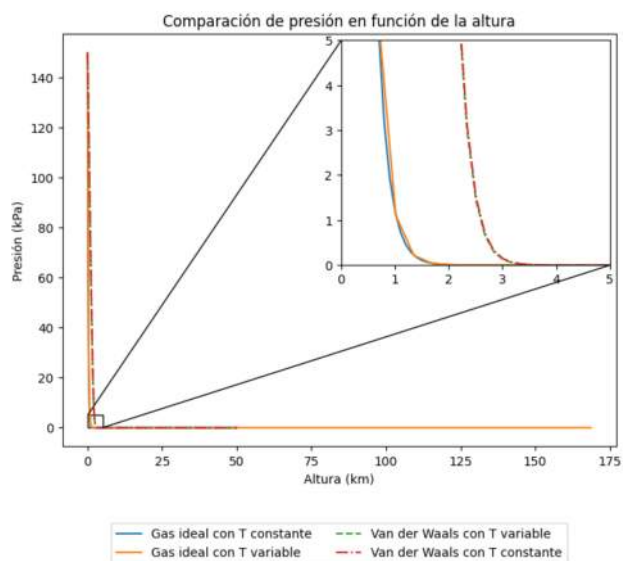


Figura 8: Titán

las soluciones numéricas a ambos modelos.

Los cuatro modelos propuestos se implementaron para estimar la presión atmosférica de la Tierra, y se compararon con datos tomados, el 6 de febrero de 2025, por la Radiosonda de la estación meteorológica 76805 en Acapulco, Guerrero, México. Se encontró que de acuerdo con los indicadores que miden el MAE, el MSRE, el índice d , el NSE y el PBIAS, el Modelo II es el que mejor se ajusta a los datos medidos por la Radiosonda, pese a que este modelo está basado en la ecuación de estado de los gases ideales. Para el Modelo I, los indicadores también son buenos; sin embargo, en este modelo se asume que la temperatura de la Tierra es constante, lo cual no puede ocurrir ya que esta varía con la altura.

Con base a los indicadores empleados, los Modelos III y IV –derivados en la ecuación de van der Waals– no tuvieron un buen desempeño en relación a los datos observados como se esperaba, a pesar de que la física implementada en tales modelos es más realista. Este hecho quizás se deba a que el volumen de la atmósfera es muy grande comparado con el volumen de las moléculas, provocando que el gas se comporte de manera ideal. No obstante, el Modelo IV es ligeramente mejor que el modelo III, ya que en este se asume que la temperatura varía con la altura.

Asimismo, se implementaron los cuatro modelos para estudiar el comportamiento de la presión atmosférica en los planetas Venus y Marte, así como en la luna Titán. En casi todos los casos, se encontró que la presión disminuye de manera exponencial. Sin embargo, para estos tres cuerpos celestes no fue posible hacer una comparación con datos reales, ya que desafortunadamente no existe, hasta el momento, una base de datos que tenga registro sobre cómo varía la presión respecto a la altura en tales atmósferas.

7. Agradecimientos

El autor le agradece a la SECIHTI el apoyo otorgado a través del proyecto CF-2023-I-1221.

8. Conflicto de intereses

“Los autores declaran no tener conflictos de intereses”

9. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

“Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos”.

10. Resumen gráfico

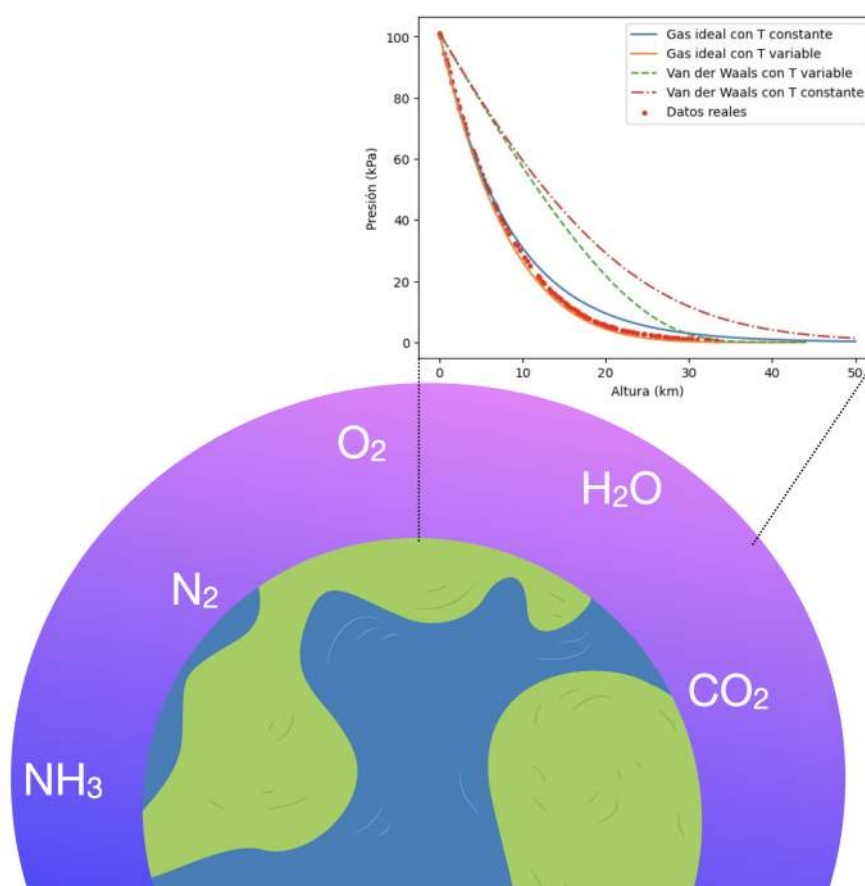


Figura 9: Ejemplo del Resumen Gráfico.

11. Roles de contribución

ROL	AUTORES(AS)
Cocentptualización	Francisco Rendón Rosalía Pulido-Guerrero
Curación de datos	Eréndira Munguía Rosalía Pulido-Guerrero
Análisis formal	Eréndira Munguía Francisco Rendón
Adquisición de fondos	Francisco Rendón
Investigación	Rosalía Pulido-Guerrero
Metodología	Francisco Rendón Rosalía Pulido-Guerrero
Administración del proyecto	Francisco Rendón
Software	Rosalía Pulido-Guerrero Eréndira Munguía
Supervisión	Francisco Rendón Eréndira Munguía
Validación	Eréndira Munguía Francisco Rendón
Visualización	Francisco Rendón Eréndira Munguía
Escritura-borrador-original	Francisco Rendón Rosalía Pulido-Guerrero
Escritura-revisión-edición	Francisco Rendón Eréndira Munguía

Referencias

- [1] A. Sanchez-Lavega, An introduction to planetary Atmospheres. DOI: 10.1201/9781439894668, 2010.
- [2] Z. Zhu et al., “Dust Filtration by Planet-induced Gap Edges: Implications for Transitional Disks”, *ApJ*, vol. 755, pp. 6, 2012, doi:10.1088/0004-637X/755/1/6.
- [3] T. Spohn, D. Breuer, T.V. Johnson, *Encyclopedia of the Solar System*. Elsevier, 2014.
- [4] W. Moebs, S.J. Ling, J. Sanny, *University Physics Volume 1*. OpenStax, 2016.
- [5] G. Soave, “Equilibrium constants from a modified Redlich-Kwong equation of state”, *Chemical Engineering Science*, vol. 27, pp. 1197-1203, 1972, doi:10.1016/0009-2509(72)80096-4
- [6] R. Williams. *Planetary Fact Sheet (Metric)*. NASA, 2018.
- [7] T. Chai, R.R. Draxler, “Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)?–Arguments against avoiding RMSE in the literature”, *Geosci. Model Dev.*, vol. 7, pp. 1247-1250, 2014, doi:10.5194/gmdd-7-1525-2014.
- [8] P. Virtanen et al., “SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python”, *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261-272, 2020, doi:10.1038/s41592-019-0686-2.

- [9] D.N. Moriasi, J.G. Arnold, M.W. Van Liew, R.L. Binger, R.D. Harmel, T.L. Veith, “Model Evaluation Guidelines for Systematic Quantification of Accuracy in Watershed Simulations”, Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers, vol. 50, pp. 885-900, 2007, doi:10.13031/2013.23153.
- [10] C.J. Willmott, “On the validations of models”, Physical Geography 2, pp. 184-194, 1981.
- [11] J.E. Nash, J.V. Sutcliffe, “River flow forecasting through conceptual models part I — A discussion of principles”, Journal of hydrology, vol. 10(3), pp. 282-290, 1970, doi:10.1016/0022-1694(70)90255-6.
- [12] S. Sorooshian, Q. Duan, C.K. Gupta, “Hydrology: Runoff and streamflow, Hydrology: General or miscellaneous, General or Miscellaneous: Techniques applicable in three or more fields, Information Related to Geographic Region: North America”, Water Resources Research, vol. 29(4), pp. 1185-1194, 1993, doi:10.1029/92WR02617.
- [13] P.O. Yapo, H.V. Gupta, S. Sorooshian, “Automatic calibration of conceptual rainfall-runoff models: sensitivity to calibration data”, Journal of hydrology, vol. 181(1), pp. 23-48, 1996, doi:10.1016/0022-1694(95)02918-4.
- [14] National Centers for Environmental Information (NCEI), NOAA. (2025). Integrated Global Radiosonde Archive (IGRA), Version 2 (Station MXM00076805). National Oceanic and Atmospheric Administration. noaa.gov
- [15] I. Kennedy., “Computation of Planetary Atmospheres with Action Mechanics Using Temperature Gradients Consistent with the Virial Theorem”, International Journal of Energy and Environment, vol. 9, 2015.
- [16] M. Zambrano-Bigiarini, hydroGOF: Goodness-of-fit functions for comparison of simulated and observed hydrological time series. R package version 0.7-0, 2022i, doi: 10.32614/CRAN.package.hydroGOF.
- [17] B. Illowsky, D. College, S. Dean, D. College, Introducción a la estadística. OpenStax, 2022.
- [18] A.H. Barrett., “Microwave Absorption and Emission in the Atmosphere of Venus”, Astronomical Journal, vol. 65, pp. 340, 1960, doi:10.1086/108111
- [19] R.A. Schiffer, Models of Venus Atmosphere. NASA, 1968.
- [20] H.B Franz et al., “Initial SAM calibration gas experiments on Mars: Quadrupole mass spectrometer results and implications”, Planetary and Space Science, vol. 138, pp. 44-55, 2017, doi:10.1016/j.pss.2017.01.014
- [21] M.E. Davies, “Photogrammetric measurements of Olympus Mons on Mars”, Icarus, vol. 21(3), pp. 230-236, 1974, doi:10.1016/0019-1035(74)90037-2.
- [22] D.E. Smith et al., “Mars Orbiter Laser Altimeter: Experiment summary after the first year of global mapping of Mars”, Journal of Geophysical Research, vol. 110(10), pp. 23689-23772, 2001, doi:10.1029/2000JE001364.
- [23] H. Niemann et al., “The abundances of constituents of Titan’s atmosphere from the GCMS instrument on the Huygens probe”, Nature, vol. 438, pp. 779-784, 2005, doi:10.1038/nature04122

On Riemann-Liouville Operators of type (α, k, P) and Related Function Spaces

Sobre operadores Riemann-Liouville de tipo (α, k, P) y espacios de funciones asociados

Balcázar-Araiza, Roberto C.^{1,*}, Ojeda, Nelson R.²

¹Universidad Autónoma de Yucatán, México, .

²Universidad Nacional de Formosa, Argentina, .

* robert98ba@gmail.com

Abstract

In this paper, a first study of the **integrals and differentials of type (α, k, P)** was carried out. A generalization of the k -fractional operators proposed in previous works for one-variable functions was obtained, alongside with the trajectory fractional recently proposed. Relevant associated function spaces were proposed and studied, as well as basic properties concerning this generalization. Moreover, it was proven that several known fractional derivatives and integrals are particular cases of our proposal and finally, we complemented with fundamental theorems of calculus for these operators.

Keywords: *Fractional Integral, Fractional Derivative, k -Riemann-Liouville operators, (α, k, P) -Riemann-Liouville operators, function spaces, path choices, arc-length functions.*

Resumen

En este trabajo se llevó a cabo una primera investigación sobre las **integrales y diferenciales de Riemann-Liouville de tipo (α, k, P)** . Se obtuvo una generalización de los operadores k -fraccionarios para funciones de una variable planteados en trabajos previos, en conjunto los con operadores fraccionarios de trayectoria para funciones de varias variables recientemente propuestos. Se definieron los espacios de funciones relevantes asociados a dichos operadores y se exploraron primeras propiedades sobre los mismos. Asimismo, se proporcionaron ejemplos de derivadas e integrales fraccionarias conocidas que resultan como casos particulares y finalmente, se complementó el estudio con los teoremas fundamentales del cálculo correspondientes a estos operadores.

Palabras claves: *Integral fraccional, derivada fraccional, k -operadores de tipo Riemann-Liouville, (α, k, P) -operadores de tipo Riemann-Liouville, espacios de funciones, elección de trayectorias, funciones de longitud de arco.*

Recibido: 16 de octubre de 2025. Aceptado: 25 de mayo de 2026. Publicado: 31 de agosto de 2026.

1 Introduction

Fractional Calculus consists of the analysis and application of differential and integral operators of arbitrary real or complex orders. What is more, due to the efforts of many other researchers on the generalization and abstraction of these ideas [1], [2], [3], we could affirm that Fractional Calculus intersects with the investigation of general linear operators defined on function spaces of

interest, which generalize the concept of derivatives and integrals. Its origins trace back to the time of L'Hôpital and Leibniz and since then, the field has experienced a steady but constant growth (see [4] for a historical overview or [5, Ch. 1] for a complement). To the present, Fractional Calculus has proven to be useful to model a wide of phenomena, featuring population dynamics [6], [7], [8], electrical circuits [9], [10], [11], epidemics [12], [13], [14], classical mechanics [15], [16], [17], anomalous diffusion [18], [19], [20] among others. The memory and non-locality properties of certain fractional operators [21], along with their potential to enhance the precision of models that traditionally rely on ordinary derivatives [22], [23], have brought within an increase of the trend on recurring to the fractional approach.

On the theoretical front, while substantial work has been done to demonstrate the potential of fractional operators across various fields [4], [24], [25], much remains to be explored. For instance, a comprehensive and unified theory of Fractional Differential Geometry has yet to be developed and consequently, many improvements are still to be done in the realm of Multivariable Fractional Calculus. In this sense, many efforts have been carried out [4], [24], [26] to explore different avenues for the development of this area; in particular, Balcázar-Araiza et al [27] proposed a trajectory-dependent approach that generalizes both the one-variable Riemann-Liouville fractional operators and the integral of a scalar field w.r.t. the arc-length of a regular path, which showcased both theoretical and applied potential for further research and modeling (e.g. [28]). Simultaneously, in articles such as [29], [30] an extension of the one-variable Riemann-Liouville derivatives was implemented via the addition of an additional parameter and the incorporation of the generalized k -Gamma function [31]. Hence, our goal in this project is to unify both approaches to devise a more general object known as the Riemann-Liouville integral of type (α, k, P) , which encompasses each of the aforementioned fractional operators in the realm of several-variables functions.

2 One-Variable Riemann-Liouville k -Fractional Calculus

Notation 2.1. From now on, unless anything else is specified, we will denote $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$ and $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$.

In [31], Diaz and Pariaguan, while studying problems related to combinatorics and the perturbative computation of Feynman integrals, introduced the **generalized k -Gamma function** $\Gamma_k(x)$, a one-parameter generalization of the classical gamma function $\Gamma(x)$ with the property $\Gamma_1(x) = \Gamma(x)$. Shortly after, a variety of new extensions of the classical fractional operators were introduced in the literature, nowadays known as **k -fractional operators**.

Definition 2.1 ([31]). Let $k \in \mathbb{R}_{>0}$ and $z \in \mathbb{C}$. The **k -Gamma function** $\Gamma_k(z)$ is defined as

$$\Gamma_k(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Notice that when $k \rightarrow 1$, we have $\Gamma_k(z) \rightarrow \Gamma(z)$, where $\Gamma(\cdot)$ denotes the classical Gamma function. Moreover, we have the following properties whose proof is contained in [31].

Proposition 2.1. Let $k \in \mathbb{R}_{>0}$. The k -Gamma function satisfies the following properties:

(i) $\Gamma_k(z+k) = z\Gamma_k(z)$.

(ii) If $\Gamma(\cdot)$ is the classical Gamma function, then

$$\Gamma_k(z) = k^{\frac{z}{k}-1} \Gamma\left(\frac{z}{k}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1)$$

In [29], Mubeen and Habbibullah introduced the k -Riemann-Liouville fractional integral, subsequently extended to the k -Weyl-Liouville fractional integral in [32].

Definition 2.2. Let $\alpha, k \in \mathbb{R}_{>0}$ and $f \in L([a, b])$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. The k -Riemann-Liouville fractional integral of order α is defined by

$$I_{a+}^{(\alpha,k)} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (2)$$

Observe that, due to relation (4) and [4, Theorem 2.7], the operator $I_{a+}^{(\alpha,k)}$ converges (in the pointwise sense) to I_{a+}^α as $k \rightarrow 1$, i.e., we recover the classical Riemann-Liouville fractional integral of order α ([5], [33]).

The following definition is adapted from [30, Definition 6].

Definition 2.3. Let $\alpha, k \in \mathbb{R}_{>0}$ and $n \in \mathbb{N}$ such that $n = [\alpha/k] + 1$, $f \in L([a, b])$ and $I_k^{nk-\alpha} f(t) \in C^n([a, b])$; the k -Riemann-Liouville fractional derivative of order α is given by

$$D_{a+}^{(\alpha,k)} f(x) := \left(\frac{d}{dt} \right)^n k^n I_{a+}^{(nk-\alpha,k)} f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3)$$

Moreover, according to [30, eq. (I.11)], we can express $I_{a+}^{(\alpha,k)}$ in terms of the classical Riemann-Liouville fractional integral as

$$I_{a+}^{(\alpha,k)} = k^{-\frac{\alpha}{k}} I_{a+}^{\alpha/k}. \quad (4)$$

From equation (3) and (4), it also follows that

$$D_{a+}^{(\alpha,k)} = k^{\frac{\alpha}{k}} D_{a+}^{\alpha/k}. \quad (5)$$

Here, I_{a+}^ν and D_{a+}^ν are the classical Riemann-Liouville fractional operators of order ν ([5], [33]).

3 Path Choices

Notation 3.1. For the rest of the paper, given some intervals $[a, b], [c, d] \subseteq \mathbb{R}$, let us set

$$\text{Diff}_+([a, b], [c, d]) := \{f : [a, b] \rightarrow [c, d] : f, f^{-1} \in C^1([a, b], [c, d]) \text{ and } f' > 0\}.$$

Moreover, for $[a, b] = [c, d]$ we let $\text{Diff}_+([a, b]) := \text{Diff}_+([a, b], [a, b])$.

In [27, Definition 2.3], trajectory-dependent generalizations for the Riemann-Liouville fractional integrals were given; however, not only a positive order but also a trajectory must be given to evaluate the integral of the given scalar field along such curve. If we repeat this process for every point $\mathbf{x}$ in the domain into consideration, we are implicitly assigning a parametric curve to every $\mathbf{x}$ to be used to compute our fractional trajectory integral. We formalize this idea as follows: first, let us define the set of C^j -class simple regular curves parametrized on $[0, 1]$ ending on points of U as

$$\mathfrak{C}^j(U) := \{\gamma \in C^j([0, 1], \mathbb{R}^d) : \gamma' \neq \mathbf{0}, \gamma \text{ is one-to-one and } \gamma(1) = \mathbf{x}, \text{ for some } \mathbf{x} \in U\}.$$

Definition 3.1. A j -th order path choice on U is a function $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$, such that

(PC) for every $\mathbf{x} \in U$ and every $t \in [0, 1]$ we have $\text{Im}(P(P(\mathbf{x})(t))) \subseteq \text{Im}(P(\mathbf{x}))$.

For $j = \infty$, $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^\infty(U)$ is a **smooth order path choice on U** . Moreover, we use the notation $P(\mathbf{x}) = \gamma_{\mathbf{x}}$ and given a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$, we say that U is a **P -set** if U is path-connected and for every $\mathbf{x} \in U$, $\gamma_{\mathbf{x}}((0, 1]) \subseteq U$. Moreover, the **set of initial points determined by P** is defined as

$$\mathcal{I}_P := \{\gamma_{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} \in U\}$$

and let us use the notation $\mathbf{a}_{\mathbf{x}} := \gamma_{\mathbf{x}}(0)$ (see Figure 1).

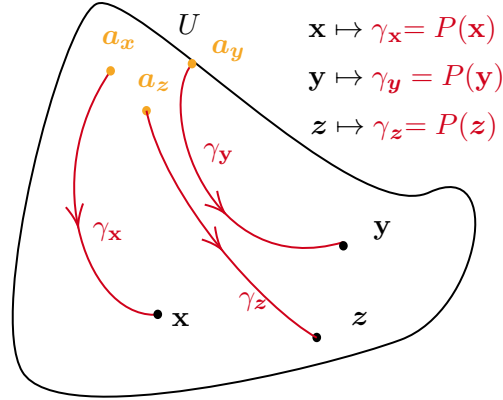


Figure 1: Graphical depiction of the path choice concept

Remark 3.1. From now on, we assume that for each $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ to be considered, U constitutes a P -set itself.

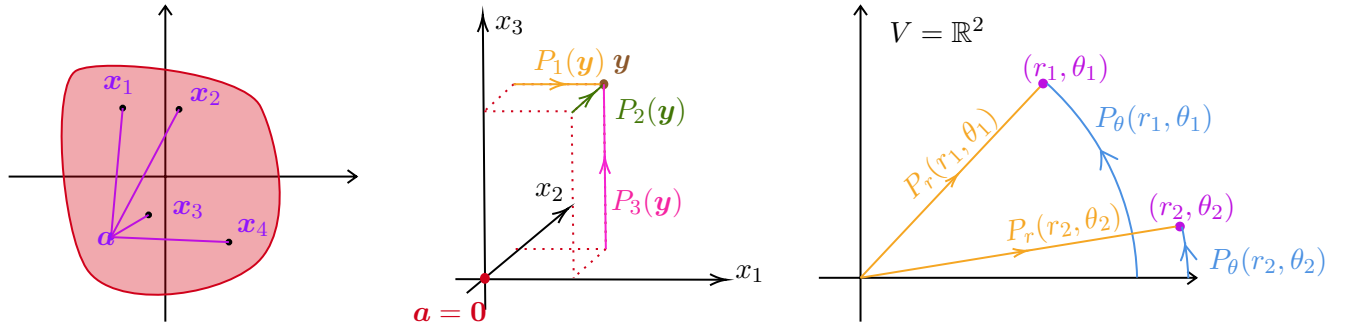


Figure 2: Graphical representations for the path choices discussed in Examples 3.1, 3.2 and 3.3

The geometrical treatment of curves motivates the subsequent notion.

Definition 3.2. Two path choices $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ and $Q : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ are said to be **equivalent** if for every $\mathbf{x} \in U$ there exists $h_{\mathbf{x}} \in \text{Diff}_+([0, 1])$ such that

$$P(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) \circ h_{\mathbf{x}}.$$

After determining a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$, the following **arc-length function** $s_{(P,\cdot)} : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is induced as the mapping

$$s_{(P,\mathbf{x})}(t) := \int_0^t \|\gamma'_{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [0, 1]. \quad (6)$$

In particular, in equation (6), we adopt the special notation for $t = 1$:

$$s_P(\mathbf{x}) := s_{(P,\mathbf{x})}(1). \quad (7)$$

The following result states that equivalent path choices share the same arc-length functions.

Lemma 3.1. *Let $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ and $Q : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ be equivalent path choices. Then for every $\mathbf{x} \in U$ there exists $h_{\mathbf{x}} \in \text{Diff}_+([0, 1])$ s.t. $s_{(P,\mathbf{x})} = s_{(Q,\mathbf{x})} \circ h_{\mathbf{x}}$. In particular, for $t = 1$, the total arc-length functions agree and $s_P(\mathbf{x}) = s_Q(\mathbf{x})$.*

Proof. By hypothesis, for every $\mathbf{x} \in U$ there is $h_{\mathbf{x}} \in \text{Diff}_+([0, 1])$ such that the identity $P(\mathbf{x})(\tau) = Q(\mathbf{x}) \circ h_{\mathbf{x}}(\tau)$ holds, whence we obtain $P(\mathbf{x})'(\tau) = [Q(\mathbf{x})' \circ h_{\mathbf{x}}(\tau)]h'_{\mathbf{x}}(\tau)$. Taking norms yields

$$\|P(\mathbf{x})'(\tau)\| = \|Q(\mathbf{x})' \circ h_{\mathbf{x}}(\tau)\| h'_{\mathbf{x}}(\tau).$$

By integrating this equality from 0 to t , we obtain

$$s_{(P,\mathbf{x})}(t) = \int_0^t \|P(\mathbf{x})'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \|Q(\mathbf{x})' \circ h_{\mathbf{x}}(\tau)\| h'_{\mathbf{x}}(\tau) d\tau.$$

Considering the variable change $u = h_{\mathbf{x}}(\tau)$, we obtain

$$s_{(P,\mathbf{x})}(t) = \int_0^{h_{\mathbf{x}}(t)} \|Q(\mathbf{x})'(u)\| du = s_{(Q,\mathbf{x})}(h_{\mathbf{x}}(t)),$$

which proves the first claim. Recalling the notation introduced in (7), and setting $t = 1$ we obtain $s_P(\mathbf{x}) = s_Q(\mathbf{x})$, which completes the proof. $\square$

On the other hand, as a consequence from condition (PC) in Definition 3.1, it follows that for each pair of parameters $t, t' \in [0, 1]$, there must exist some $\tau \in [0, 1]$ depending on t and t' , such that

$$P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))(t') = \gamma_{\mathbf{x}}(\tau). \quad (8)$$

In addition, notice that the injectivity of $\gamma_{\mathbf{x}}$ implies that $\gamma_{\mathbf{x}}^{-1} : \text{Im}(\gamma_{\mathbf{x}}) \rightarrow [0, 1]$ is bijective, whence the map $q_{\mathbf{x},t} := \gamma_{\mathbf{x}}^{-1} \circ P(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ constitutes a diffeomorphism, because of the differentiability of $P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))$ and $\gamma_{\mathbf{x}}$, alongside with the fact that $\gamma'_{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, which by the Inverse Function Theorem implies the differentiability¹ of $\gamma_{\mathbf{x}}^{-1}$ and the claim follows (see Figure 3). In other words, $P(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) = \gamma_{\mathbf{x}} \circ q_{\mathbf{x},t}$ and by injectivity, $\tau = q_{\mathbf{x},t}(t')$, whence

$$P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))(t') = \gamma_{\mathbf{x}} \circ q_{\mathbf{x},t}(t'). \quad (9)$$

¹Here we mean *differentiability* in a broader sense, defined over more general types of subsets in $\mathbb{R}^n$, such as the closed sets conformed by $\gamma_{\mathbf{x}}([0, 1])$: we say that $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is differentiable at a point if it can be locally extended (on a neighborhood of X) to a differentiable function. See, e.g., pages 1 and 2 from [34].

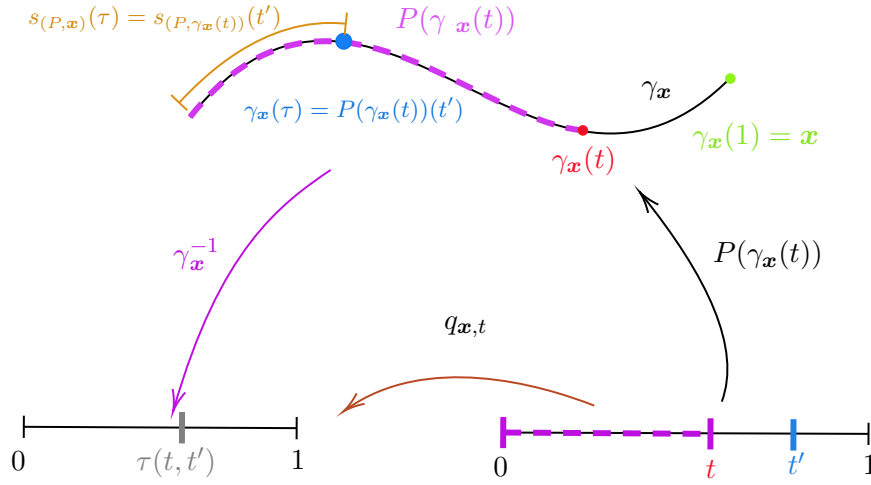


Figure 3: Graphical Analysis of Condition (PC)

What is more, let us define $\tilde{P}_t : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ as $\tilde{P}_t(\mathbf{x}) := P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))$. We have that

$$\begin{aligned} s_{(\tilde{P}_t, \mathbf{x})}(t') &= \int_0^{t'} \left\| \tilde{P}_t(\mathbf{x})'(u) \right\| du = \int_0^{t'} \left\| P(\mathbf{x})'(q_{\mathbf{x},t}(u)) \right\| q'_{\mathbf{x},t}(u) du \\ &= \int_0^{\tau} \left\| P(\mathbf{x})'(v) \right\| dv = s_{(P, \mathbf{x})}(\tau) \quad (v = q_{\mathbf{x},t}(u)) \end{aligned}$$

and in view that $s_{(\tilde{P}_t, \mathbf{x})}(t') = s_{(P, \gamma_{\mathbf{x}}(t))}(t')$, we have

$$q_{\mathbf{x},t} = s_{(P, \mathbf{x})}^{-1} \circ s_{(P, \gamma_{\mathbf{x}}(t))}, \quad (10)$$

which constitutes an alternative and more explicit expression of the diffeomorphism $q_{\mathbf{x},t}$. The latter fact will be relevant for further results, so let us state it separately.

Proposition 3.1. *Let $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ be a path choice. It follows that*

$$s_{(P, \gamma_{\mathbf{x}}(t))}(t') = s_{(P, \mathbf{x})}(q_{\mathbf{x},t}(t')), \quad t' \in [0, 1].$$

In particular, when $t' = 1$, $s_P(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) = s_{(P, \mathbf{x})}(t)$.

Example 3.1. *Given $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ with $U \ni \mathbf{a}$ being a star set with respect to $\mathbf{a}$, a simple path choice on U is given by the assignation*

$$\begin{aligned} \overline{P} : U &\rightarrow \mathfrak{C}^1(U) \\ \mathbf{x} &\mapsto \overline{P}(\mathbf{x})(t) := \mathbf{a} + (\mathbf{x} - \mathbf{a})t. \end{aligned}$$

*In fact, in this case we have $\mathcal{I}_{\overline{P}} = \{\mathbf{a}\}$, $s_{(\overline{P}, \mathbf{x})}(t) = t\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ and $s_{\overline{P}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ (Figure 2). This case and its generalization for any path choice **from a single point** ($\mathcal{I}_P = \{\mathbf{a}\}$) were extensively studied in [28, Ch.2].*

Example 3.2. Let $U = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ for $2m$ real numbers $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ such that $a_i < b_i$. A simple path choice on U is given by the assignation

$$P_i : U \rightarrow \mathfrak{C}^1(U) \\ \mathbf{x} \mapsto P_i(\mathbf{x})(t) := \mathbf{x} + (a_i - x_i + (x_i - a_i)t)\hat{\mathbf{e}}_i,$$

for each $i = 1, \dots, m$. In fact, in this case we have $\mathcal{I}_{P_i} = \{a_i\hat{\mathbf{e}}_i\}$ (for $m = 3$ see Figure 2).

Example 3.3. Let $V = \mathbb{R}^2$ with polar coordinates (r, θ) (Figure 2). A pair of path choices on V are given by

$$P_\theta : V \rightarrow \mathfrak{C}^j(V) \\ \mathbf{x} \mapsto P_\theta(r, \theta)(t) := (r, \theta t)$$

and

$$P_r : V \rightarrow \mathfrak{C}^j(V) \\ \mathbf{x} \mapsto P_r(r, \theta)(t) := (rt, \theta).$$

Hence, $\mathcal{I}_{P_\theta} = \{(r, 0) : r > 0\}$ and $\mathcal{I}_{P_r} = \{(0, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\} = \{(0, 0)\}$.

To conclude this section, the following useful result provides operational rules for the arc-length function to be used later.

4 Riemann-Liouville Integrals of Type (α, P)

Definition 4.1. Let $\alpha > 0$ and P a j -th order path choice on $U \subseteq \mathbb{R}^d$ for some $j \in \mathbb{N}$. For $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, the **Riemann-Liouville fractional integral of f of type (α, P) at $\mathbf{x}$** is defined as

$$I_P^\alpha f(\mathbf{x}) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P, \mathbf{x})}(t)]^{\alpha-1} f(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt. \quad (11)$$

Example 4.1. When P is chosen as in Example 3.2, the fractional integral $I_{P_i}^\alpha f(\mathbf{x})$ is precisely the Riemann-Liouville partial integral of f of order α with respect to the i -th variable (e.g. [33, eq. (2.9.3)]):

$$I_{P_i}^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_i}^{x_i} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)}{(x_i - t)^{1-\alpha}} dt.$$

Example 4.2. The integrals of type (α, P_r) and (α, P_θ) constitute polar analogues of the ones from the last example; let us recall that when we endow $\mathbb{R}^2$ with polar coordinates, the arc length of a curve $[a, b] \ni t \mapsto (r(t), \theta(t))$ is given by the integral

$$\int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2} dt,$$

as the metric in this case is given by the differential form $dr^2 + r d\theta^2$. Consequently, $I_{P_r}^\alpha f(r, \theta) = r^\alpha I_{0+}^\alpha f(rt, \theta)|_{t=1}$ and $I_{P_\theta}^\alpha f(r, \theta) = (r\theta)^\alpha I_{0+}^\alpha f(r, \theta t)|_{t=1}$.

Example 4.3. As the reader may expect, a similar treatment could be carried out in spherical and cylindrical coordinates: for the first case we should consider the metric $dr^2 + r d\theta^2 + dz^2$ and the path choices $P_r(r, \theta, z)(t) = (rt, \theta, z)$, $P_\theta(r, \theta, z)(t) = (r, \theta t, z)$ and $P_z(r, \theta, z) = (r, \theta, zt)$. Analogously, for the spherical setting the metric $d\rho^2 + \rho d\theta^2 + \rho \sin \theta d\varphi^2$ serves for the arc lengths and suggested path choices are $P_\rho(\rho, \theta, \varphi)(t) = (\rho t, \theta, \varphi)$, $P_\theta(\rho, \theta, \varphi)(t) = (\rho, \theta t, \varphi)$ and $P_\varphi(\rho, \theta, \varphi)(t) = (\rho, \theta, \varphi t)$. In turn, we get the following integral operators:

$$\begin{aligned} I_{P_r}^\alpha f(r, \theta, z) &= r^\alpha I_{0+}^\alpha f(rt, \theta, z)|_{t=1}, & I_{P_\theta}^\alpha f(r, \theta, z) &= (r\theta)^\alpha I_{0+}^\alpha f(r, \theta t, z)|_{t=1}, \\ I_{P_z}^\alpha f(r, \theta, z) &= z^\alpha I_{0+}^\alpha f(r, \theta, zt)|_{t=1}, & I_{P_\rho}^\alpha(\rho t, \theta, \varphi) &= \rho^\alpha I_{0+}^\alpha f(\rho t, \theta, \varphi)|_{t=1}, \\ I_{P_\theta}^\alpha(\rho, \theta t, \varphi) &= (\rho\theta)^\alpha I_{0+}^\alpha f(\rho, \theta t, \varphi)|_{t=1}, & I_{P_\varphi}^\alpha(\rho, \theta, \varphi t) &= (\rho \sin \theta)^\alpha I_{0+}^\alpha f(\rho, \theta, \varphi t)|_{t=1}. \end{aligned}$$

Example 4.4. Additionally, equation (11) generalizes fractional directional integrals defined over straight segments (Example 3.1) as in [26, eq. (14)]. Specifically,

$$I_P^\alpha f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^\alpha I_{0+}^\alpha f(\mathbf{a} + (\mathbf{x} - \mathbf{a})t)|_{t=1},$$

where the integral term in the last equation is precisely the definition proposed in [26].

Just as it happened with the arc-length function $s_{(P,\mathbf{x})}(t)$, the following result shows that this integral does not depend on the path choice function.

Proposition 4.1. For two equivalent path choices $P, Q : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ we have $I_P^\alpha = I_Q^\alpha$ for $\alpha > 0$.

Proof. By (11) and Lemma 3.1 we have that

$$\begin{aligned} I_P^\alpha f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P,\mathbf{x})}(t)]^{\alpha-1} f(\gamma_{P,\mathbf{x}}(t)) \|\gamma'_{P,\mathbf{x}}(t)\| dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [s_Q(\mathbf{x}) - s_{(Q,\mathbf{x})}(h_{\mathbf{x}}(t))]^{\alpha-1} f(\gamma_{Q,\mathbf{x}}(h_{\mathbf{x}}(t))) \|\gamma'_{Q,\mathbf{x}}(h_{\mathbf{x}}(t))\| h'_{\mathbf{x}}(t) dt. \end{aligned}$$

Now let $u = h_{\mathbf{x}}(t)$. Then

$$I_P^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [s_Q(\mathbf{x}) - s_{(Q,\mathbf{x})}(u)]^{\alpha-1} f(\gamma_{Q,\mathbf{x}}(u)) \|\gamma'_{Q,\mathbf{x}}(u)\| du = I_Q^\alpha f(\mathbf{x}).$$

Since the previous identity holds for every $\mathbf{x} \in U$, we conclude that $I_P^\alpha f = I_Q^\alpha f$ on U . $\square$

As pointed out in [35], in analogy with the classical Riemann–Liouville fractional integrals, we may regard $I_P^\alpha f$ as integrals of $f \circ \gamma_{\mathbf{x}}$ with respect to the Lebesgue–Stieltjes measure

$$\mu_{P,\alpha,\mathbf{x}} := -\frac{(s_P(\mathbf{x}) - s_{(P,\mathbf{x})}(\cdot))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

induced by α and P , for each $\mathbf{x} \in U$. Therefore, in the context of L^p spaces defined on abstract measure spaces, we propose the following extension.

Definition 4.2. For $\alpha > 0$, $U \subset \mathbb{R}^d$, a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ and $1 \leq p < \infty$, let us define

$$L_{(\alpha,P)}^p(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \circ \gamma_{\mathbf{x}} \in L^p([0, 1]; \mu_{\alpha,P,\mathbf{x}}), \forall \mathbf{x} \in U\},$$

endowed with the norm

$$\|f\|_{L_{(\alpha,P)}^p} := \sup_{\mathbf{x} \in U} \left\{ (I_P^\alpha |f|^p(\mathbf{x}))^{1/p} \right\}.$$

Notice that $I_P^\alpha f$ exists on U as long as $f \in L_{(\alpha,P)}^1(U)$, so the latter space is the biggest one such that $I_P^\alpha f$ exists. Actually, it is immediate to reinforce this fact.

Proposition 4.2. *Let $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Then $L_{(\alpha,P)}^{p_2}(U) \subseteq L_{(\alpha,P)}^{p_1}(U)$.*

Proof. Using [36, Corollary 2, p. 397], we have $\|f\mu'_{\alpha,P,\mathbf{x}}\|_{L^{p_1}} \leq c_{\mathbf{x}} \|f\mu'_{\alpha,P,\mathbf{x}}\|_{L^{p_2}}$ with $c_{\mathbf{x}}$ defined as

$$c_{\mathbf{x}} := \begin{cases} \left(\frac{s_P(\mathbf{x})^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}} & \text{if } p_2 < \infty \text{ and} \\ \left(\frac{s_P(\mathbf{x})^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{p_1}} & \text{if } p_2 = \infty. \end{cases}$$

Taking supremes over every $\mathbf{x} \in U$ we achieve the desired result. $\square$

Another way of expressing I_P^α consists of defining the **pre-processing operator** $\mathcal{Q}_1 : L_{(\alpha,P)}^1(U) \rightarrow L^1([0, s_P(\mathbf{x})], \mu_{\alpha,P,\mathbf{x}})$ and the **post-processing operator** $\mathcal{Q}_2 : L^1([0, s_P(\mathbf{x})], \mu_{\alpha,P,\mathbf{x}}) \rightarrow L_{(\alpha,P)}^1(U)$ as

$$(\mathcal{Q}_1 f(\mathbf{x}))(\sigma) = f \circ \gamma_{\mathbf{x}} \circ s_{(P,\mathbf{x})}^{-1}(\sigma) \text{ and } (\mathcal{Q}_2 g)(\mathbf{x}) = g \circ s_P(\mathbf{x}), \quad (12)$$

respectively. It is straightforward to verify that $\mathcal{Q}_2$ is the inverse of $\mathcal{Q}_1$. Indeed, for $g \in L^1([0, 1], \mu_{\alpha,P,\mathbf{x}})$ we compute

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_2 g)(\mathbf{x}) &= g(s_{(P,\mathbf{x})}(1)) \\ (\mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_2 g)(\mathbf{x}))(\sigma) &= g\left(s_{(P,\gamma_{\mathbf{x}} \circ s_{(P,\mathbf{x})}^{-1}(\sigma))}(1)\right) \end{aligned}$$

By Proposition 3.1, if we consider $t = s_{(P,\mathbf{x})}^{-1}(\sigma)$ we have

$$s_{(P,\gamma_{\mathbf{x}} \circ s_{(P,\mathbf{x})}^{-1}(\sigma))}(1) = s_{(P,\gamma_{\mathbf{x}}(t))}(1) = s_{(P,\mathbf{x})}(t) = \sigma,$$

and therefore $(\mathcal{Q}_1(\mathcal{Q}_2 g)(\mathbf{x}))(\sigma) = g(\sigma)$. On the other hand,

$$\mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}_1 f)(\sigma)(\mathbf{x}) = f(\gamma_{\mathbf{x}}(s_{(P,\mathbf{x})}^{-1}(s_P(\mathbf{x})))) = f(\gamma_{\mathbf{x}}(1)) = f(\mathbf{x}).$$

In this way, by unifying the notation of the operators in equation (12), let $\mathcal{Q}_P := \mathcal{Q}_1$, whence $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_P^{-1}$ and note that

$$I_P^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s_P(\mathbf{x})} (s_P(\mathbf{x}) - \sigma)^{\alpha-1} f(s_{(P,\mathbf{x})}^{-1}(\sigma)) d\sigma,$$

it follows that the equivalent representation of equation (11) is

$$I_P^\alpha f(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}_P^{-1} \circ I_{0+}^\alpha \circ \mathcal{Q}_P f(\mathbf{x}). \quad (13)$$

The extension proposed in Definition 4.1 also satisfies a semigroup-like property, which simultaneously extends the corresponding property of the classical Riemann-Liouville integrals.

Proposition 4.3. *Let $f \in L_{(\alpha,P)}^1(U)$ with $\alpha, \beta > 0$ and a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^1(U)$.*

a) $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} I_P^\alpha f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

b) Let $f \in L^1_{(1,P)}(U)$. Then

$$I_P^\alpha(I_P^\beta f)(\mathbf{x}) = I_P^{\alpha+\beta} f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U. \quad (14)$$

Proof. For a) we can use (13) alongside with the property:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{a+}^\alpha f(x) = f(x)$$

(cf. [4, Theorem 2.7]) and b) follows from (13), together with [37, Theorem 2.2]. $\square$

Remark 4.1. Analogously to [27, Remark 2.1], the previous result allows us to adopt the convention $I_P^0 f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})$.

Another ordering result is given in terms of the integration orders.

Proposition 4.4. Let $0 \leq \beta < \alpha$, $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ and assume that $\mathbf{x} \mapsto s_P(\mathbf{x})$ is bounded on U . For each $q \geq 1$, it holds that $L^q_{(\beta,P)}(U) \subseteq L^q_{(\alpha,P)}(U)$.

Proof. Let $f \in L^q_{(\beta,P)}(U)$. Due to the semigroup property,

$$I_P^\alpha |f|^q(\mathbf{x}) = I_P^{\alpha-\beta} I_P^\beta |f|^q(\mathbf{x}) \leq \frac{s_P(\mathbf{x})^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \|f\|_{L^q_{(\beta,P)}}^q.$$

Now it suffices to take q -th roots and supremums over $\mathbf{x} \in U$ to conclude that $f \in L^q_{(\alpha,P)}(U)$, since $s_P(\mathbf{x})^{\alpha-\beta}$ is bounded and $\alpha - \beta > 0$ by hypothesis. $\square$

Corollary 4.1. $L^1_{(\beta,P)} \subseteq L^1_{(1,P)}(U) \subseteq L^1_{(\alpha,P)}(U)$ for any $0 \leq \beta < 1$ and $\alpha > 1$.

Before continuing, let us introduce the subsequent analogues of the C^n spaces.

Definition 4.3. We define the **space of (α, P) -continuous functions on U as**

$$C_{(\alpha,P)}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \circ \gamma_{\mathbf{x}} \mu'_{\alpha,P,\mathbf{x}} \in C[0,1], \forall \mathbf{x} \in U\},$$

endowed with the norm

$$\|f\|_{C_{(\alpha,P)}} := \sup_{\mathbf{x} \in U} \left\{ \|f \circ \gamma_{\mathbf{x}} \mu'_{\alpha,P,\mathbf{x}}\|_{C([0,1])} \right\}.$$

Additionally, we naturally define the **space of (α, P) -continuous functions of order n as**

$$C^n_{(\alpha,P)}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \circ \gamma_{\mathbf{x}} \in C^{n-1}([0,1]) \text{ and } f \circ \gamma_{\mathbf{x}} \mu'_{\alpha,P,\mathbf{x}} \in C^n([0,1]), \forall \mathbf{x} \in U\},$$

equipped with the norm

$$\|f\|_{C^n_{(\alpha,P)}} := \sup_{\mathbf{x} \in U} \left\{ \|f \circ \gamma_{\mathbf{x}}\|_{C^{n-1}([0,1])} + \left\| (f \circ \gamma_{\mathbf{x}} \mu'_{\alpha,P,\mathbf{x}})^{(n)} \right\|_{C([0,1])} \right\}$$

where $\|\cdot\|_{C^j([a,b])}$ is commonly defined as $\|g\|_{C^j([a,b])} = \sum_{i=0}^j \|g^{(i)}\|_{C([a,b])}$ (see, e.g., [38, p. 214]). In addition, let us adopt the convention $C^0_{(\alpha,P)}(U) := C_{(\alpha,P)}(U)$.

To conclude this section, we observe that the fractional integral along paths acts in a simple and explicit way on powers of the arc-length function. More precisely, for $\alpha > 0$ we obtain

$$I_P^\alpha s_P(\mathbf{x})^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} s_P(\mathbf{x})^{\alpha+\beta}, \quad \text{with } \beta > -1. \quad (15)$$

Moreover, this observation can be extended to show that the computation of $I_P^\alpha f$ may be reduced to a one-variable fractional integral, whenever the function to be integrated can be expressed in terms of the corresponding arc-length function $s_P(\mathbf{x})$.

Proposition 4.5. *Let $\alpha, k > 0$ and consider a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^1(U)$. Suppose that for $f \in L^1_{(\alpha, P)}(U)$ there exists $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(\mathbf{x}) = g(s_P(\mathbf{x}))$. Then*

$$I_P^\alpha f(\mathbf{x}) = (I_{0+}^\alpha g)(s_P(\mathbf{x})). \quad (16)$$

Proof. By definition and Proposition 3.1, we obtain

$$\begin{aligned} I_P^\alpha f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P, \mathbf{x})}(t)]^{\alpha-1} g(s_P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))) \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P, \mathbf{x})}(t)]^{\alpha-1} g(s_{(P, \mathbf{x})}(t)) \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt. \end{aligned}$$

Then we apply the variable change $\sigma = s_{(P, \mathbf{x})}(t)$, $d\sigma = \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt$ and we obtain

$$I_P^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s_P(\mathbf{x})} (s_P(\mathbf{x}) - \sigma)^{\alpha-1} g(\sigma) d\sigma = (I_{0+}^\alpha g)(s_P(\mathbf{x})).$$

□

5 Riemann-Liouville Differentials of type (α, P)

The following notion is a direct extension of the total differentials of order $\alpha > 0$ along a given trajectory, previously proposed in [27].

Definition 5.1. *Take $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ such that $n - 1 < \alpha < n$ and some path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$. For $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, the **Riemann-Liouville total differential of type (α, P) of f at $\mathbf{x}$** is given by*

$$D_P^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := D^n I_P^{n-\alpha} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (17)$$

We say that f is (α, P) -differentiable at $\mathbf{x}$ if $D_P^\alpha f(\mathbf{x})$ exists and we express the set of (α, P) -differentiable functions in U as $D_{(\alpha, P)}(U)$. In particular, for $\alpha \in (0, 1]$, equation (17) reduces to the computation of a gradient (e.g. [39, Theorem 8.5]):

$$D_P^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \langle \nabla I_P^{1-\alpha} f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle. \quad (18)$$

We have the following *first fundamental theorem* for the operators D_P^α . Before that, let us introduce some notation:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}} := \gamma'_{\mathbf{x}}(1), \quad \mathbf{u}_{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}}\|} \quad \text{and} \quad (\mathbf{u}_{\mathbf{x}})^n := \underbrace{(\mathbf{u}_{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{u}_{\mathbf{x}})}_{n\text{-tuple}}.$$

Theorem 5.1. Let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ and a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ such that $I_P^{n-\alpha} f \in D_{(\alpha, P)}(U)$ with $n \in \mathbb{N}$ such that $n - 1 < \alpha \leq n$ with $\alpha > 0$. We have that

$$D_P^\alpha I_P^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n = f(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Proof. We first prove the result for the case $\alpha = n = 1$. From equation (18) and the classical multivariable chain rule (see, e.g., [40, Theorem 8.8]), we have

$$\frac{\partial I_P^1 f(\gamma_\mathbf{x}(t))}{\partial t} = \langle \nabla I_P^1 f(\gamma_\mathbf{x}(t)), \gamma'_\mathbf{x}(t) \rangle.$$

Evaluating at $t = 1$, it follows that

$$\left. \frac{\partial I_P^1 f(\gamma_\mathbf{x}(t))}{\partial t} \right|_{t=1} = \langle \nabla I_P^1 f(\mathbf{x}), \mathbf{v}_\mathbf{x} \rangle = D^1 I_P^1 f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_\mathbf{x}). \quad (20)$$

On the other hand, by the classical Fundamental Theorem of Calculus and (9),

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_P^1 f(\gamma_\mathbf{x}(t))}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f(P(\gamma_\mathbf{x}(t))(\tau)) \|P(\gamma_\mathbf{x}(t))'(\tau)\| d\tau \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f(\gamma_\mathbf{x}(q_{\mathbf{x},t}(\tau))) \|\gamma'_\mathbf{x}(q_{\mathbf{x},t}(\tau))\| q_{\mathbf{x},t}(\tau) d\tau \quad (u = q_{\mathbf{x},t}(\tau)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(\gamma_\mathbf{x}(u)) \|\gamma'_\mathbf{x}(u)\| du \\ &= f(\gamma_\mathbf{x}(t)) \|\gamma'_\mathbf{x}(t)\|. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\left. \frac{\partial I_P^1 f(\gamma_\mathbf{x}(t))}{\partial t} \right|_{t=1} = f(\mathbf{x}) \|\mathbf{v}_\mathbf{x}\|. \quad (21)$$

Combining both expressions (20) and (21), we obtain the desired result for $\alpha = 1$. For the case $\alpha = n$, we proceed by induction. The base case $n = 1$ has already been proved. Assume the statement holds for some $n \geq 1$; that is, $D_P^n I_P^n f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n = f(\mathbf{x})$. Then, for $n + 1$ we have

$$\begin{aligned} D_P^{n+1} I_P^{n+1} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^{n+1} &= D_P^1 (D_P^n I_P^n (I_P^1 f)(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n) (\mathbf{u}_\mathbf{x}) \\ &= D_P^1 (I_P^1 f(\mathbf{x})) (\mathbf{u}_\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

which completes the induction and proves the result for $\alpha = n$.

For an arbitrary $\alpha > 0$, it suffices to apply the integer-order case together with Proposition 4.3 (b). Indeed, let $n \in \mathbb{N}$ such that $n - 1 < \alpha < n$, then

$$\begin{aligned} D_P^\alpha I_P^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n &= D_P^n I_P^{n-\alpha} I_P^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n \\ &= D_P^n I_P^n f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n \\ &= f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

This concludes the proof. $\square$

The following result will be important to state our main second theorem. Geometrically speaking, it tells us that the maximal direction of change of the scalar field $\mathbf{x} \mapsto s_P(\mathbf{x})$ is precisely the tangent direction defined by P at each $\mathbf{x} \in U$.

Lemma 5.1. For any path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^1(U)$ such that s_P is differentiable in (the interior of) U we have

$$D^1 s_P(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x}) = 1. \quad (22)$$

Proof. The result follows from definition and the classical chain rule:

$$D^1 s_P(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\gamma'_\mathbf{x}(1)\|} \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_{P,\mathbf{x}}(t)}{\partial x^j} \bigg|_{t=1} \frac{d\gamma_\mathbf{x}^j(t)}{dt} \bigg|_{t=1} = \frac{1}{\|\gamma'_\mathbf{x}(1)\|} \frac{ds_P(\gamma_\mathbf{x}(t))}{dt} \bigg|_{t=1} = 1.$$

□

Conversely, we have the following result concerning the inverse composition of integrals and differentials of type (α, P) ; it is a *second fundamental theorem* for D_P^α . As we did previously, let us introduce auxiliary notation:

$$\mathbf{w}_\mathbf{x} := \frac{\gamma'_\mathbf{x}(0)}{\|\gamma'_\mathbf{x}(0)\|}.$$

Theorem 5.2. Let $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ with $n - 1 < \alpha \leq n$ and $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^1(U)$. If $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies $D_P^\alpha f(\cdot)(\mathbf{u}_{(\cdot)})^n \in C_{(\alpha, P)}^n(U)$, then the following identity holds:

$$I_P^\alpha D_P^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_\mathbf{x})(\mathbf{w}_\mathbf{x})^{n-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)} s_P(\mathbf{x})^{\alpha-j}. \quad (23)$$

Proof. We follow the line of reasoning from the previous theorem. First, for $\alpha = 1$ we appeal to the second fundamental theorem of calculus (e.g. [40, Theorem 10.2]), which allows us to prove the theorem for this scenario:

$$\begin{aligned} I_P^1 D^1 f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x}) &= \int_0^1 D^1 f(\gamma_\mathbf{x}(t))(\mathbf{u}_{\gamma_\mathbf{x}(t)}) \|\gamma'_\mathbf{x}(t)\| dt \\ &= \int_0^1 D^1 f(\gamma_\mathbf{x}(t))(\gamma'_\mathbf{x}(t)) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma_\mathbf{x}(t)) \\ &= f(\gamma_\mathbf{x}(1)) - f(\gamma_\mathbf{x}(0)) \\ &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}_\mathbf{x}). \end{aligned}$$

For $\alpha = n$, we proceed via induction and assume the result is valid for $n \geq 1$. Then, for $n + 1$ we see that

$$\begin{aligned} I_P^{n+1} D^{n+1} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^{n+1} &= I_P^1 I_P^n D^n (D^1 f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})) (\mathbf{u}_\mathbf{x})^n \\ &= I_P^1 \left[D^1 f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{D^{n-j+1} f(\mathbf{a}_\mathbf{x})(\mathbf{w}_\mathbf{x})^{n-j+1}}{\Gamma(n - j + 1)} s_P(\mathbf{x})^{n-j} \right] \\ &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}_\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{I_P^1 (D^{n-j+1} f(\mathbf{a}_\mathbf{x})(\mathbf{w}_\mathbf{x})^{n-j+1} s_P(\mathbf{x})^{n-j})}{\Gamma(n - j + 1)}. \end{aligned}$$

Now, let us compute the integral of type $(1, P)$ in the summand. For such purpose, we resort to Proposition 3.1, but let us notice that due to (9) we also have,

$$\mathbf{a}_{\gamma_\mathbf{x}(t)} = P(\gamma_\mathbf{x}(t))(0) = \gamma_\mathbf{x}(q_{\mathbf{x},t}(0)) = \mathbf{a}_\mathbf{x},$$

and

$$\mathbf{w}_{\gamma_{\mathbf{x}}(t)} = \frac{P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))'(\tau)|_{\tau=0}}{\|P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))'(\tau)\|_{\tau=0}} = \frac{\gamma'_{\mathbf{x}}(q_{\mathbf{x},t}(\tau))|_{\tau=0}}{\|\gamma'_{\mathbf{x}}(q_{\mathbf{x},t}(\tau))\|_{\tau=0}} = \mathbf{w}_{\mathbf{x}}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} I_P^1(D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j+1}s_P(\mathbf{x})^{n-j}) &= \int_0^1 D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{w}_{\gamma_{\mathbf{x}}(t)})^{n-j+1}s_P(\gamma_{\mathbf{x}}(t))^{n-j}\|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\|dt \\ &= \int_0^1 D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j+1}s_{(P,\mathbf{x})}(t)^{n-j}\|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\|dt \\ &= D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j+1}\int_0^1 s_{(P,\mathbf{x})}(t)^{n-j}\|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\|dt \\ &= D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j+1}I_P^1s_P(\mathbf{x})^{n-j} \\ &= D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j+1}\frac{\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n-j+2)}s_P(\mathbf{x})^{n-j+1}, \end{aligned}$$

where the last equality follows from (15) for $\alpha = 1$ and $\beta = n - j$. Therefore, continuing with the foregoing computations,

$$\begin{aligned} I_P^{n+1}D^{n+1}f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_{\mathbf{x}})^{n+1} &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^n \frac{D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j+1}s_P(\mathbf{x})^{n-j+1}}{\Gamma(n-j+2)} \\ &= f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{D^{n-j+1}f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n+1-j}s_P(\mathbf{x})^{n+1-j}}{\Gamma(n-j+2)} \end{aligned}$$

and the result follows in this case. Moving forward, for $\alpha > 0$ and $n \in \mathbb{N}$ with $n - 1 < \alpha \leq n$ we see that applying the integer-order case to the function $I_P^{n-\alpha}f(\mathbf{x})$ we obtain

$$\begin{aligned} I_P^n D^n I_P^{n-\alpha} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_{\mathbf{x}})^n &= I_P^{n-\alpha} f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{D^{n-j} I_P^{n-\alpha} f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} s_P(\mathbf{x})^{n-j} \\ &= I_P^{n-\alpha} f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} s_P(\mathbf{x})^{n-j}. \end{aligned}$$

Now let us employ Proposition 4.3 (b), it follows that

$$I_P^{n-\alpha} (I_P^{\alpha} D_P^{\alpha} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_{\mathbf{x}})^n - f(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} s_P(\mathbf{x})^{n-j}.$$

Thus, using Theorem 5.1 and Lemma 5.1 we deduce that

$$\begin{aligned} I_P^{\alpha} D_P^{\alpha} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_{\mathbf{x}})^n - f(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} D_P^{n-\alpha} s_P(\mathbf{x})^{n-j}(\mathbf{u}_{\mathbf{x}}) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}_{\mathbf{x}})^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} D^1 I_P^{1-n+\alpha} s_P(\mathbf{x})^{n-j}(\mathbf{u}_{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_x)(\mathbf{w}_x)^{n-j}}{\Gamma(\alpha-j+2)} D^1 s_P(\mathbf{x})^{\alpha-j+1}(\mathbf{u}_x). \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_x)(\mathbf{w}_x)^{n-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} s_P(\mathbf{x})^{\alpha-j} D^1 s_P(\mathbf{x})(\mathbf{u}_x) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha-j} f(\mathbf{a}_x)(\mathbf{w}_x)^{n-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} s_P(\mathbf{x})^{\alpha-j}.
\end{aligned}$$

□

6 Riemann-Liouville Operators of Type (α, k, P)

We now proceed to generalize the definition of the Riemann–Liouville fractional integral of f of type (α, P) by perturbing the order α via an additional parameter $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Accordingly, we introduce the following definition.

Definition 6.1. Let $\alpha, k > 0$ and P a j -th order path choice on $U \subseteq \mathbb{R}^d$ for some $j \in \mathbb{N}$. For $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, the **Riemann-Liouville fractional integral of f of type (α, k, P) at $\mathbf{x}$** is defined as

$$I_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x}) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P, \mathbf{x})}(t)]^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt. \quad (24)$$

Observe that, according to equations (24) and (11), the operator $I_P^{(\alpha, k)} \rightarrow I_P^{\alpha}$ (pointwise) when $k \rightarrow 1$.

Remark 6.1. From Definition 6.1 and Proposition 2.1 it may be obtained the following functional relation between Riemann-Liouville fractional integrals of type (α, k, P) and the corresponding operators of type $(\frac{\alpha}{k}, P)$:

$$\begin{aligned}
I_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P, \mathbf{x})}(t)]^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt \\
&= \frac{1}{kk^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma(\alpha/k)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P, \mathbf{x})}(t)]^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt \\
&= \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{k}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha/k)} \int_0^1 [s_P(\mathbf{x}) - s_{(P, \mathbf{x})}(t)]^{\frac{\alpha}{k}-1} f(\gamma_{\mathbf{x}}(t)) \|\gamma'_{\mathbf{x}}(t)\| dt \\
&= k^{-\frac{\alpha}{k}} I_P^{\frac{\alpha}{k}} f(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

This means that we can remit ourselves to Definition 4.1 to deduce results concerning $I_P^{(\alpha, k)}$.

Remark 6.2. With respect to the function spaces associated to the (α, k, P) operators introduced above, they can be expressed in terms of the function spaces from Definitions 4.2 and 4.3, due to Remarks 6.1 and 6.3; for example, the space of functions whose Riemann-Liouville integral of type (α, k, P) exists on U is precisely $L^1_{(\alpha/k, P)}$. Interestingly, because of Corollary 4.1 we can affirm that for $\alpha, k > 0$ such that $0 < \alpha \leq k$ we have $L^1_{(\alpha/k, P)}(U) \subseteq L^1_{(k/\alpha, P)}(U)$, i.e., the space of functions whose Riemann-Liouville integral of type (α, k, P) exists on U is contained in the space of functions whose Riemann-Liouville integral of type (k, α, P) exists on U , whenever $0 < \alpha \leq k$.

In fact, using Proposition 4.3, we obtain immediately the following.

Proposition 6.1. *Let $\alpha > 0$ be fixed and $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^1(U)$ is any path choice. For $f \in L^1_{(\alpha/k, P)}(U)$, letting $k \rightarrow \infty$ we get $I_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$.*

Analogously to Definition 5.1,

Definition 6.2. *Take $\alpha, k > 0$, $n \in \mathbb{N}$ such that $n - 1 < \frac{\alpha}{k} \leq n$ and a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$. For $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, the **Riemann-Liouville total differential of type (α, k, P) of f at $\mathbf{x}$** is*

$$D_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := k^n D^n I_P^{(nk-\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (25)$$

Regarding Definition 6.2 with $\alpha \in (0, k]$, our definition of the total differential simplifies analogously:

$$D_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) := k \langle \nabla I_P^{(k-\alpha, k)} f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle. \quad (26)$$

Remark 6.3. *Following Remark 6.1, we have the following equivalence:*

$$\begin{aligned} D_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) &= k^n D^n I_P^{(nk-\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= k^n k^{-\frac{nk-\alpha}{k}} D^n I_P^{\frac{nk-\alpha}{k}} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= k^{\frac{\alpha}{k}} D_P^{\frac{\alpha}{k}} f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Using the relationships between operators of type (α, k, P) and $(\alpha/k, P)$, it is immediate to extend the properties proven above. In particular, the fundamental theorems from the last section take the subsequent form.

Theorem 6.1. *Let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ and a path choice $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^j(U)$ such that $I_P^{n-\alpha/k} f \in D_{(\alpha/k, P)}(U)$ with $n \in \mathbb{N}$ such that $n - 1 < \frac{\alpha}{k} \leq n$ with $\alpha > 0$. Then*

$$D_P^{(\alpha, k)} I_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n = f(\mathbf{x}). \quad (27)$$

Theorem 6.2. *Let $\alpha, k > 0$, $n \in \mathbb{N}$ with $n - 1 < \frac{\alpha}{k} \leq n$ and $P : U \rightarrow \mathfrak{C}^1(U)$. If $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies $D_P^{(\alpha, k)} f(\cdot)(\mathbf{u}_{(\cdot)})^n \in C^n_{(\alpha/k, P)}(U)$, then the following identity holds:*

$$I_P^{(\alpha, k)} D_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{(\alpha-kj, k)} f(\mathbf{a}_\mathbf{x})(\mathbf{w}_\mathbf{x})^{n-j}}{\Gamma_k(\alpha - kj + k)} s_P(\mathbf{x})^{\frac{\alpha}{k}-j}. \quad (28)$$

Proof. We use the relationships between the fractional operators of types (α, P) and (α, k, P) , as well as equation (1):

$$\begin{aligned} I_P^{(\alpha, k)} D_P^{(\alpha, k)} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n &= I_P^{\alpha/k} D_P^{\alpha/k} f(\mathbf{x})(\mathbf{u}_\mathbf{x})^n \\ &= f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{\alpha/k-j} f(\mathbf{a}_\mathbf{x})(\mathbf{w}_\mathbf{x})^{n-j}}{\Gamma(\alpha/k - j + 1)} s_P(\mathbf{x})^{\alpha/k-j} \\ &= f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{k^{\frac{\alpha-kj+k}{k}-1} D_P^{\alpha/k-j} f(\mathbf{a}_\mathbf{x})(\mathbf{w}_\mathbf{x})^{n-j}}{\Gamma_k(\alpha - kj + k)} s_P(\mathbf{x})^{\alpha/k-j} \\ &= f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{D_P^{(\alpha-kj, k)} f(\mathbf{a}_\mathbf{x})(\mathbf{w}_\mathbf{x})^{n-j}}{\Gamma_k(\alpha - kj + k)} s_P(\mathbf{x})^{\alpha/k-j}. \end{aligned}$$

□

Remark 6.4. *For $k = 1$, Theorems 6.1 and 6.2 reduce to Theorems 5.1 and 5.2, respectively.*

7 Conclusions

We reassessed the fractional trajectory integrals and differentials proposed in [27] via the Path Choice concept, which gave rise to the Riemann-Liouville trajectory operators of type (α, P) . They recovered some partial fractional integrals and differentials from the classic theory and featured remarkable properties, analogous to those of their one-variable counterparts. In addition, we have considered an additional modification of the previous proposal via the additional perturbation parameter k , in order to produce (α, k, P) trajectory operators; this way, from the fundamental relations between the (α, P) and (α, k, P) operators, we were capable of extending the results for the type (α, P) to those concerning the type (α, k, P) .

As expected, many other results and characteristics of the (α, k, P) operators remain to be explored in future efforts, as well as potential models to be implemented using our paradigm. Undoubtedly, the knowledge explored and exploited in this contribution enriches the area of Fractional Multivariable Calculus.

8 Acknowledgments

The authors appreciate the valuable suggestions from the referees and the constant follow-up from the JOBS editors. Last but not least, the first author would like to express his acknowledgments to SECIHTI (No. of CVU 1312206) for the financial support throughout his master degree program.

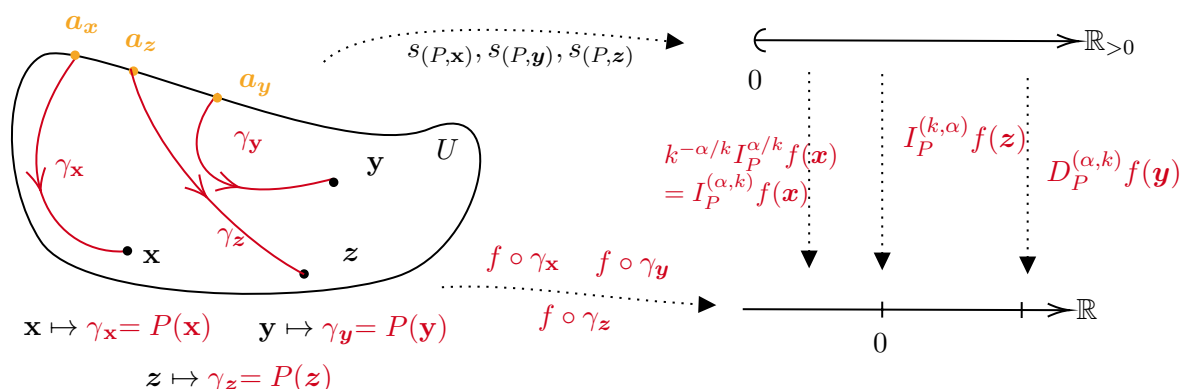
9 Conflict of Interest

The authors declare no conflicts of interest.

10 Artificial Intelligence Usage Statement

The authors declare that they have not used any generative artificial intelligence applications, software or websites for the writing of the present paper, the design of tables and figures or the analysis and interpretation of the data.

11 Graphical Abstract



12 Contribution Roles

Contribution	Author(s)
Research	Roberto Carlos Balcázar-Araiza Nelson Ricardo Ojeda
Methodology	Roberto Carlos Balcázar-Araiza Nelson Ricardo Ojeda
Writing and Original Draft	Roberto Carlos Balcázar-Araiza Nelson Ricardo Ojeda
Revision and Edition	Roberto Carlos Balcázar-Araiza Nelson Ricardo Ojeda

References

- [1] E. G. Bazhlekova, “Fractional evolution equations in banach spaces”, Ph.D. dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, 2001. DOI: 10.6100/IR549476 [Online]. Available: [https://research.tue.nl/en/publications/fractional-evolution-equations-in-banach-spaces\(dc185d63-bb34-4122-a3ea-34033f791577\).html](https://research.tue.nl/en/publications/fractional-evolution-equations-in-banach-spaces(dc185d63-bb34-4122-a3ea-34033f791577).html)
- [2] Y. Luchko and M. Yamamoto, “The general fractional derivative and related fractional differential equations”, *Mathematics*, vol. 8, no. 12, p. 2115, Nov. 26, 2020, ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math8122115 [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/12/2115>
- [3] V. E. Tarasov, “General fractional calculus in multi-dimensional space: Riesz form”, *Mathematics*, vol. 11, no. 7, p. 1651, Mar. 29, 2023, ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math11071651 [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2227-7390/11/7/1651>
- [4] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon & Breach Science Publishers, 1993.
- [5] A. Kochubei and Y. Luchko, Eds., *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, red. by J. Tenreiro-Machado, vol. 1, 8 vols., Berlin/Boston: De Gruyter, 2019, ISBN: 978-3-11-057162-2.
- [6] M. Aziz-Alaoui, “Study of a leslie–gower-type tritrophic population model”, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 14, no. 8, pp. 1275–1293, Nov. 2002, ISSN: 09600779. DOI: 10.1016/S0960-0779(02)00079-6 [Online]. Available: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960077902000796>
- [7] H.-L. Li, L. Zhang, C. Hu, Y.-L. Jiang, and Z. Teng, “Dynamical analysis of a fractional-order predator-prey model incorporating a prey refuge”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol. 54, no. 1, pp. 435–449, Jun. 2017, ISSN: 1598-5865, 1865-2085. DOI: 10.1007/s12190-016-1017-8 [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/s12190-016-1017-8>
- [8] J. E. Escalante-Martínez, P. Toledo, and J. A. Zavaleta-Viveros, “Fractional derivatives and hopf bifurcation in ecological interactions among plants, pollinators, and herbivores”, in *Advances in Fractional Calculus*, J. J. Rosales García, J. E. Escalante-Martínez, F. A. Godínez Rojano, J. C. Mendiola Fuentes, and L. Torres, Eds., vol. 21, Series Title: Modeling and Optimization in Science and Technologies, Cham: Springer Nature Switzerland, 2025, pp. 49–60, ISBN: 978-3-031-83988-7. DOI: 10.1007/978-3-031-83989-4_3 [Online]. Available: https://link.springer.com/10.1007/978-3-031-83989-4_3

- [9] J. F. Gomez-Aguilar, J. J. Rosales-Garcia, J. J. Bernal-Alvarado, T. Cordova-Fraga, and R. Guzman-Cabrera, “Fractional mechanical oscillators”, *Rev. Mex. Fis.*, 2012.
- [10] J. F. Gomez-Aguilar, T. Cordova-Fraga, J. E. Escalante-Martinez, C. Calderon-Ramon, and R. F. Escobar-Jimenez, “Electrical circuits described by a fractional derivative with regular kernel”, *Rev. Mex. Fis.*, 2016.
- [11] S. Alizadeh, D. Baleanu, and S. Rezapour, “Analyzing transient response of the parallel RCL circuit by using the caputo–fabrizio fractional derivative”, *Advances in Difference Equations*, vol. 2020, no. 1, p. 55, Dec. 2020, ISSN: 1687-1847. DOI: 10.1186/s13662-020-2527-0 [Online]. Available: <https://advancesindifferenceequations.springeropen.com/articles/10.1186/s13662-020-2527-0>
- [12] S. Majee, T. K. Kar, S. Jana, D. K. Das, and J. J. Nieto, “Complex dynamics and fractional-order optimal control of an epidemic model with saturated treatment and incidence”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 33, no. 16, p. 2350192, Dec. 30, 2023, ISSN: 0218-1274, 1793-6551. DOI: 10.1142/S0218127423501924 [Online]. Available: <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0218127423501924>
- [13] S. Soulaïmani and A. Kaddar, “Analysis and optimal control of a fractional order SEIR epidemic model with general incidence and vaccination”, *IEEE Access*, vol. 11, pp. 81995–82002, 2023, ISSN: 2169-3536. DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3300456 [Online]. Available: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10198259/>
- [14] S. Mangal, O. Misra, and J. Dhar, “Modeling infectious respiratory diseases considering fear effect and latent period”, *Results in Control and Optimization*, vol. 16, p. 100439, Sep. 2024, ISSN: 26667207. DOI: 10.1016/j.rico.2024.100439 [Online]. Available: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2666720724000699>
- [15] S. Borjon-Espejel, J. Escalante-Martinez, and P. Padilla-Longoria, “Newtonian gravity and MOND: A fractional fourier approach”, *Indian Journal of Physics*, vol. 96, no. 12, pp. 3405–3411, Oct. 2022, ISSN: 0973-1458, 0974-9845. DOI: 10.1007/s12648-022-02296-1 [Online]. Available: <https://link.springer.com/10.1007/s12648-022-02296-1>
- [16] J. Mendiola-Fuentes, E. Guerrero-Ruiz, and J. Rosales-García, “Multivariate mittag-leffler solution for a forced fractional-order harmonic oscillator”, *Mathematics*, vol. 12, no. 10, p. 1502, May 11, 2024, ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math12101502 [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2227-7390/12/10/1502>
- [17] M. Li, “Analytic theory of seven classes of fractional vibrations based on elementary functions: A tutorial review”, *Symmetry*, vol. 16, no. 9, p. 1202, Sep. 12, 2024, ISSN: 2073-8994. DOI: 10.3390/sym16091202 [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2073-8994/16/9/1202>
- [18] Y. Luchko, “A new fractional calculus model for the two-dimensional anomalous diffusion and its analysis”, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 11, no. 3, A. Nepomnyashchy and V. Volpert, Eds., pp. 1–17, 2016, ISSN: 0973-5348, 1760-6101. DOI: 10.1051/mmnp/201611301 [Online]. Available: <http://www.mmnp-journal.org/10.1051/mmnp/201611301>
- [19] S. Fomin, V. Chugunov, and T. Hashida, “Mathematical modeling of anomalous diffusion in porous media”, *Fractional Differential Calculus*, no. 1, pp. 1–28, 2011, ISSN: 1847-9677. DOI: 10.7153/fdc-01-01 [Online]. Available: <https://fdc.ele-math.com/01-01>

- [20] H. Sun, W. Chen, C. Li, and Y. Chen, “Fractional differential models for anomalous diffusion”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 389, no. 14, pp. 2719–2724, Jul. 2010, ISSN: 03784371. DOI: 10.1016/j.physa.2010.02.030 [Online]. Available: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378437110001573>
- [21] V. E. Tarasov and S. S. Tarasova, “Fractional derivatives and integrals: What are they needed for?”, *Mathematics*, vol. 8, no. 2, p. 164, Jan. 25, 2020, ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math8020164 [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/2/164>
- [22] S. T. Mohyud-Din, A. Ali, and B. Bin-Mohsin, “On biological population model of fractional order”, *International Journal of Biomathematics*, vol. 09, no. 5, p. 1650070, Sep. 2016, ISSN: 1793-5245, 1793-7159. DOI: 10.1142/S1793524516500704 [Online]. Available: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1793524516500704>
- [23] X. Zhou, Y. Mao, C. Zhang, and Q. He, “A comprehensive performance improvement control method by fractional order control”, *IEEE Photonics Journal*, vol. 10, no. 5, pp. 1–11, Oct. 2018, ISSN: 1943-0655, 1943-0647. DOI: 10.1109/JPHOT.2018.2865032 [Online]. Available: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8434365/>
- [24] V. E. Tarasov, *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media* (Nonlinear physical science). Beijing: Higher Education Press, 2010, 504 pp., ISBN: 978-7-04-029473-6.
- [25] M. Al-Refai and Y. Luchko, “The general fractional integrals and derivatives on a finite interval”, *Mathematics*, vol. 11, no. 4, p. 1031, Feb. 17, 2023, ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math11041031 [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2227-7390/11/4/1031>
- [26] J. Cheng and W. Dai, “Fractional vector taylor and cauchy mean value formulas”, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, vol. 11, no. 2, pp. 130–147, Jul. 2020, ISSN: 2090-5858.
- [27] R. C. Balcázar-Araiza and M. Navarro, “On riemann-liouville operators for functions of one and several variables”, *Journal of Basic Sciences*, vol. 11, no. 30, pp. 1–15, 2025, ISSN: 2448-4997.
- [28] R. C. Balcázar-Araiza, “A fractional fundamental theorem of immersions”, Master Thesis, Universidad Autónoma de Yucatán, México, 2025, 139 pp.
- [29] S. Mubeen and G. M. Habibullah, “K -fractional integrals and application”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 7, no. 2, pp. 89–94, 2012.
- [30] G. A. Dorrego, “An alternative definition for the k-riemann-liouville fractional derivative”, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, pp. 481–491, 2015, ISSN: 13147552. DOI: 10.12988/ams.2015.411893 [Online]. Available: <http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-9-12-2015/411893.html>
- [31] R. Díaz and E. Pariguan, “On hypergeometric functions and pochhammer k-symbol”, *Divulgaciones Matemáticas*, vol. 15, no. 2, pp. 179–192, 2007.
- [32] L. G. Romero and L. L. Luque, “K-weyl fractional derivative, integral and integral transform”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 8, pp. 263–270, 2013, ISSN: 1314-7544. DOI: 10.12988/ijcms.2013.13028 [Online]. Available: <http://www.m-hikari.com/ijcms/ijcms-2013/5-8-2013/13028.html>
- [33] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory And Applications of Fractional Differential Equations* (North-Holland Mathematical Studies 204), red. by Jan van Mill. Elsevier, 2006.

- [34] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1974, 222 pp., ISBN: 978-0-13-212605-2.
- [35] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Oct. 22, 2001. DOI: 10.48550/arXiv.math/0110241 arXiv: math/0110241. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/math/0110241>
- [36] H. Royden and P. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4th ed. China Machine Press, 2010.
- [37] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type* (Lecture Notes in Mathematics). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, vol. 2004, ISBN: 978-3-642-14573-5. DOI: 10.1007/978-3-642-14574-2 [Online]. Available: <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-14574-2>
- [38] H. D. Junghenn, *Principles of analysis: measure, integration, functional analysis, and applications*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018, 520 pp., ISBN: 978-1-4987-7328-7.
- [39] T. M. Apostol, *Calculus II: Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y las probabilidades*, 2nd ed., trans. by José Pla Carrera, 2 vols. España: Editorial Reverté, 1976, vol. 2, ISBN: 978-84-291-5004-9.
- [40] T. M. Apostol, *Calculus I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*, trans. by Francisco Vélez Cantarell, 2 vols. México: Reverté Ediciones, 1984, vol. 1, ISBN: 978-968-6708-10-3.

Finite element method for a one-dimensional conformable differential equation with Dirichlet boundary condition

Método de elementos finitos para una ecuación diferencial conformable unidimensional con condiciones de frontera de Dirichlet

Toledo, Porfirio¹ , Hernández-Linares, Carlos Alberto^{1,*} ,
Avendaño-Garrido, Martha Lorena¹ 

¹Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, Xalapa, Ver., México.

*carlhernandez@uv.mx

Abstract

This paper presents a numerical scheme for a one-dimensional differential equation involving the conformable derivative with Dirichlet boundary conditions, developed within the framework of the finite element method. Starting from a weak formulation based on a conformable version of the fundamental lemma of the calculus of variations, the method is implemented using piecewise-defined test functions over a partition of the domain. The locality of the conformable operator allows for a direct adaptation of standard finite element techniques. Numerical experiments are carried out for different values of the order of derivation α , the results show a smooth transition in the approximated solutions as α approaches one, consistently recovering the classical case.

Keywords: *Non-integer order calculus, Conformable derivative, Calculus of variations, Finite element method, Conformable differential equations.*

Resumen

Este artículo presenta un esquema numérico para una ecuación diferencial unidimensional que involucra la derivada conformable con condiciones de frontera de Dirichlet, desarrollado dentro del marco del método de elemento finito. Partiendo de una formulación débil basada en una versión conformable del lema fundamental del cálculo de variaciones, el método se implementa utilizando funciones de prueba definidas por partes sobre una partición del dominio. La localidad del operador conformable permite una adaptación directa de las técnicas estándar de elemento finito. Se llevan a cabo experimentos numéricos para diferentes valores del orden de derivación α , los resultados muestran una transición suave en las soluciones aproximadas a medida que α se aproxima a uno, recuperando de forma consistente el caso clásico.

Palabras claves: *Cálculo de orden no entero, Derivada conformable, Cálculo de variaciones, Método de elemento finito, Ecuaciones diferenciales conformables.*

Recibido: 31 de octubre de 2025. Aceptado: 23 de mayo de 2026. Publicado: 31 de agosto de 2026.

1 Introduction

The non-integer order calculus has its origins in the 17th century. The correspondence between L'Hôpital and Leibniz, in which they discussed the meaning of a derivative of order $1/2$, is well known in this context [18]. Over time, these ideas led to the development of several fractional operators, including the Riemann–Liouville, Caputo, and Grünwald–Letnikov derivatives, as well as more recent local formulations such as the conformable derivative. These operators generalize the classical concept of differentiation and have given rise to a well-established theoretical framework with numerous applications. While classical fractional derivatives are typically nonlocal and model memory and hereditary effects in dynamical systems [6, 12], local operators, such as the conformable derivative, preserve key structural properties of ordinary differential calculus [1, 11, 22]. This structural compatibility makes them particularly suitable for integration into variational and numerical frameworks [7, 9, 13, 21].

Sales Teodoro et al. [22] propose a classification of fractional and related operators based on both structural and functional criteria. They divide them into four classes: classical fractional derivatives, such as Caputo, Grünwald–Letnikov, and Riemann–Liouville; modified derivatives, including Canavati, Hadamard, Hilfer, Jumarie, Marchaud, and Weyl; local operators, such as Chen, conformable, deformable, Katugampola, Kolwanker, $\mathcal{M}$ -operator, and $\mathcal{V}$ -truncated operator; and operators with nonsingular kernels, including Atangana–Baleanu, Caputo–Fabrizio, and Yang et al.

Starting in the 1990s, formulations of local non-integer derivatives were developed to reinterpret fractionality from a perspective more compatible with classical analysis. Unlike traditional fractional derivatives, these definitions do not rely on integral operators over intervals but are constructed through pointwise limits, allowing fundamental calculus rules to be preserved. In [22], five conditions are proposed that a local operator must satisfy: linearity, equivalence with the classical derivative when the order is one, vanishing derivative for constants, validity of the product rule, and compliance with the chain rule.

Local non-integer order operators, such as the conformable derivative, have diverse and relevant applications, extending the scope of classical differential calculus to model phenomena in biology [23, 25], ecology [10, 17], chemistry [2, 3], physics [8, 20], and engineering [5, 16], among other areas. Consequently, studying differential equations involving such operators is of considerable interest, as it enables the extension of classical calculus tools to more general settings. Furthermore, when analytical solutions are difficult to obtain, these operators facilitate the development of efficient numerical methods for approximating solutions.

In general, for fractional differential equations, a wide variety of numerical methods have been developed, including finite difference schemes, predictor–corrector approaches, spectral methods, and finite element formulations. Comprehensive treatments of the analysis and numerical approximation of fractional differential equations can be found in [6, 14]. In the context of conformable derivatives, the development of numerical methods is more recent. Initial contributions include discretization procedures and computational treatments for conformable differential equations [24]. Subsequently, finite element techniques adapted to conformable operators have been proposed. In particular, modified finite element schemes based on cubic B-spline basis functions have been applied to conformable space–time fractional nonlinear models [7]. More recently, a conformable finite element formulation has been presented, incorporating a variational framework, the construction of suitable basis functions, and corresponding error estimates for conformable fractional partial differential equations [21]. These contributions show that the extension of Galerkin and finite element techniques to conformable fractional operators remains an active line of research.

Among the various numerical techniques available for differential equations, the finite element

method stands out due to its versatility and its ability to handle complex geometries and boundary conditions. Over the years, it has evolved alongside the modeling of physical systems across various disciplines [15]. In this context, the local structure of operators such as the conformable derivative makes them particularly well suited for integration into finite element formulations. Unlike nonlocal operators, they do not require knowledge of the entire function history, which simplifies their numerical implementation. Furthermore, their ability to preserve essential properties of the classical derivative facilitates their incorporation into standard variational frameworks. For these reasons, applying the finite element method to conformable differential equations provides a coherent extension of the classical theory to fractional models with local characteristics.

The purpose of this work is to formulate and analyze a numerical scheme for differential equations involving the conformable derivative. The proposed approach employs the finite element method and adapts the fundamental lemma of the calculus of variations to the conformable setting in order to derive the corresponding weak formulation. This formulation serves as the basis for constructing the numerical scheme through domain discretization and the use of piecewise-defined test functions. The method is applied to different derivative orders, and the results are examined to analyze how the approximated solutions respond to variations in the order parameter. The local nature of the conformable operator enables its integration into the numerical framework and facilitates its extension to broader classes of problems.

This paper is organized as follows. Section 2 presents the basic definitions and main results of conformable calculus, together with the fundamental tools from conformable variational calculus. Section 3 develops the finite element formulation for a conformable differential equation and includes a numerical example. Finally, section 4 provides the conclusions.

2 Fundamentals of conformable calculus

To establish the theoretical framework required for the numerical formulation, we now review the main concepts of conformable calculus. Among the local definitions of non-integer differential operators, one of the most widely recognized is the conformable derivative introduced by Khalil et al. [11]. This operator is defined through a limit that extends the classical notion of differentiation while preserving several of its fundamental properties. The formal definition is presented below.

2.1 Basic definitions and results

Definition 2.1. Let $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. For $t > 0$ and $\alpha \in (0, 1]$, the conformable derivative of order α is defined by

$$T^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}. \quad (1)$$

This operator is local and satisfies the fundamental properties of classical calculus, such as linearity, the derivative of a constant being equal to zero, and the product, quotient, and chain rules.

Subsequently, Abdeljawad [1] modified this proposal to define left and right conformable derivatives, shifting the reference point towards the endpoints of the definition interval.

Definition 2.2. Let $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. For $t > a$ and $\alpha \in (0, 1]$, the left derivative starting from a of order α is defined by

$$T_a^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon(t - a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}. \quad (2)$$

If f is left α -derivable starting from a at every point $t > a$ and $\lim_{t \rightarrow a^+} T_a^\alpha f(t)$ exists, then the corresponding derivative at a is defined as

$$T_a^\alpha f(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} T_a^\alpha f(t). \quad (3)$$

Note that if $a = 0$, we recover Khalil's definition

$$T^\alpha f(t) = T_0^\alpha f(t). \quad (4)$$

For a function $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, the right derivative ${}_b^\alpha T f(t)$ of order α terminating at b is defined analogously (see [1]).

To illustrate the relationship between these formulations, we consider the function $f(t) = \sin(t)$ and compute its conformable derivative for representative values of $\alpha \in (0, 1]$. The results obtained using the definition of Khalil et al. and the formulation proposed by Abdeljawad (with $a = 2$) are displayed in Figure 1(a) and Figure 1(b), respectively. The graphical comparison shows that both approaches yield curves with the same qualitative behavior. In particular, the factor $t^{1-\alpha}$ governs the amplitude variation as α decreases, while the local character of the operator is preserved in both cases.

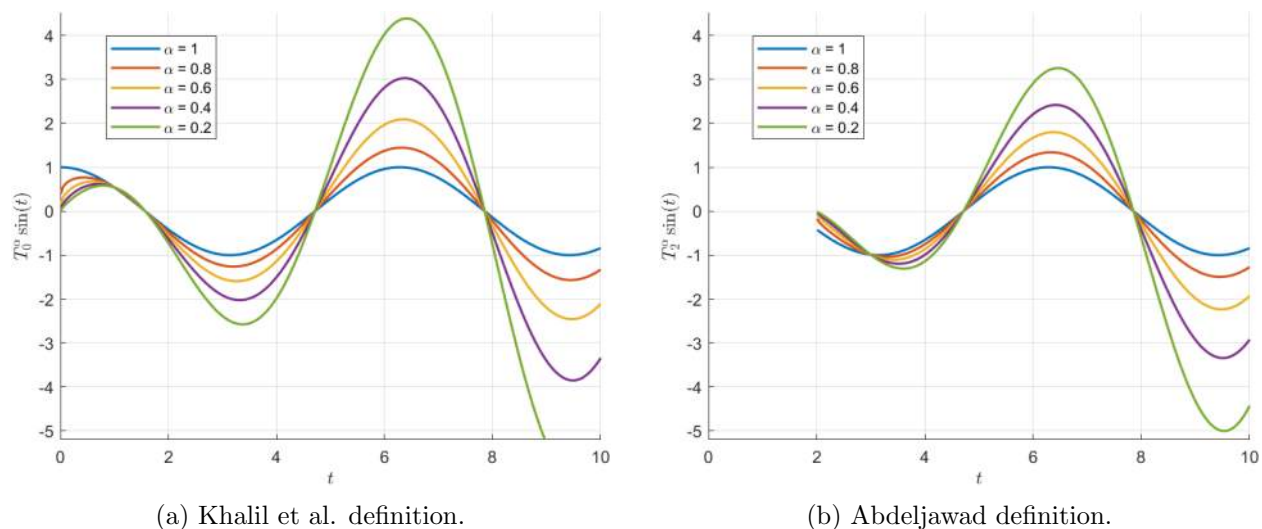


Figure 1: Comparison of the conformable derivative of $\sin(t)$ for different values of α .

These definitions preserve the fundamental properties of classical differential calculus. From a physical point of view, the derivative is maintained as a measure of velocity, although this velocity is now modulated by a function that introduces dependency on the non-integer order. This allows for the description of trajectories of local change that are more flexible. Geometrically, this derivative represents Newton's quotient with increments advancing at a deformed scale proportional to a power of $t - a$. Furthermore, it retains the properties of the integer-order derivative definition (see [1, 11]).

Theorem 2.1. Let $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be functions that are left α -differentiable starting from a at a point $t > a$, with $\alpha \in (0, 1]$. Then, the conformable derivative T_a^α satisfies the following properties.

1. *Linearity:* For any $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $T_a^\alpha(k_1 f + k_2 g)(t) = k_1 T_a^\alpha f(t) + k_2 T_a^\alpha g(t)$.

2. *Equivalence with the ordinary derivative for order $\alpha = 1$:* $T_a^1 f(t) = f'(t)$.
3. *Derivative of a constant:* For any constant $k \in \mathbb{R}$, $T_a^\alpha k = 0$.
4. *Product rule:* $T_a^\alpha(fg)(t) = T_a^\alpha f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot T_a^\alpha g(t)$.
5. *Chain rule:* If $g(t) \neq 0$, then $T_a^\alpha(f \circ g)(t) = T_a^\alpha f(g(t)) \cdot T_a^\alpha g(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$.

The properties established in the previous result satisfy the criteria proposed in [22] for the conformable derivative to be considered a non-integer order operator. Furthermore, these properties are complemented by additional ones adopted from the classical definition, which will be useful throughout this work and are presented below for subsequent reference.

Theorem 2.2. *If $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is left α -differentiable starting from a at a point $t > a$, with $\alpha \in (0, 1]$, then f is continuous at t .*

Proof. If $h \neq 0$, setting $\varepsilon = \frac{h}{(t-a)^{1-\alpha}}$, we have that $\varepsilon \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. Since f is α -differentiable at t , it follows that

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) - f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) - f(t)) \frac{(t-a)^{1-\alpha}}{h} \frac{h}{(t-a)^{1-\alpha}} = T_a^\alpha f(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(t-a)^{1-\alpha}}. \quad (5)$$

This guarantees that f is continuous at t . □

Theorem 2.3. *If $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable at $t > a$, then*

$$T_a^\alpha f(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t), \quad (6)$$

for $\alpha \in (0, 1]$.

Proof. If $\varepsilon \neq 0$, setting $h = \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ we have that $h \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. Since f is differentiable at t , we have that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} (t-a)^{1-\alpha}. \quad (7)$$

From which we conclude that $T_a^\alpha f(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$. □

The corollaries stated below follow directly from the preceding theorem.

Corollary 2.1. *If $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is twice differentiable at $t > a$, then $T_a^\alpha f$ is α -differentiable at t .*

Corollary 2.2. *If $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable at $t > a$, then*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} (T_a^\alpha f)(t) = f'(t), \quad (8)$$

for each $t \in (a, +\infty)$.

Corollary 2.3. *If $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, with $f_n : [a, \infty)$, is a sequence of differentiable functions such that $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ converges uniformly to a function g . Then $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converges uniformly to a differentiable function f , with $f' = g$ and $\{T_a^\alpha f_n\}_{n=1}^\infty$ converges uniformly to $T_a^\alpha f$.*

As with the derivative, we can define the left and the right conformable integral of order α .

Definition 2.3. Let $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. For $t > a$ and $\alpha \in (0, 1]$, the left integral of order α is defined by

$$I_a^\alpha f(t) = \int_a^t f(s) d\alpha(s, a) = \int_a^t f(s)(s-a)^{\alpha-1} ds. \quad (9)$$

The right integral is defined analogously (see [1, 11]). It is easy to see that it is possible to calculate the left integral of order α when f is continuous. Furthermore, we have a result equivalent to the fundamental theorem of calculus.

Theorem 2.4. If $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable on $(a, +\infty)$, then

$$I_a^\alpha (T_a^\alpha f)(t) = f(t) - f(a), \quad (10)$$

for $\alpha \in (0, 1]$.

Proof. According to Theorem 2.3 we have

$$I_a^\alpha (T_a^\alpha f)(t) = \int_a^t (s-a)^{1-\alpha} f'(s)(s-a)^{\alpha-1} ds = \int_a^t f'(s) ds = f(t) - f(a). \quad (11)$$

□

2.2 Piecewise defined functions

Piecewise defined functions are of particular interest in the study of differential equations, especially when numerical methods are used to approximate solutions. Many techniques, such as the finite element method, construct approximate solutions within function spaces formed by piecewise continuous or piecewise differentiable functions. This allows domains with discontinuities or abrupt changes in problem conditions to be handled efficiently. The following definitions of piecewise continuous and piecewise differentiable functions can be found in [4].

Definition 2.4. A function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is piecewise continuous on $[a, b]$ if:

1. The function f is bounded on $[a, b]$.
2. For every $t \in [a, b)$, $\lim_{s \rightarrow t^+} f(s)$ exists.
3. For every $t \in (a, b]$, $\lim_{s \rightarrow t^-} f(s)$ exists.
4. There exists a partition $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ of $[a, b]$ and f is continuous on each subinterval (t_{i-1}, t_i) .

Based on the previous definition, it is possible to define a piecewise differentiable function from a piecewise continuous one.

Definition 2.5. A function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is piecewise differentiable on $[a, b]$ if:

1. The function f is continuous on $[a, b]$.
2. There exists a piecewise continuous function g and $c \in \mathbb{R}$ such that

$$f(t) = c + \int_a^t g(s) ds \quad (12)$$

for every $t \in [a, b]$.

For this type of function, the conclusion of Theorem 2.4 is also valid.

Theorem 2.5. *If $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is piecewise differentiable on $[a, t]$ for every $t > a$, then*

$$I_a^\alpha(T_a^\alpha f)(t) = f(t) - f(a), \quad (13)$$

for $\alpha \in (0, 1]$.

Proof. Given $t > a$, there exists a piecewise continuous function $g : [a, t] \rightarrow \mathbb{R}$ and a constant $c \in \mathbb{R}$ such that

$$f(u) = c + \int_a^u g(s)ds, \quad (14)$$

for every $u \in [a, t]$. Let $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ be the partition of $[a, t]$ determined by g and $P = \{t_1, \dots, t_{n-1}\}$. In this case, for every $u \in [a, t] \setminus P$ we have $f'(u) = g(u)$.

By Theorem 2.3 we have

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(T_a^\alpha f)(t) &= \int_a^t (T_a^\alpha f)(u)(u-a)^{\alpha-1} du \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-a)^{1-\alpha} f'(u)(u-a)^{\alpha-1} du \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= f(t) - f(a). \end{aligned} \quad (15)$$

□

Theorem 2.6 (Integration by parts). *If $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ are differentiable on $(a, +\infty)$ and $b > a$, then*

$$\int_a^b f(s)T_a^\alpha g(s)d\alpha(s, a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(s)T_a^\alpha f(s)d\alpha(s, a). \quad (16)$$

Proof. By the product rule, we have that

$$I_a^\alpha(T_a^\alpha fg)(b) = \int_a^b f(s)(T_a^\alpha g)(s)d\alpha(s, a) + \int_a^b g(s)(T_a^\alpha f)(s)d\alpha(s, a). \quad (17)$$

From Theorem 2.4 we have $I_a^\alpha(T_a^\alpha fg)(b) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$, so the result follows.

□

Note that equation (17) of the previous theorem is also satisfied when f and g satisfy the hypothesis of Theorem 2.5.

2.3 Conformable variational calculus

Lazo and Torres [13] introduced the functional $\mathcal{J}$ as the variational integral

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b L(s, y(s), T_a^\alpha y(s)) d\alpha(s, a), \quad (18)$$

defined on the set of continuous functions $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ such that $T_a^\alpha y$ exists in $[a, b]$, where the function $L : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is of class C^1 in each of its arguments. The fundamental problem of the calculus of variations consists of finding the functions y for which the functional $\mathcal{J}$ reaches its extremum. Related approaches to conformable variational principles can also be found in [9, 19], where conformable derivatives are employed to extend classical variational and dynamical models.

For the purposes of this work, we rely on one key result from [13], which is stated as follows.

Lemma 2.1 (Fundamental lemma of conformable variational calculus). *Let M be a continuous function on $[a, b]$. If*

$$\int_a^b \eta(s)M(s) d\alpha(s, a) = 0, \quad (19)$$

for any $\eta \in C[a, b]$ with $\eta(a) = \eta(b) = 0$, then $M(s) = 0$ for all $s \in [a, b]$.

Proof. Proceeding by contradiction, suppose that there exists $s_0 \in [a, b]$ such that $M(s_0) \neq 0$; without loss of generality, suppose that $M(s_0) > 0$. Since M is continuous, there exist $s_1, s_2 \in [a, b]$, such that $s_1 < s_2$, $s_0 \in [s_1, s_2]$ and $M(s) > 0$ for all $s \in [s_1, s_2]$. Let $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$\eta(s) = \begin{cases} (s - s_1)(s_2 - s), & \text{if } s \in [s_1, s_2], \\ 0, & \text{if } s \notin [s_1, s_2]. \end{cases} \quad (20)$$

This function is continuous on $[a, b]$ and satisfies that $\eta(a) = \eta(b) = 0$, furthermore

$$\int_a^b \eta(s)M(s) d\alpha(s, a) = \int_{s_1}^{s_2} (s - s_1)(s_2 - s)(s - a)^{\alpha-1} M(s) ds > 0, \quad (21)$$

since the integrand is positive on $[s_1, s_2]$, except at the endpoints; which contradicts the hypothesis. Therefore, $M(s) = 0$ for all $s \in [a, b]$. $\square$

The functions η in the previous lemma are called test functions. The conclusion of the lemma also holds if M is a piecewise continuous function and equation (19) is satisfied for test functions that are piecewise continuous and vanish at a and b . The proof is similar, since it is enough to choose test functions whose support is contained in the intervals of continuity of the function M . In fact, observing the function η used in the proof of the lemma, it is possible to restrict the test functions to those that are piecewise differentiable on $[a, b]$ with $\eta(a) = \eta(b) = 0$. One can even consider only functions of class C^1 that vanish at the endpoints of the interval.

Corollary 2.4. *Let $M \in C[a, b]$ and N be a differentiable function on $[a, b]$. If*

$$\int_a^b (\eta(s)M(s) + N(s)T_a^\alpha \eta(s)) d\alpha(s, a) = 0, \quad (22)$$

for any $\eta \in C^1[a, b]$ such that $\eta(a) = \eta(b) = 0$, then $M(s) = T_a^\alpha N(s)$ for all $s \in [a, b]$.

Proof. Let M , N , and η be as in the hypothesis. By the linearity of the conformable integral and Theorem 2.6, we have

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \eta(s)M(s) d\alpha(s, a) + \int_a^b N(s)T_a^\alpha \eta(s) d\alpha(s, a) \\ &= \int_a^b \eta(s)M(s) d\alpha(s, a) + N(b)\eta(b) - N(a)\eta(a) - \int_a^b \eta(s)T_a^\alpha N(s) d\alpha(s, a) \\ &= \int_a^b \eta(s) [M(s) - T_a^\alpha N(s)] d\alpha(s, a). \end{aligned} \quad (23)$$

From the observation made after Lemma 2.1, it follows that $M(s) = T_a^\alpha N(s)$ for all $s \in [a, b]$. $\square$

By inspecting the arguments in the proof given above, it is possible to obtain a version of the previous corollary in which M is a piecewise continuous function on $[a, b]$, N is piecewise differentiable and it is assumed that equation (22) holds for every function η that is piecewise differentiable on $[a, b]$ such that $\eta(a) = \eta(b) = 0$. In that case, we conclude that $M(s) = T_a^\alpha N(s)$, except at a finite number of points in $[a, b]$.

3 Finite element method applied to a conformable differential equation

In this section, our goal is to obtain an approximate solution of the conformable differential equation

$$-T_0^\alpha(T_0^\alpha x)(t) + kx(t) = f(t), \quad (24)$$

where $f \in C[0, 1]$, $k > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ and $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is a function which satisfies the boundary condition $x(0) = x(1) = 0$.

When $\alpha = 1$, $f(t) = 0$ and $k < 0$ the equation (24) is known as the Helmholtz equation. When $\alpha = 1$, $f(t) = 0$ and $k = 0$, it is called the Poisson equation. For $\alpha \in (0, 1)$, if $f(t) = 0$ we shall call the equation (24) the conformable Helmholtz equation when $k = 1$, and the conformable Poisson equation when $k = 0$.

3.1 Finite element formulation

In [21] the finite element method is proposed using the test functions

$$\phi_i^\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^\alpha - t_{i-1}^\alpha}{t_i^\alpha - t_{i-1}^\alpha}, & t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ \frac{t_{i+1}^\alpha - t^\alpha}{t_{i+1}^\alpha - t_i^\alpha}, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (25)$$

The approximation in that work is done in the Hilbert space framework by doing orthogonal projection on the finite dimensional subspaces generated by the functions ϕ_i^α . Similarly, in [7], the finite element method approximates a solution of a partial differential equation using test functions as cubic B-spline polynomials. In contrast, in this work, we shall use a simpler family of test functions, the hat functions.

We shall assume that there exists a solution of the equation (24) which satisfies that $T_0^\alpha x$ is differentiable. This happens automatically when x is twice differentiable.

Multiplying equation (24) by a piecewise differentiable test function on $[0, 1]$, η , with $\eta(0) = \eta(1) = 0$; calculating the left integral of order α and using the integration by parts formula, we get the following.

$$-\int_0^1 [T_0^\alpha(T_0^\alpha x)(t)\eta(t)] d\alpha(t, 0) + k \int_0^1 [x(t)\eta(t)] d\alpha(t, 0) = \int_0^1 f(t)\eta(t) d\alpha(t, 0), \quad (26)$$

$$\int_0^1 (T_0^\alpha x)(t)(T_0^\alpha \eta)(t) d\alpha(t, 0) + k \int_0^1 x(t)\eta(t) d\alpha(t, 0) = \int_0^1 f(t)\eta(t) d\alpha(t, 0). \quad (27)$$

That is, if x is a solution of the conformable differential equation (24) with $T_0^\alpha x$ differentiable, then it is also a solution of the conformable integral equation (27). We can say that a function x

is a weak solution of (24) if x is a solution of (27). In the rest of this section, we will be looking for a weak solution.

In order to get an approximate solution for the conformable integral equation above, we consider a regular partition of the interval $[0, 1]$, $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, and we define for each $i \in \{1, \dots, N-1\}$ the tent function (also known as a hat function) $h_i^N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$h_i^N(t) = \begin{cases} N(t - t_{i-1}), & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ N(t_{i+1} - t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (28)$$

It is well known that the family of functions

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N-1} c_i h_i^N(t) : N \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (29)$$

is a dense set on $C[0, 1]$. In the following, we fix $N \in \mathbb{N}$, so we shall denote h_i^N simply by h_i .

We propose an approximate solution as

$$x_N(t) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i h_i(t), \quad (30)$$

where $c_1, \dots, c_{N-1}$ are parameters to be determined. Replacing this approximation in equation (27) we get

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i \int_0^1 (T_0^\alpha h_i)(t) (T_0^\alpha \eta)(t) d\alpha(t, 0) + k \sum_{i=1}^{N-1} c_i \int_0^1 h_i(t) \eta(t) d\alpha(t, 0) = \int_0^1 f(t) \eta(t) d\alpha(t, 0). \quad (31)$$

In particular, this equation should be satisfied by the functions h_i . So, for $j \in \{1, \dots, N-1\}$,

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i \left[\int_0^1 (T_0^\alpha h_i)(t) (T_0^\alpha h_j)(t) d\alpha(t, 0) + k \int_0^1 h_i(t) h_j(t) d\alpha(t, 0) \right] = \int_0^1 f(t) h_j(t) d\alpha(t, 0). \quad (32)$$

Then we need to solve the above equation system of $N-1$ equations and $N-1$ unknowns.

We note that if $|i-j| \geq 2$ the functions h_i and h_j have disjoint support, thus we have the following cases:

- If $|i-j| \geq 2$, then the product $h_i(t)h_j(t)$ is identically zero.
- If $i=j$, then

$$h_i(t)h_j(t) = h_i^2(t) = \begin{cases} N^2(t - t_{i-1})^2, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ N^2(t_{i+1} - t)^2, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (33)$$

- If $j = i+1$, then

$$h_i(t)h_{i+1}(t) = \begin{cases} N^2(t_{i+1} - t)(t - t_i), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (34)$$

Furthermore,

$$(T_0^\alpha h_i)(t) = \begin{cases} Nt^{1-\alpha}, & t \in (t_{i-1}, t_i), \\ -Nt^{1-\alpha}, & t \in (t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (35)$$

Having this in mind, if $|i - j| \geq 2$ then $(T_0^\alpha h_i)(T_0^\alpha h_j)$ is identically zero. When $i = j$, we have

$$(T_0^\alpha h_i)(t)(T_0^\alpha h_j)(t) = (T_0^\alpha h_i)^2(t) = \begin{cases} N^2 t^{2-2\alpha}, & t \in (t_{i-1}, t_i) \cup (t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (36)$$

For $j = i + 1$, we have

$$(T_0^\alpha h_i)(t)(T_0^\alpha h_{i+1})(t) = \begin{cases} -N^2 t^{2-2\alpha}, & t \in (t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (37)$$

Consequently,

$$\int_0^1 (T_0^\alpha h_i)(t)(T_0^\alpha h_j)(t) d\alpha(t, 0) = \int_0^1 h_i(t) h_j(t) d\alpha(t, 0) = 0, \quad (38)$$

when $|i - j| \geq 2$. For $i = j$, we get

$$\begin{aligned} \int_0^1 (T_0^\alpha h_i)(t)(T_0^\alpha h_j)(t) d\alpha(t, 0) &= N^2 \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} t^{2-2\alpha} t^{\alpha-1} dt = N^2 \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} t^{1-\alpha} dt \\ &= \frac{N^2}{2-\alpha} \left[\left(\frac{i+1}{N} \right)^{2-\alpha} - \left(\frac{i-1}{N} \right)^{2-\alpha} \right] \\ &= \frac{N^\alpha}{2-\alpha} [(i+1)^{2-\alpha} - (i-1)^{2-\alpha}]. \end{aligned} \quad (39)$$

To compute the diagonal term we use that the support of h_i is the interval $[t_{i-1}, t_{i+1}]$. Thus,

$$\int_0^1 h_i(t) h_i(t) d\alpha(t, 0) = N^2 \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1})^2 t^{\alpha-1} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t)^2 t^{\alpha-1} dt \right]. \quad (40)$$

Expanding the quadratic terms and integrating term by term yields

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_i(t) h_i(t) d\alpha(t, 0) &= N^2 \left\{ \frac{t_{i+1}^{\alpha+2} - t_{i-1}^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{2}{\alpha+1} [t_{i-1}(t_i^{\alpha+1} - t_{i-1}^{\alpha+1}) + t_{i+1}(t_{i+1}^{\alpha+1} - t_i^{\alpha+1})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha} [t_{i-1}^2(t_i^\alpha - t_{i-1}^\alpha) + t_{i+1}^2(t_{i+1}^\alpha - t_i^\alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Using $t_k = \frac{k}{N}$ and simplifying, we obtain

$$\int_0^1 h_i(t) h_i(t) d\alpha(t, 0) = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)N^\alpha} \{ 2[(i+1)^{\alpha+2} - (i-1)^{\alpha+2}] - 4(\alpha+2)i^{\alpha+1} \}. \quad (42)$$

For $j = i + 1$, we get

$$\begin{aligned} \int_0^1 (T_0^\alpha h_i)(t)(T_0^\alpha h_j)(t) d\alpha(t, 0) &= -N^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} t^{2-2\alpha} t^{\alpha-1} dt = -N^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} t^{1-\alpha} dt \\ &= -\frac{N^2}{2-\alpha} \left[\left(\frac{i+1}{N} \right)^{2-\alpha} - \left(\frac{i}{N} \right)^{2-\alpha} \right] \\ &= -\frac{N^\alpha}{2-\alpha} [(i+1)^{2-\alpha} - i^{2-\alpha}], \end{aligned} \quad (43)$$

and

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 h_i(t)h_j(t)d\alpha(t,0) &= N^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t)(t - t_i)t^{\alpha-1}dt \\
 &= N^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} [-t^2 + (t_i + t_{i+1})t - t_it_{i+1}]t^{\alpha-1}dt \\
 &= N^2 \left[-\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{(t_i + t_{i+1})t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{t_it_{i+1}t^{\alpha}}{\alpha} \right]_{t_i}^{t_{i+1}} \\
 &= \frac{1}{N^{\alpha}} \left[\frac{i^{\alpha+2} - (i+1)^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{2i+1}{\alpha+1} [(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i(i+1)}{\alpha} [(i+1)^{\alpha} - i^{\alpha}] \right]. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Finally, we have

$$\int_0^1 f(t)h_j(t)d\alpha(t,0) = N \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)(t - t_{i-1})t^{\alpha-1}dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)(t_{i+1} - t)t^{\alpha-1}dt \right]. \tag{45}$$

From the above, the matrix associated with the linear system (32) is tridiagonal.

The ideas put forth in this section can be applied on a general interval $[a, b]$ and with boundary conditions different from 0, by considering two more hat functions

$$h_0(t) = \begin{cases} N(t_1 - t), & t \in [t_0, t_1], \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{46}$$

and

$$h_N(t) = \begin{cases} N(t - t_{N-1}), & t \in [t_{N-1}, t_N], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{47}$$

3.2 Numerical examples

In this section we illustrate the numerical behavior of the finite element formulation through a series of computational experiments. We consider the boundary value problem involving the conformable derivative

$$-T_0^{\alpha}(T_0^{\alpha}x)(t) + kx(t) = f(t), \tag{48}$$

where $f \in C[0, 1]$, $k > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ and $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the boundary conditions $x(0) = x(1) = 0$.

The approximations are computed for the derivative orders $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, and 1, using different discretizations of the interval $[0, 1]$. To visualize the numerical solutions we consider partitions with $N = 5, 10, 20$, and 40 subintervals, which allows the influence of mesh refinement on the computed approximations to be observed. The numerical experiments were carried out in MATLAB R2025b, which was used to compute the finite element approximations and generate the corresponding figures.

By Theorem 2.3, the conformable equation can be rewritten as a second-order ordinary differential equation whose coefficients depend on powers of t . For $\alpha \in (0, 1)$ the resulting equation has variable coefficients with singular behavior at $t = 0$. In general, equations of this type do not admit explicit expressions in terms of elementary functions, so a direct analytical comparison is

typically unavailable. In this setting, numerical approximations provide useful information about the behavior of the solutions.

To complement the graphical results, we also examine the behavior of the method under mesh refinement through a numerical convergence study. For this purpose, the discretizations $N = 5, 10, 20, 40, 80$, and 160 are considered. Let $x_N(t)$ denote the finite element approximation obtained with N subintervals. The error is measured in the maximum norm

$$E(N) = \max_{t \in [0,1]} |x_N(t) - x_{\text{ref}}(t)|, \quad (49)$$

where $x_{\text{ref}}(t)$ is taken as a reference solution.

The errors are evaluated on a uniform grid of the interval $[0, 1]$. Specifically, we consider the set

$$T = \{t_i = \frac{i-1}{1999} : i = 1, \dots, 2000\},$$

and approximate the error by

$$E(N) = \max_{t_i \in T} |x_N(t_i) - x_{\text{ref}}(t_i)|. \quad (50)$$

3.2.1 Example 1

As a first numerical test we consider the boundary value problem

$$-T_0^\alpha(T_0^\alpha x)(t) + x(t) = t^{\alpha+1} - t^\alpha - (\alpha + 1)t^{1-\alpha}, \quad (51)$$

where $\alpha \in (0, 1]$ and $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the boundary conditions $x(0) = x(1) = 0$.

For this problem the exact solution is known. Indeed, direct computation shows that

$$x_{\text{ref}}(t) = t^\alpha(t - 1) \quad (52)$$

satisfies equation (51). This makes it possible to evaluate the accuracy of the numerical scheme by comparing the finite element approximations with the analytical solution.

Figure 2 displays the approximations $x_N(t)$ obtained for several values of α and different mesh discretizations. When $\alpha = 1$ the conformable model reduces to the classical equation

$$-x''(t) + x(t) = t^2 - t - 2. \quad (53)$$

The numerical errors are computed with respect to the analytical solution $x_{\text{ref}}(t)$. Table 1 reports the maximum errors for the discretizations $N = 5, 10, 20, 40, 80$ and 160 .

Table 1: Maximum errors $E(N)$ for different mesh refinements and derivative orders α for equation (51).

N	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
5	0.40879	0.200430	0.093761	0.0370490	0.00975740
10	0.35747	0.152540	0.059815	0.0182980	0.00246570
20	0.31377	0.117290	0.039070	0.0096384	0.00062044
40	0.27595	0.090499	0.025786	0.0052842	0.00015566
80	0.24294	0.069842	0.017077	0.0029635	3.8930e-05
160	0.21379	0.053792	0.011316	0.0016820	9.7414e-06

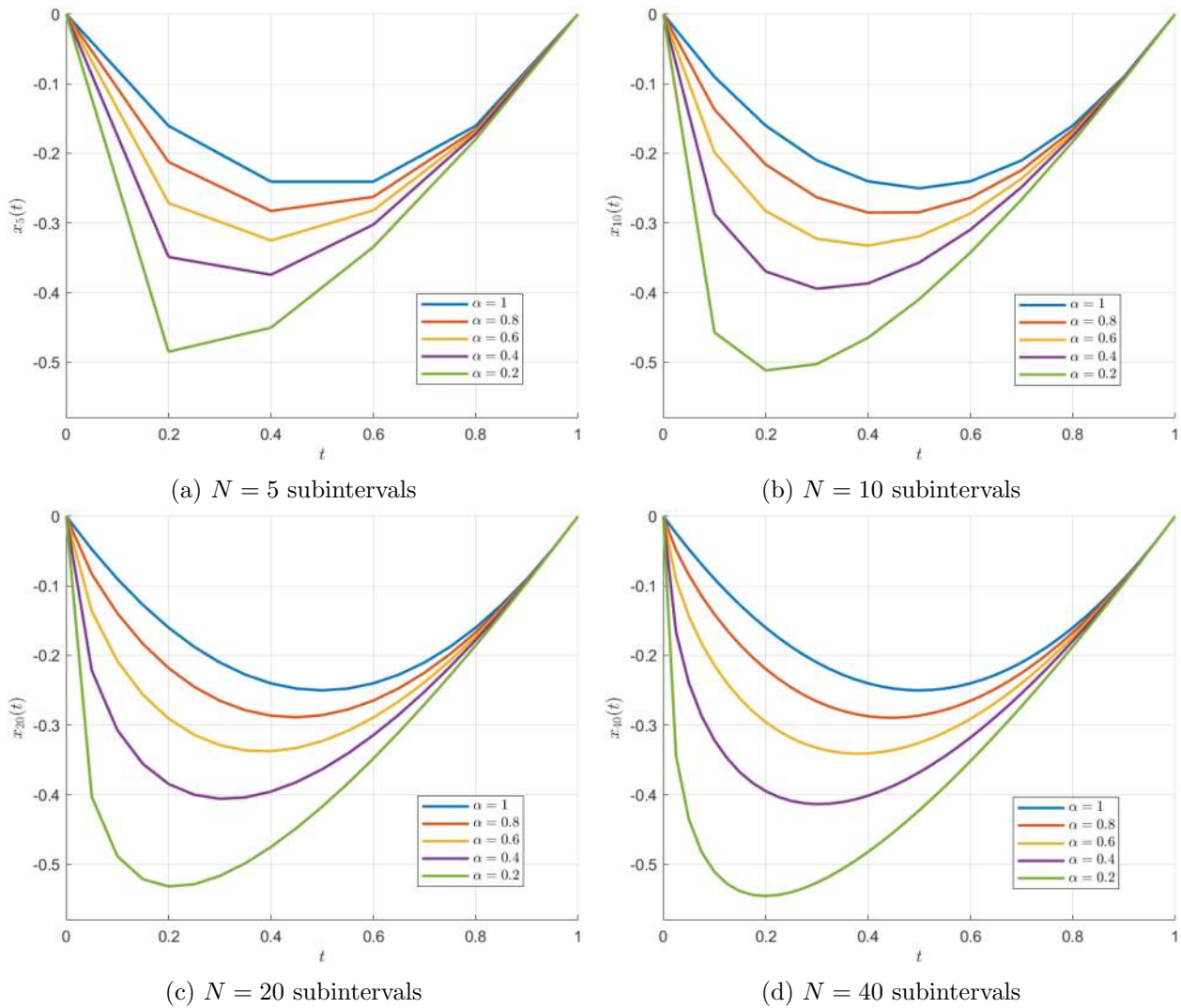


Figure 2: Finite element approximations $x_N(t)$ of the solution of (51) with boundary conditions $x(0) = x(1) = 0$, for different values of the order $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ and several mesh discretizations.

3.2.2 Example 2

We next consider a second problem in order to further examine the performance of the method. In this case we study the equation

$$-T_0^\alpha(T_0^\alpha x)(t) + x(t) = \cos(t), \quad (54)$$

where $\alpha \in (0, 1]$ and $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the boundary conditions $x(0) = x(1) = 0$.

Figure 3 presents the finite element approximations computed for several values of α and different mesh discretizations. As before, when $\alpha = 1$ the equation coincides with the classical problem

$$-x''(t) + x(t) = \cos(t). \quad (55)$$

In this example an analytical solution is not available. For the computation of the errors we therefore take as reference the approximation obtained with the finest discretization, namely $N = 160$.

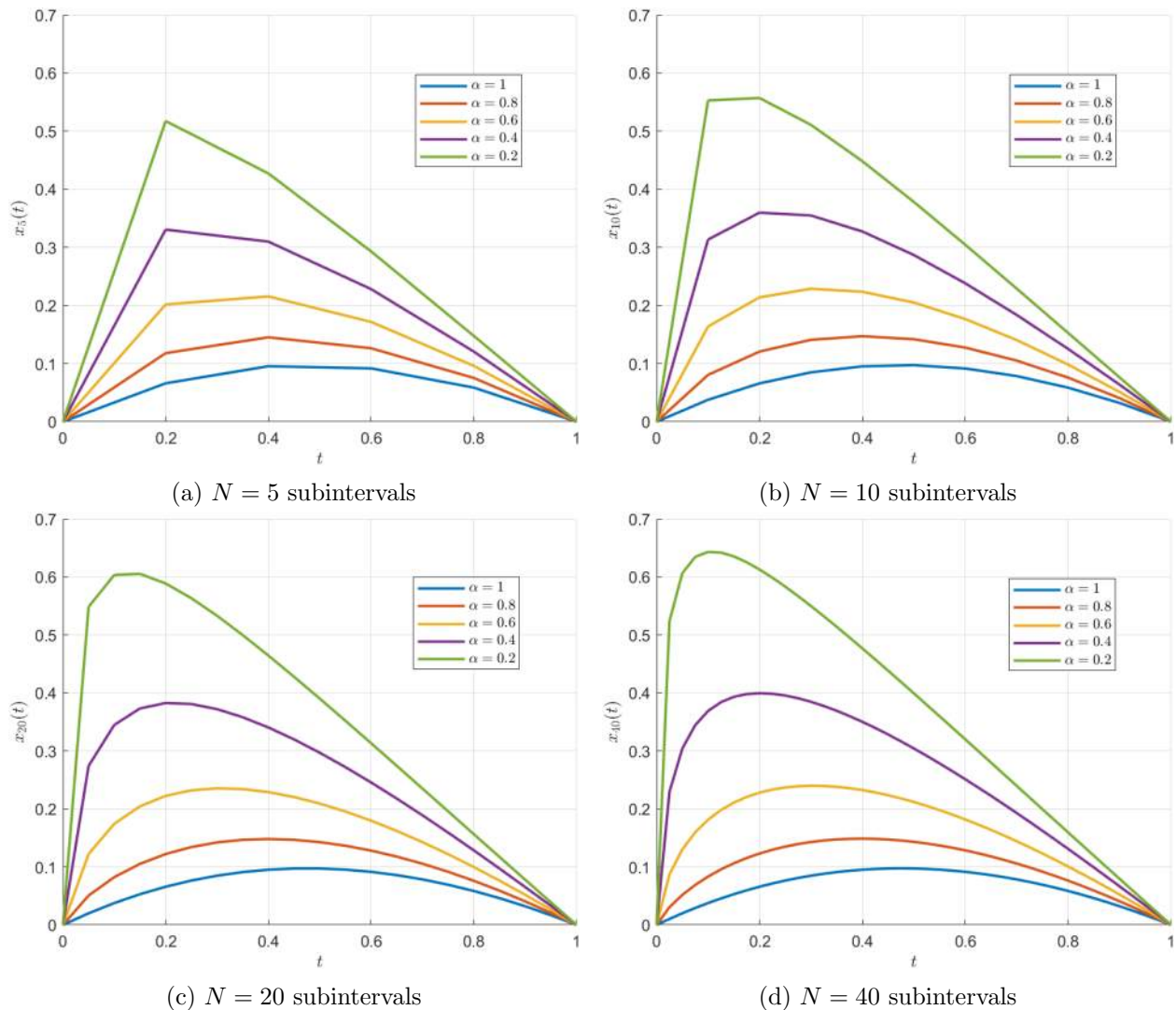


Figure 3: Finite element approximations $x_N(t)$ of the solution of (54) with boundary conditions $x(0) = x(1) = 0$, for $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ and several mesh discretizations.

Table 2 lists the values of the maximum error $E(N)$ for different mesh refinements.

3.2.3 Discussion

The two examples illustrate similar numerical behavior. In both cases the finite element approximations become progressively smoother as the mesh is refined, and the numerical solutions tend to stabilize as the number of subintervals increases. The error tables confirm this observation, showing a consistent decrease of the error when the discretization is refined.

Another common feature is the dependence of the solution on the order α . As α approaches 1, the conformable model approaches the corresponding classical differential equation. The computed solutions reflect this transition and display profiles similar to those of the classical problem.

The first example allows a direct comparison with an analytical solution, which confirms the accuracy of the scheme. The second example shows that the same behavior persists even when an exact solution is not available and the reference solution is obtained numerically. Taken together,

Table 2: Maximum errors $E(N)$ for different mesh refinements and derivative orders α for equation (54).

N	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
5	0.57457	0.261660	0.092214	0.0257430	0.00468520
10	0.50100	0.200340	0.058807	0.0126440	0.00120880
20	0.41706	0.144900	0.036111	0.0063214	0.00030722
40	0.31970	0.094474	0.020733	0.0031294	7.7455e-05
80	0.20104	0.054569	0.010684	0.0014729	1.8687e-05

these results indicate that the proposed finite element formulation provides stable and consistent approximations for different values of the conformable order.

4 Conclusions

In this work we proposed a finite element formulation for conformable differential equations. The approach is based on a weak formulation obtained from a version of the fundamental lemma of the calculus of variations adapted to the conformable derivative. The discretization of the domain, together with the use of piecewise-defined test functions, allows the method to be implemented within the standard finite element framework. In this way, conformable operators can be incorporated into a variational setting while preserving the usual numerical structure of the method.

The numerical experiments illustrate the applicability of the proposed formulation for different values of the order of derivation. The computed approximations improve as the mesh is refined, which is consistent with the convergence behavior observed in the error study. In the example where an analytical solution is available, the numerical results show good agreement with the exact solution. The results also indicate a gradual variation of the numerical solutions as the parameter α changes. In particular, when $\alpha = 1$ the conformable model reduces to the classical differential equation, and the finite element approximation reproduces the qualitative behavior of the corresponding classical solution.

The local structure of the conformable derivative facilitates its incorporation into standard numerical schemes and makes the proposed formulation suitable for several extensions. Possible directions include problems posed on more general domains, equations with more complex boundary conditions, and models involving piecewise differentiable solutions. From an analytical perspective, it would be of interest to identify conditions guaranteeing existence and uniqueness of weak solutions and to determine whether a result in the spirit of the Lax–Milgram theorem can be established in the conformable setting. Another related question concerns situations in which the weak formulation leads back to the original differential equation beyond the case where $T_0^\alpha x$ is differentiable. From the numerical side, further work includes the study of the approximation properties of the finite element scheme in the associated test-function spaces, as well as the consideration of more demanding numerical examples, such as problems involving piecewise differentiable solutions.

5 Conflict of interest

The authors declare no conflicts of interest.

6 Artificial Intelligence Usage Statement

The authors declare that they have not used any generative artificial intelligence applications, software or websites for the writing of the present paper, the design of tables and figures or the analysis and interpretation of the data.

7 Code Availability

The MATLAB code used in the numerical experiments is available from the corresponding author upon reasonable request.

8 Graphical Abstract

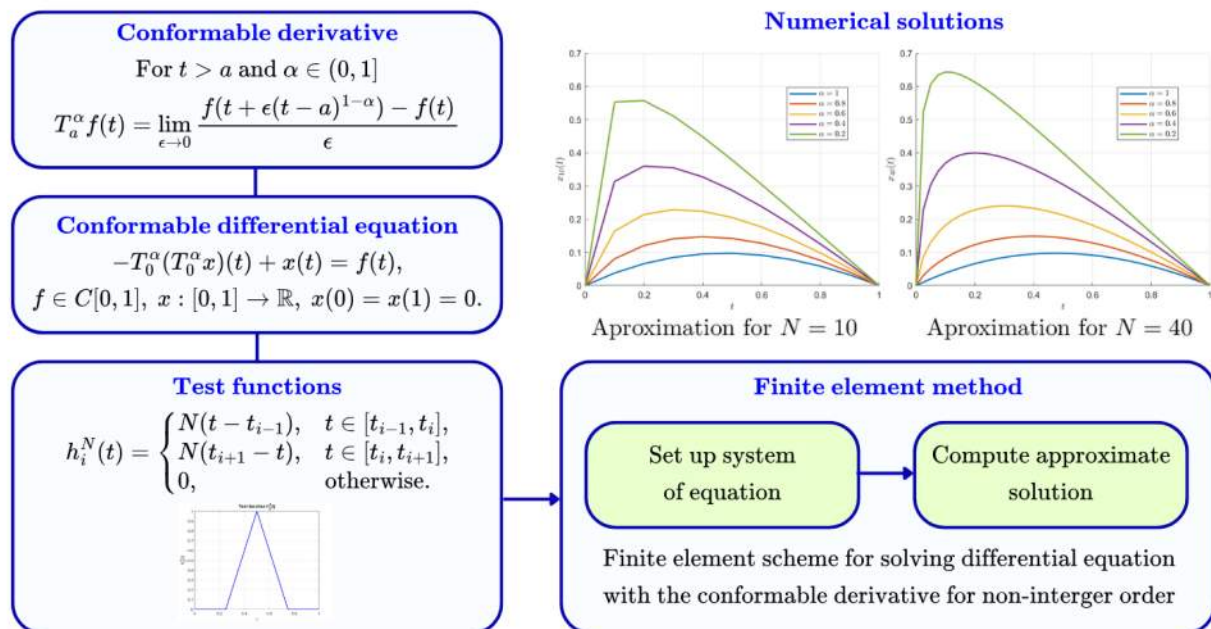


Figure 4: Graphical abstract.

9 Contribution Roles

ROLE	AUTHORS
Conceptualization	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Formal analysis	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Investigation	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Methodology	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Software	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Validation	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Visualization	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Writing - original draft	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido
Writing - review & editing	P. Toledo C. A. Hernández-Linares M. L. Avendaño-Garrido

References

- [1] T. Abdeljawad. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279:57–66, 5 2015.
- [2] A. A. Alderremy, H. I. Abdel-Gawad, K. M. Saad, and E. M. Aly Shaban. New exact solutions of time conformable fractional Klein Kramer equation. *Optical and Quantum Electronics*, 53(12):693, dec 2021.
- [3] A. Arafa. A different approach for conformable fractional biochemical reaction—diffusion models. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 35(4):452–467, oct 2020.
- [4] J.A. Burns. *Introduction to the Calculus of Variations and Control with Modern Applications*. Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science. CRC Press, 2013.
- [5] J. M. Cruz-Duarte, J. J. Rosales-García, and C. R. Correa-Cely. Entropy Generation in a Mass-Spring-Damper System Using a Conformable Model. *Symmetry*, 12(3):395, mar 2020.

- [6] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations*, volume 2004 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [7] A. R. Hadhoud, F. E. I. Abd Alaal, and T. Radwan. Modified finite element numerical method for solving conformable space-time fractional nonlinear partial differential equations. *Fractals*, 30(10):2240247, 2022.
- [8] I. Haouam. On the conformable fractional derivative and its applications in physics. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 18(6), 2024.
- [9] B. B. Iskender and D. Yapişkan. Generalized conformable variational calculus and optimal control problems with variable terminal conditions. *AIMS Mathematics*, 5(2):1105–1126, 2020.
- [10] R. Kaviya and P. Muthukumar. Dynamical analysis and optimal harvesting of conformable fractional prey–predator system with predator immigration. *The European Physical Journal Plus*, 136(5):542, may 2021.
- [11] R. Khalil, M. Al Horani, R. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70, 7 2014.
- [12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier B.V., Amsterdam, 2006.
- [13] M. J. Lazo and D. F.M. Torres. Variational calculus with conformable fractional derivatives. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 4:340–352, 4 2017.
- [14] C. Li and F. Zeng. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Chapman & Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing. CRC Press, 2015.
- [15] W. K. Liu, S. Li, and H. S. Park. Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29(6):4431–4453, oct 2022.
- [16] L. Martínez, J.J. Rosales, C.A. Carreño, and J.M. Lozano. Electrical circuits described by fractional conformable derivative. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 46(5):1091–1100, may 2018.
- [17] A. Martynyuk, G. Stamov, I. Stamova, and E. Gospodinova. Formulation of Impulsive Ecological Systems Using the Conformable Calculus Approach: Qualitative Analysis. *Mathematics*, 11(10):2221, may 2023.
- [18] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [19] S. Ogrecki and S. Asliyüce. Fractional variational problems on conformable calculus. *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1Mathematics and Statistics*, 70(2):719–730, dec 2021.
- [20] J. Rosales-García, J. A. Andrade-Lucio, and O. Shulika. Conformable derivative applied to experimental Newton’s law of cooling. *Revista Mexicana de Física*, 66(2 Mar-Apr):224–227, mar 2020.
- [21] L. Sadek, T. A. Lazăr, and I. Hashim. Conformable finite element method for conformable fractional partial differential equations. *AIMS Mathematics*, 8(12):28858–28877, 2023.

- [22] G. Sales Teodoro, J. A. Tenreiro Machado, and E. Capelas de Oliveira. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, 388:195–208, 7 2019.
- [23] K. Soni and A. K. Sinha. Dynamics of epidemic model with conformable fractional derivative. *Nonlinear Science*, 4:100040, sep 2025.
- [24] Ş. Toprakseven. Numerical Solutions of Conformable Fractional Differential Equations by Taylor and Finite Difference Methods. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 23(3):850–863, dec 2019.
- [25] S. A. Zanib, T. Zubair, S. Ramzan, M. B. Riaz, M. I. Asjad, and M. Taseer. A conformable fractional finite difference method for modified mathematical modeling of SAR-CoV-2 (COVID-19) disease. *PLOS ONE*, 19(10):e0307707, oct 2024.

Homología persistente Persistent homology

Remigio-Juárez, Jair^{1,*} 
Almaguer Cantú, María Hortensia¹ 
Domínguez Colín, Raymundo¹ 
Hernández Garibay, Juan Roberto² 
Rodríguez Henríquez, Lil María Xibai³ 

¹División Académica de Ciencias Básicas, UJAT.

²División Académica de Ciencias y Tecnologías de la Información, UJAT

³INAOE

*jair.remigio@ujat.mx

Resumen

Presentamos los conceptos necesarios para entender cómo funciona la homología persistente de complejos de Vietoris-Rips. Así como también damos ejemplos de cómo se usa *Python* para el cálculo de los diagramas de persistencia.

Palabras claves: Ciencia de Datos, Homología Persistente, Análisis Topológico de Datos, Python

Abstract

We present the basic notions to understand the persistent homology of Vietoris-Rips complexes. For computations, we introduce examples using some Python libraries.

Keywords: Data Science, Persistent Homology, Topological Data Analysis, Python

Recibido: 30 de junio de 2025. Aceptado: 25 de abril de 2026. Publicado: 31 de agosto de 2026.

1. Introducción

Los grupos de homología son invariantes algebraicos de los espacios topológicos. A pesar de que la homología es un concepto algebraico, es posible obtener de ella información topológica de los espacios en cuestión, en particular, en este trabajo nos concentraremos, en los grupos de homología de los complejos simpliciales. Por otra parte, una filtración es una sucesión anidada de complejos simpliciales y al calcular la homología para cada complejo en la filtración, se puede rastrear el “nacimiento” y la “muerte” de las clases de homología. Esta información se codifica de manera concisa en los **diagramas de persistencia**, que ilustra un conjunto de puntos (x, y) en el plano con $y > x$, donde la coordenada x representa el momento en que una clase de homología nace, mientras que la coordenada y representa el momento en que dicha clase de homología muere. La **persistencia** de una clase de homología se mide por la diferencia entre su tiempo de muerte y su tiempo de nacimiento [4]. Esta técnica es conocida actualmente como **homología persistente** y debido a su versatilidad se ha aplicado en diversas disciplinas, como el análisis de imágenes [3] y la biología [11].

En este artículo, además de la teoría requerida para definir la homología persistente, presentaremos ejemplos de códigos en Python que nos permiten obtener el diagrama de persistencia de un conjunto de datos, así como su interpretación “topológica”. Puesto que actualmente la homología

persistente es usada tanto por matemáticos, como no matemáticos, el objetivo de este artículo es hacer una explicación elemental de la misma y los conceptos a su alrededor.

2. Metodología

El presente trabajo se desarrolla bajo la siguiente metodología teórica-expositiva:

1. *Revisión conceptual y estructuración teórica.*

Se realizó una revisión selectiva de literatura en Análisis Topológico de Datos, a partir de la cual se organizaron los conceptos fundamentales de la homología persistente incluyendo filtraciones, complejos simpliciales y diagramas de persistencia.

2. *Enfoque ilustrativo mediante ejemplos.*

Para facilitar la comprensión de los conceptos, se emplearon ejemplos para resaltar propiedades topológicas específicas (como componentes conexas o ciclos). Estos ejemplos permiten observar, partiendo de los grupos de homología, las características topológicas de un espacio.

3. *Implementación computacional y análisis cualitativo*

Como complemento a la exposición teórica, se incorporó un componente computacional basado en la biblioteca Ripser de Python. En este contexto, se calcularon diagramas de persistencia de conjuntos de datos generados computacionalmente de manera aleatoria y se interpretaron dichos diagramas desde una perspectiva topológica. El objetivo de esta implementación no es realizar un estudio experimental exhaustivo, sino mostrar de manera concreta el flujo de trabajo típico en el Análisis Topológico de Datos.

3. Algunos preliminares algebraicos

Un **grupo abeliano** es un conjunto G con una operación $+$ que cumple las siguientes propiedades:

- $(x + y) \in G$, para cualesquiera $x, y \in G$.
- $(x + y) + z = x + (y + z)$, para cualesquiera $x, y, z \in G$.
- $x + y = y + x$, para cualesquiera $x, y \in G$.
- Existe un elemento neutro en G , usualmente denotado por 0 , tal que $x + 0 = x$, para cualquier $x \in G$.
- Para cada $x \in G$, existe un elemento y de G tal que $x + y = 0$. Por lo regular, al elemento y se le llama inverso aditivo de x y se denota por $-x$.

El conjunto de los números enteros, denotado por $\mathbb{Z}$, con la operación suma usual es un grupo abeliano. Otro ejemplo clásico de grupo abeliano es $\mathbb{Z}_2$, los enteros cíclicos módulo 2, que se obtienen de $\mathbb{Z}$ al definir la relación de equivalencia: $m \sim n$ si y sólo si 2 divide a $(m - n)$. Observemos que de esta relación se obtienen únicamente dos clases de equivalencia, pues todos los números pares se relacionan entre sí y forman la clase de equivalencia $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$; mientras que de los números impares obtenemos la clase de equivalencia $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\}$. De esta

forma, los únicos elementos de $\mathbb{Z}_2$ son las clases $[0]$ y $[1]$. La operación $+$ sobre $\mathbb{Z}_2$ se define de la siguiente manera: $[0] + [0] = [0]$, $[1] + [0] = [1] = [0] + [1]$ y $[1] + [1] = [0]$. Observemos que $-[0] = [0]$ y $-[1] = [1]$. Los lectores interesados en profundizar en los temas de grupos pueden consultar [9] o [7].

Por otra parte, si A es un conjunto cualquiera, consideramos el conjunto

$$C(A, \mathbb{Z}_2) = \{f : A \rightarrow \mathbb{Z}_2 : f(x) = [0], \text{ para todo } x \in A, \text{ excepto para una cantidad finita de ellos}\}.$$

Dados $f, g \in C(A, \mathbb{Z}_2)$, definimos la suma de f y g , denotada por $f + g$, como la función $f + g : A \rightarrow \mathbb{Z}_2$ con regla de correspondencia $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para toda $x \in A$. Es claro que $(f + g) \in C(A, \mathbb{Z}_2)$. Mas aún, debido a las propiedades de grupo de $\mathbb{Z}_2$ tenemos que $(f + g) + h = f + (g + h)$ y $f + g = g + f$, para cualesquiera $f, g, h \in C(A, \mathbb{Z}_2)$. Un elemento distinguible de $C(A, \mathbb{Z}_2)$ es la función cero $0 : A \rightarrow \mathbb{Z}_2$, definida por $0(x) = [0], \forall x \in A$; obviamente dicha función satisface que $f + 0 = f, \forall f \in C(A, \mathbb{Z}_2)$. Finalmente, para cada $f \in C(A, \mathbb{Z}_2)$ se tiene que $-f$, el inverso aditivo de f , es la misma f . Por lo que el conjunto $C(A, \mathbb{Z}_2)$ con la operación $+$ definida es un grupo abeliano, que en lo sucesivo será llamado: **el grupo abeliano generado por A con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$** .

Ahora bien, para cada $a \in A$, tenemos definida la función $f_a : A \rightarrow \mathbb{Z}_2$ con regla de correspondencia

$$f_a(x) = \begin{cases} [1], & \text{si } x = a; \\ [0], & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $\{f_a : a \in A\}$ es un conjunto generador para $C(A, \mathbb{Z}_2)$, es decir, que para cualquier $f \in C(A, \mathbb{Z}_2)$ se tiene que $f = f_{a_1} + \dots + f_{a_k}$, donde $a_1, \dots, a_k$ son todos los elementos x de A para los cuales $f(x) \neq [0]$.

Finalizamos este paréntesis algebraico puntualizando que, como es usual en varios libros de homología o topología algebraica (Ver [8], [13]), en este trabajo aprovecharemos la biyección natural que hay entre los conjuntos $\{f_a : a \in A\}$ y A , escribiendo $f = a_1 + \dots + a_k$ en vez de $f = f_{a_1} + \dots + f_{a_k}$. De esta manera,

$$C(A, \mathbb{Z}_2) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i : a_i \in A, \forall i = 1, \dots, k \right\}.$$

En este contexto, la operación $+$ en $C(A, \mathbb{Z}_2)$ se realiza como si estuviéramos sumando polinomios, pero tomando en cuenta que al hacer la reducción de términos semejantes debemos respetar la aritmética de $\mathbb{Z}_2$, por ejemplo, si $a \in A$ tenemos que $a + a = 0$, pues en esta expresión el coeficiente de cada a es 1, al sumar los coeficientes obtenemos el número par 2, que en $\mathbb{Z}_2$ corresponde con la clase del $[0]$; mientras que $a + a + a = a$, debido a que la suma de coeficientes es el número impar 3, que en $\mathbb{Z}_2$ corresponde con la clase del $[1]$.

4. Complejos Simpliciales

Decimos que los puntos $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ están en **posición general**, si el conjunto $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^N$. Para que esto último ocurra es necesario que $0 \leq n \leq N$. Tampoco es difícil mostrar que el conjunto $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es linealmente independiente si, y solo si, para cualquier $v_{k_0} \in \{v_0, \dots, v_n\}$ se cumple que el conjunto

$\{v_0 - v_{k_0}, \dots, v_{k_0-1} - v_{k_0}, v_{k_0+1} - v_{k_0}, \dots, v_n - v_{k_0}\}$ es linealmente independiente. Debido a lo anterior y usando el hecho de que subconjuntos de conjuntos linealmente independientes también son linealmente independientes, tenemos que subconjuntos de puntos en posición general también están en posición general.

Si $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ son puntos en posición general, definimos el n -**simplejo** (o **simplejo de dimensión** n) generado por $v_0, \dots, v_n$, denotado $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$, como el conjunto

$$\langle v_0, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \quad : \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i = 0, \dots, n \right\}.$$

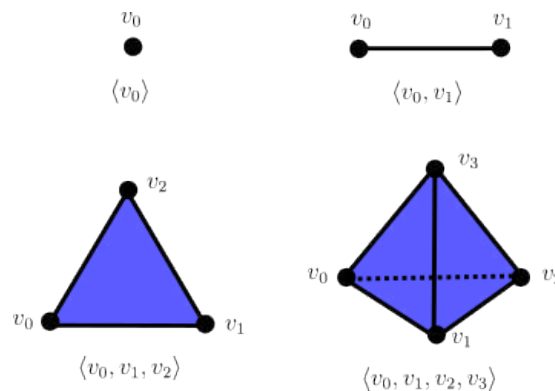


Figura 1: Ejemplos de simplejos.

A los puntos $v_0, \dots, v_n$ les llamamos **vértices** del simplejo $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$. En la Figura 1 podemos ver ejemplos de n -simplejos con $n = 0, 1, 2, 3$.

Una **cara** del simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ es un simplejo $\tau = \langle w_{i_0}, \dots, w_{i_k} \rangle$, donde $\{w_{i_0}, \dots, w_{i_k}\} \subset \{v_0, \dots, v_n\}$. En este caso, escribimos $\tau \prec \sigma$. La dimensión de τ como cara de σ es la misma que la dimensión de τ como simplejo.

La **frontera topológica de un n -simplejo** $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, denotada $Fr(\sigma)$, se define como el conjunto

$$Fr(\sigma) = \left\{ \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \right) \in \sigma \quad : \quad \lambda_j = 0, \text{ para algún } j \in \{0, \dots, n\} \right\}.$$

De la definición se puede observar que $Fr(\sigma)$ consiste precisamente de la unión de todas las caras de σ cuya dimensión es igual a $n - 1$ (Ver Figura 2).

Definición 4.1. Un **complejo simplicial finito** (o simplemente, un **complejo simplicial**) K es un conjunto finito de simplejos que tiene las siguientes propiedades:

- (1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \prec \sigma$, entonces $\tau \in K$.
- (2) Si $\sigma, \rho \in K$ y $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \rho \prec \sigma$ y $\sigma \cap \rho \prec \rho$.

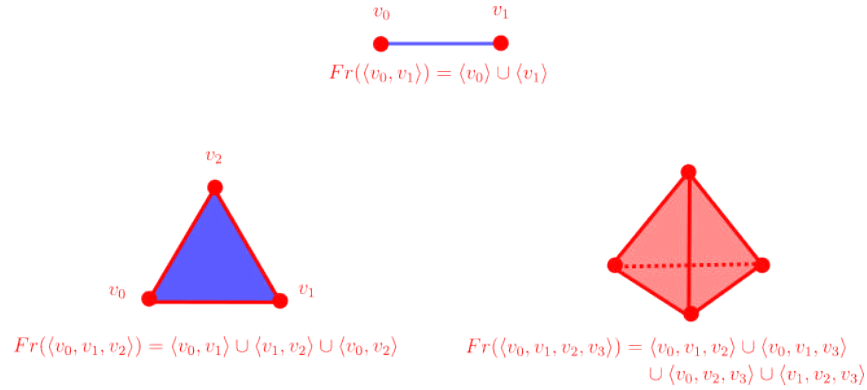


Figura 2: Fronteras topológicas de algunos simplejos.

Sea K un complejo. La **dimensión de** K , denotada $\dim(K)$, se define como el máximo de las dimensiones de los simplejos que pertenecen a K , y a los 0–simplejos de K también les llamamos **vértices** de K . El **poliedro de** K , denotado $|K|$, se define como la unión de todos los simplejos que pertenecen a K , es decir, $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

Ejemplo 4.1.

- (a) Sean $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^2$. Considere $K = \{\langle v_0 \rangle, \langle v_0, v_1 \rangle\}$. El conjunto K no es un complejo simplicial, pues $\langle v_1 \rangle$ es una cara del simplejo $\langle v_0, v_1 \rangle$, que no pertenece a K .
- (b) Si σ es un n –simplejo, entonces el conjunto $K_\sigma = \{\tau : \tau \prec \sigma\}$ es un complejo simplicial, el cual es llamado el **complejo simplicial asociado a** σ . En este ejemplo, la dimensión de K_σ es la misma que la del simplejo σ , el conjunto de vértices de K_σ es igual al conjunto de vértices de σ y $|K_\sigma| = \sigma$.
- (c) Sea $n \in \mathbb{N}$. Dado un n –simplejo σ , el conjunto $K_{Fr(\sigma)} = \{\tau : \tau \prec \sigma \text{ y } \dim(\tau) \leq n - 1\}$ es un complejo simplicial de dimensión $n - 1$. Además, el conjunto de vértices de $K_{Fr(\sigma)}$ coincide con el conjunto de vértices de σ y $|K_{Fr(\sigma)}| = Fr(\sigma)$.

No siempre se tiene que subconjuntos de un complejo simplicial sean también complejos simpliciales, sin embargo, cuando dichos subconjuntos cumplen la primera propiedad de la definición se garantiza que sí lo son. Con la finalidad de que este trabajo sea autocontenido, demostramos este hecho en la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Sea K un complejo simplicial y sea $L \subset K$. Supongamos que para todo $\sigma \in L$ se cumple que cualquier cara de σ también pertenece a L . Entonces L es un complejo simplicial.

Demostración. La primera propiedad que L tiene que cumplir para ser complejo simplicial se sigue por hipótesis. Ahora bien, supongamos que σ y ρ son simplejos en L tales que $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$. Dado que $L \subset K$, tenemos que $\sigma, \rho \in K$ y, en consecuencia, $\sigma \cap \rho \prec \sigma$ y $\sigma \cap \rho \prec \rho$, por ser K un complejo simplicial. Por lo tanto, L es un complejo simplicial. $\square$

Es necesario también puntualizar que el resultado anterior es el puente que conecta a los complejos simpliciales (geométricos) presentados en la Definición 4.1, con los *complejos simpliciales abstractos* que son mas útiles para fines computacionales [5].

5. Homología de un complejo simplicial

Sean K un complejo simplicial y K_r el subconjunto de r –simplejos que pertenecen a K . Denotamos por $C_r(K)$ al grupo libre abeliano generado por K_r con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, es decir,

$$C_r(K) = \left\{ \sum_{i=1}^k \sigma_i : \sigma_i \in K_r, \forall i = 1, \dots, k \right\}.$$

A los elementos de $C_r(K)$ les llamamos **cadenas de K de dimensión r** . La suma en $C_r(K)$ se realiza tal como se definió en la Sección 3, como si las cadenas fueran polinomios pero implementando en los coeficientes la aritmética de $\mathbb{Z}_2$.

Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_r \rangle$, con $r \geq 1$. Se define la r –**ésima frontera** de σ (con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$), denotada por $\partial_r \sigma$, como

$$\partial_r \sigma = \sum_{i=0}^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle,$$

donde $\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle$ denota al simplejo que se obtiene removiendo al punto v_i del conjunto $\{v_0, \dots, v_r\}$. En el caso de un 0–simplejo $\sigma = \langle v_0 \rangle$, definimos $\partial_0 \sigma = 0$. En la Tabla 1 se observan algunos ejemplos de fronteras.

Tabla 1: Algunas fronteras de simplejos

σ	$\partial_r \sigma$
$\langle v_0 \rangle$	0
$\langle v_0, v_1 \rangle$	$\langle v_1 \rangle + \langle v_0 \rangle$
$\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$	$\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$
$\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$	$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle + \langle v_0, v_2, v_3 \rangle + \langle v_0, v_1, v_3 \rangle + \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$

Notemos que si σ es un r –simplejo, entonces $\partial_r \sigma \in C_{r-1}(K)$. Por lo que podemos extender ∂_r a la función $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ definiendo $\partial_r(\sum_{i=1}^k \sigma_i) := \sum_{i=1}^k \partial_r \sigma_i$, para toda cadena $(\sum_{i=1}^k \sigma_i) \in C_r(K)$. Así mismo, definimos $\partial_0 : C_0(K) \rightarrow \{0\}$ como la función cero. Para cada $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función ∂_r recibe el nombre de r –**ésimo operador frontera**. Asociados a los operadores frontera ∂_r tenemos los conjuntos:

$$\text{Ker} \partial_r = \{c \in C_r(K) : \partial_r c = 0\}$$

y

$$\text{Im} \partial_{r+1} = \{c \in C_r(K) : c = \partial_{r+1} d, \text{ para algún } d \in C_{r+1}(K)\}.$$

Mas aún, los operadores frontera satisfacen que cuando hacemos la composición de dos consecutivos, el resultado es la función cero (Ver [8], [13] o [10]), es decir,

$$\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0, \text{ para todo } r = 0, 1, 2, \dots$$

Como una consecuencia de esta propiedad tenemos que $\text{Im} \partial_{r+1} \subset \text{Ker} \partial_r$, para todo $r = 0, 1, 2, \dots$. En $\text{Ker} \partial_r$ definimos la relación de equivalencia:

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \text{existe } c \in C_{r+1}(K) \text{ tal que } \partial_{r+1} c = z_1 + z_2,$$

donde $z_1, z_2 \in \text{Ker} \partial_r$. Cuando dos elementos de $\text{Ker} \partial_r$ están relacionados decimos que son **homólogos**.

Ejemplo 5.1. Sea K un complejo simplicial y sea $\langle v_0, v_1 \rangle$ un 1-simplejo de K . Los 0-simplejos $\langle v_0 \rangle$ y $\langle v_1 \rangle$ son homólogos, pues $\partial_1 \langle v_0, v_1 \rangle = \langle v_1 \rangle + \langle v_0 \rangle$. De hecho, cualesquiera dos 0-simplejos en K que estén conectados por una sucesión finita de 1-simplejos, son homólogos.

Ejemplo 5.2. Considere el 2-simplejo $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$. En K_σ , la 1-cadena $\langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_0 \rangle$ es homóloga a la cadena 0, ya que

$$\partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_0 \rangle + 0.$$

En general, para un r -simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_r \rangle$, la cadena $\sum_{i=0}^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle$ es homóloga a la cadena 0, pues

$$\partial_r \sigma = \sum_{i=0}^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle.$$

Como es usual en matemáticas, denotamos por $[z]$ al conjunto de elementos de $\text{Ker} \partial_r$ que están relacionados con z , es decir,

$$[z] = \{w \in \text{Ker} \partial_r : w \sim z\}.$$

A las clases de equivalencia de la relación de equivalencia $\sim$ definida anteriormente, les llamamos **clases de homología**, y denotamos con $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ al conjunto de dichas clases, es decir, $H_r(K, \mathbb{Z}_2) = \{[z] : z \in \text{Ker} \partial_r\}$.

En $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ la operación $[z_1] + [z_2] := [z_1 + z_2]$ no depende de los representantes de las clases, por lo cual, dicha operación está bien definida. Además esta operación es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene a $[0]$ como elemento neutro y cada clase $[z]$ tiene como inverso aditivo a la misma clase $[z]$, por lo que $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ junto con la operación $[z_1] + [z_2] = [z_1 + z_2]$ forman un grupo abeliano.

Definición 5.1. Sea K un complejo simplicial. Para cada $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el grupo $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ es el r -ésimo grupo de homología de K con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$.

En este punto también nos gustaría hacer énfasis, como se explica implícitamente en el Capítulo IV de [5], que para cada $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el grupo $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ es un grupo finitamente generado, es decir, existe un subconjunto finito E de $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ tal que si $[z] \in H_r(K, \mathbb{Z}_2)$, entonces $[z] = \sum_{i=1}^k [g_i]$, para algunos $[g_i] \in E$.

En lo sucesivo, con el fin de simplificar la notación, escribiremos $H_r(K)$ en vez de $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$.

Ejemplo 5.3. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un n -simplejo, con $n \geq 1$. Tal como se establece en [8], los grupos de homología de K_σ y $K_{Fr(\sigma)}$ son los siguientes:

$$H_r(K_\sigma) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{si } r = 0, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y

$$H_r(K_{Fr(\sigma)}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{si } r \in \{0, n-1\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el caso de $H_0(K_\sigma)$ y $H_0(K_{Fr(\sigma)})$, la clase de homología de cualquier vértice funciona como un generador de estos grupos de homología, mientras que para $H_{n-1}(K_{Fr(\sigma)})$ un generador es

$$\sum_{i=0}^n [\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle].$$

Por hechos como los mostrados en los ejemplos 5.1, 5.2 y 5.3 es común pensar que el r -ésimo grupo de homología en cierta manera detecta los “agujeros r -dimensionales” que tiene un espacio topológico.

6. Homología persistente

La homología persistente puede definirse para diversos tipos de complejos simpliciales, sin embargo, con la finalidad de realizar una mejor exposición de la misma, en este artículo sólo abordaremos la homología persistente de los complejos de Vietoris-Rips asociados a un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^k$. Así mismo, para seguir usando la definición que tenemos de complejo simplicial y evitar introducir los complejos simpliciales abstractos, los cuales forman parte del enfoque usual que se sigue en la literatura, presentamos una definición equivalente del Complejo de Vietoris-Rips que nos permite considerar a los elementos de dicho complejo como simplejos geométricos contenidos en un espacio euclidiano. Recomendamos consultar [5] o [2] a los lectores que estén interesados en un tratamiento más profundo de estos temas.

Dados $p \in \mathbb{R}^k$ y $\varepsilon > 0$, se define la **bola cerrada con centro en p y radio r** , denotada por $B_\varepsilon(p)$, como

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^k : \|p - q\| \leq \varepsilon\},$$

donde $\|\cdot\|$ denota a la norma euclidiana.

Definición 6.1. Sea $X = \{p_0, \dots, p_k\}$ un conjunto de $k + 1$ puntos en $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto $VR_\varepsilon(X)$ de la siguiente manera:

Paso 1: Por cada punto p_i de X , elegimos un punto v_i de $\mathbb{R}^k$ de tal forma que los puntos $v_0, \dots, v_k$ estén en posición general en $\mathbb{R}^k$. Estos puntos v_i serán los únicos vértices de $VR_\varepsilon(X)$.

Paso 2: Si $p_{i_0}, \dots, p_{i_m}$ son puntos en X y cualesquiera dos de ellos, digamos p_{i_s} y p_{i_t} , satisfacen que $B_\varepsilon(p_{i_s}) \cap B_\varepsilon(p_{i_t}) \neq \emptyset$, agregamos un m -simplejo a $VR_\varepsilon(X)$ que tenga como vértices a los puntos $v_{i_0}, \dots, v_{i_m}$, donde estos puntos v_{i_j} son como en el punto anterior.

En la Figura 3 mostramos un ejemplo de esta construcción. De la definición 6.1, se sigue que $VR_\varepsilon(X)$ está contenido en K_σ , el complejo simplicial asociado al k -simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$. De hecho, dado que X es finito, existe una constante $C > 0$ para el cual $VR_\varepsilon(X) = K_\sigma$, para todo $\varepsilon > C$.

Teorema 6.1. El conjunto $VR_\varepsilon(X)$ es un complejo simplicial.

Demostración. Dado que $VR_\varepsilon(X) \subset K_\sigma$, basta probar por la Proposición 4.1 que para todo simplejo $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$ de $VR_\varepsilon(X)$ se cumple que sus caras también pertenecen a $VR_\varepsilon(X)$. Sea $\langle w_{j_0}, \dots, w_{j_s} \rangle$ una cara de $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$. Sean $p_{i_0}, \dots, p_{i_m}$ los puntos de X que están en correspondencia con los puntos $v_{i_0}, \dots, v_{i_m}$ de $VR_\varepsilon(X)$, respectivamente. En particular, sean $p_{j_0}, \dots, p_{j_s}$ los puntos en correspondencia con $w_{j_0}, \dots, w_{j_s}$, respectivamente. Por definición de cara, tenemos que $\{w_{j_0}, \dots, w_{j_s}\} \subset \{v_{i_0}, \dots, v_{i_m}\}$ y, en consecuencia, $\{p_{j_0}, \dots, p_{j_s}\} \subset \{p_{i_0}, \dots, p_{i_m}\}$. Por construcción, los puntos $p_{i_0}, \dots, p_{i_m}$ satisfacen que $B_\varepsilon(p_{i_s}) \cap B_\varepsilon(p_{i_t}) \neq \emptyset$, para cualesquiera $p_{i_s}, p_{i_t} \in \{p_{i_0}, \dots, p_{i_m}\}$, por lo que, en particular, cualesquiera dos elementos de $\{p_{j_0}, \dots, p_{j_s}\}$ también satisfacen lo mismo.

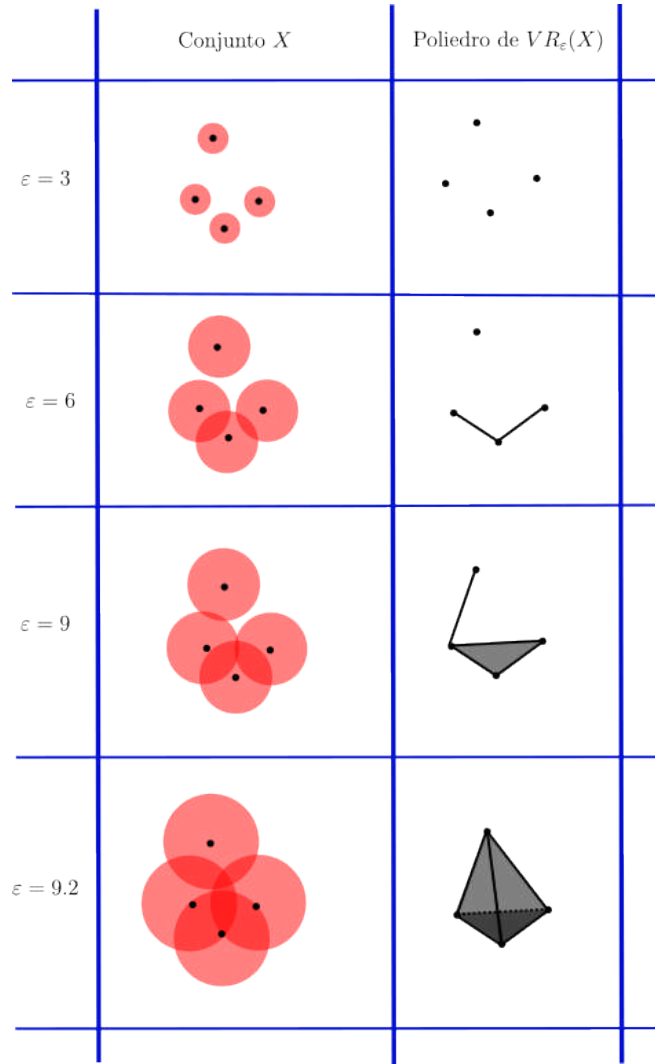


Figura 3: Ejemplo de construcción de $VR_\varepsilon(X)$.

Por lo tanto, $\langle w_{j_0}, \dots, w_{j_s} \rangle$ también pertenece a $VR_\varepsilon(X)$ y, por tanto, $VR_\varepsilon(X)$ es un complejo simplicial. $\square$

Al complejo simplicial $VR_\varepsilon(X)$ se le conoce como el **complejo de Vietoris-Rips de X con radio ε** . La condición $B_\varepsilon(p_{i_s}) \cap B_\varepsilon(p_{i_t}) \neq \emptyset$ en el *Paso 2* de la Definición 6.1, es equivalente a que p_{i_s} y p_{i_t} están a una distancia menor o igual que 2ε , que es como aparece en algunas de las referencias (Ver [5]).

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, y $VR_{\varepsilon_1}(X)$, $VR_{\varepsilon_2}(X)$, los respectivos complejos de Vietoris-Rips de X con radio ε_1 y ε_2 . Notemos que si $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$ es un simplejo de $VR_{\varepsilon_1}(X)$, por construcción, existen puntos $p_{i_0}, \dots, p_{i_m} \in X$ tales que $B_{\varepsilon_1}(p_{i_s}) \cap B_{\varepsilon_1}(p_{i_t}) \neq \emptyset$, para cualesquiera $p_{i_s}, p_{i_t} \in \{p_{i_0}, \dots, p_{i_m}\}$. Luego, puesto que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, tenemos que $B_{\varepsilon_1}(p_{i_j}) \subset B_{\varepsilon_2}(p_{i_j})$, para todo $j = 0, \dots, m$; por lo que $\emptyset \neq B_{\varepsilon_1}(p_{i_s}) \cap B_{\varepsilon_1}(p_{i_t}) \subset B_{\varepsilon_2}(p_{i_s}) \cap B_{\varepsilon_2}(p_{i_t})$. De esta forma, $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$ también es un simplejo de $VR_{\varepsilon_2}(X)$. Así hemos probado que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $VR_{\varepsilon_1}(X) \subset VR_{\varepsilon_2}(X)$. En

general, tenemos que dados

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_k,$$

éstos inducen una **filtración** en los respectivos complejos de Vietoris-Rips, es decir, tenemos que

$$VR_{\varepsilon_1}(X) \subset VR_{\varepsilon_2}(X) \subset \cdots \subset VR_{\varepsilon_k}(X).$$

Mas aún, las contenciones anteriores inducen funciones $\varphi_j : C_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \rightarrow C_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$, definidos por $\varphi_j \left(\sum_{s=1}^m c_s \right) = \sum_{s=1}^m c_s$, para cada $j \in \{1, \dots, k-1\}$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Algunas de las propiedades importantes de estas funciones φ_j son las siguientes:

1. $\varphi_j(c) = c$, para cada $c \in C_r(VR_{\varepsilon_j}(X))$ y $j \in \{1, \dots, k-1\}$
2. $\varphi_j(c_1 + c_2) = \varphi_j(c_1) + \varphi_j(c_2)$, para cualesquiera $c_1, c_2 \in C_r(VR_{\varepsilon_j}(X))$
3. $\varphi_j(Ker \partial_r) \subset Ker \partial_r$
4. $\varphi_j(Im \partial_{r+1}) \subset Im \partial_{r+1}$.

Por lo anterior, las funciones $\varphi_j : C_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \rightarrow C_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$ a su vez inducen funciones

$$(\varphi_j)_* : H_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \rightarrow H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$$

definidas por $(\varphi_j)_*([c]) = [\varphi_j(c)]$, para cada $c \in Ker \partial_r$.

Notemos que puede ocurrir que una clase $[d]$ de $H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$ no pertenezca a la imagen de $(\varphi_j)_*$, en este caso decimos que la clase $[d]$ **nace** en $VR_{\varepsilon_{j+1}}(X)$. Por otra parte, si $[c]$ es una clase de $H_r(VR_{\varepsilon_j}(X))$, podría ocurrir que $(\varphi_j)_*([c])$ sea igual a una clase $[d]$ de $H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$ nacida antes que $[c]$, cuando esto ocurre decimos que la clase $[c]$ **muere** en $VR_{\varepsilon_{j+1}}(X)$. Por construcción, los 0-simplejos $\langle v_0 \rangle, \dots, \langle v_k \rangle$ de $VR_{\varepsilon}(X)$ nacen todos al mismo tiempo, por lo que en este caso, por convención, morirá el vértice que tenga el índice mayor. En la Figura 4 podemos apreciar como al pasar de $\varepsilon = 6$ a $\varepsilon = 9$, el generador $[\langle v_3 \rangle]$ del 0-ésimo grupo de homología se muere.

De esta manera, dados $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_k$, tenemos funciones

$$H_r(VR_{\varepsilon_1}(X)) \xrightarrow{(\varphi_1)_*} \cdots \xrightarrow{(\varphi_{j-1})_*} H_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \xrightarrow{(\varphi_j)_*} H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X)) \xrightarrow{(\varphi_{j+1})_*} \cdots \xrightarrow{(\varphi_{k-1})_*} H_r(VR_{\varepsilon_k}(X)),$$

y la homología persistente hace un seguimiento de como van naciendo y muriendo los generadores de los grupos de homología. Esto se realiza, ya sea por medio de un diagrama de persistencia o mediante un código de barras de persistencia. El **diagrama de persistencia** es un conjunto finito de puntos en $[0, \infty) \times [0, \infty]$. La primera coordenada de estos puntos representa el momento en que un generador nace, mientras que la segunda coordenada representa cuando dicho generador muere. Como habíamos mencionado antes, la homología detecta los agujeros del espacio, por lo que los generadores de la homología que **persisten** durante más tiempo, permiten entender la configuración o la forma en la que están distribuidos los puntos del conjunto X en $\mathbb{R}^k$. Por ejemplo, la persistencia de los generadores del 0-ésimo grupo de homología nos indican que tan dispersos están los puntos de X ; en cambio la persistencia de los generadores del primer grupo de homología podría indicar la forma en que dichos puntos estan agrupados. Vale la pena hacer notar que en ocasiones también es interesante hacer un seguimiento de las clases con baja persistencia, pues estas están asociadas con el *ruido* de los datos, ver, por ejemplo, [1].

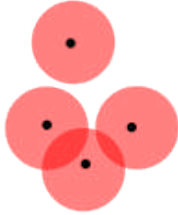
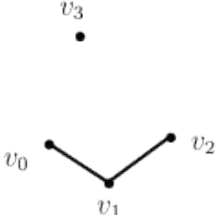
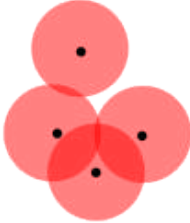
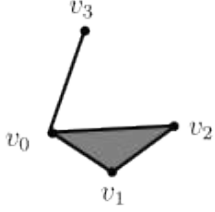
	Conjunto X	Poliedro de $VR_\varepsilon(X)$	Generadores de $H_r(VR_\varepsilon(X))$
$\varepsilon = 6$			$r = 0 : [\langle v_0 \rangle], [\langle v_3 \rangle]$ $r = 1 : [0]$ $r = 2 : [0]$
$\varepsilon = 9$			$r = 0 : [\langle v_0 \rangle]$ $r = 1 : [0]$ $r = 2 : [0]$

Figura 4: Nacimiento y muerte de generadores de $H_r(VR_\varepsilon(X))$.

7. Obtención de diagramas de persistencia usando Python

Python es uno de los lenguajes de programación más usados en la actualidad, por esa razón cuenta con una cantidad enorme de bibliotecas y paquetes con los que puede equiparse [6]. Entre estos podemos encontrar a *Ripser* [12], *Persim* [1], *numpy*, y *matplotlib*. En esta sección nos enfocaremos en el uso de estas bibliotecas para la construcción del diagrama de persistencia. La biblioteca *Ripser*, en particular, para su implementación construye el complejo de Vietoris-Rips de un conjunto de datos X y no permite la construcción de otro tipo de complejos simpliciales (Cech, cúbicos, etc). Todos los códigos de esta sección se encuentran en el repositorio: <https://github.com/amayler/homologiaPersistente>

Ejemplo 7.1. Generadores del 0-ésimo grupo de homología. En este ejemplo aplicamos *Ripser* para obtener el diagrama de persistencia del conjunto *data*, que consiste de 200 puntos en el plano. Las coordenadas de los puntos de *data* varían en un rango de 1-1000 o 2000-3000. El código en Python para realizar todo lo anterior es el siguiente:

```
#####
# Importamos las bibliotecas necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from ripser import ripser
from persim import plot_diagrams
#####
```

```
#####
# Fijamos una semilla para que los resultados sean
# reproducibles
np.random.seed(0)
#####

#####
# Generamos 100 puntos aleatorios en el plano, cuyas
# coordenadas en X y Y varían en el rango 1-1000
# Estos puntos los guardamos en la variable 'data1'
data1=np.random.randint(1,1000,(100,2))

# Generamos 100 puntos aleatorios en el plano, cuyas
# coordenadas en X y Y varían en el rango 2000-3000
# Estos puntos los guardamos en la variable 'data2'
data2=np.random.randint(2000,3000,(100,2))

# Finalmente, con data1 y data2 formamos el conjunto de
# puntos 'data', al cual le aplicaremos las técnicas
# de homología persistente

data=np.vstack((data1,data2))
#####

#####
# Graficamos los puntos del conjunto 'data'
x,y=data.T
plt.plot(x,y,'ro')
plt.show()
#####

#####
# Pedimos a Ripser que haga el diagrama de persistencia
# asociado a los puntos almacenados en 'data'
diagrams=riper(data)['dgms']
plot_diagrams(diagrams,show=True)
#####
```

Compilamos el código anterior y en la Figura 5 presentamos los puntos del conjunto data, mientras que el diagrama de persistencia del conjunto data se muestra en la Figura 6. Tal como puede apreciarse en la Figura 5, los puntos del conjunto data están distribuidos en los rectángulos $[1, 1000] \times [1, 1000]$ y $[2000, 3000] \times [2000, 3000]$. Esto se ve reflejado en el diagrama de persistencia de la Figura 6, pues como se puede apreciar en él hay dos generadores del 0-ésimos grupos de homología que permanecen vivos mucho más tiempo que los otros. Estos puntos están representados por puntos azules de altura mayor a 1500.

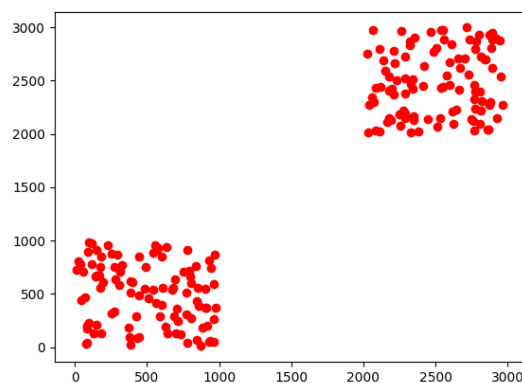


Figura 5: Puntos del conjunto *data* del ejemplo 7.1.

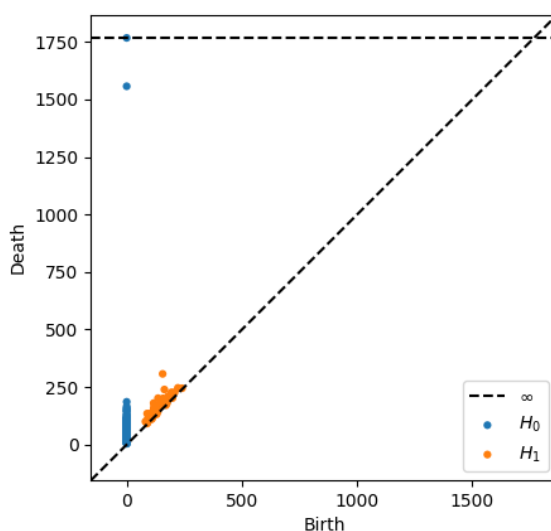


Figura 6: Diagrama de persistencia del conjunto *data* del ejemplo 7.1.

Veamos ahora un ejemplo que nos permita entender cómo funcionan los generadores del primer grupo de homología.

Ejemplo 7.2. *Generadores del primer grupo de homología.* Para este ejemplo usamos el siguiente código:

```
#####
# Importamos las bibliotecas necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from ripser import ripser
from persim import plot_diagrams
#####
```

```
#####
# Fijamos una semilla para que los resultados sean
# reproducibles
np.random.seed(0)
#####

#####
# Generamos un conjunto aleatorio 'data'
x1=np.random.randint(1,100,(100,1))
y1=np.random.randint(100,200,(100,1))
data1=np.vstack((x1.T,y1.T)).T

x2=np.random.randint(100,200,(100,1))
y2=np.random.randint(200,300,(100,1))
data2=np.vstack((x2.T,y2.T)).T

x3=np.random.randint(200,300,(100,1))
y3=np.random.randint(100,200,(100,1))
data3=np.vstack((x3.T,y3.T)).T

x4=np.random.randint(100,200,(100,1))
y4=np.random.randint(1,100,(100,1))
data4=np.vstack((x4.T,y4.T)).T

data_uno=np.vstack((data1,data2)).T
data_dos=np.vstack((data3,data4)).T
data=np.vstack((data_uno.T,data_dos.T))
#####

#####
# Graficamos los puntos del conjunto 'data'
x,y=data.T
plt.plot(x,y,'ro')
plt.show()
#####

#####
# Pedimos a Ripser que haga el diagrama de persistencia
# asociado a los puntos almacenados en 'data'
diagrams=ripser(data)['dgms']
plot_diagrams(diagrams,show=True)
#####
```

Al compilar nuestro código obtenemos los puntos mostrados en la Figura 7. En la Figura 8, los puntos naranjas representan la persistencia de los generadores del primer grupo de homología. En esta misma figura hay un punto naranja que tiene altura mayor a 100, muy distante de los otros puntos naranjas. Dicho punto naranja refleja la existencia de un generador del primer grupo de homología que persiste durante mucho tiempo, esto se debe a que el conjunto data está agrupado alrededor de una elipse, como se muestra en la Figura 9.

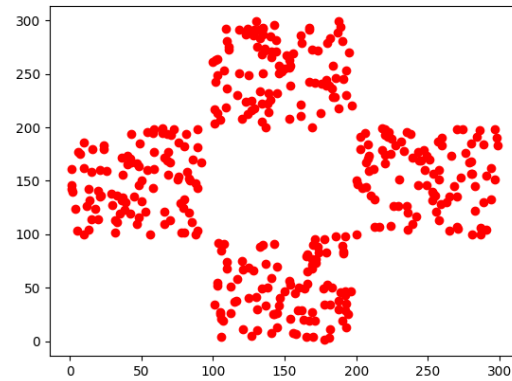


Figura 7: Puntos del conjunto *data* del ejemplo 7.2.

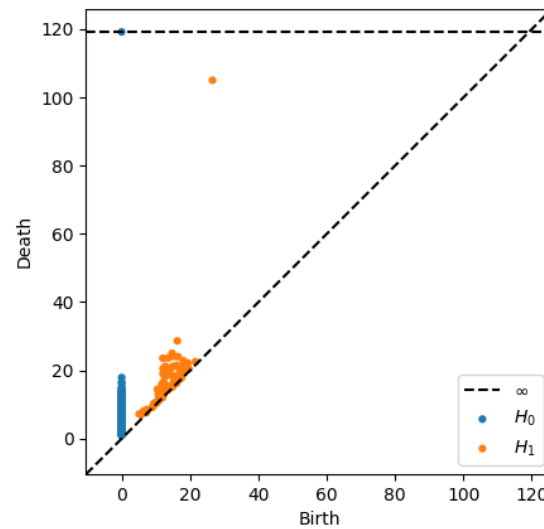


Figura 8: Diagrama de persistencia del conjunto *data* del ejemplo 7.2.

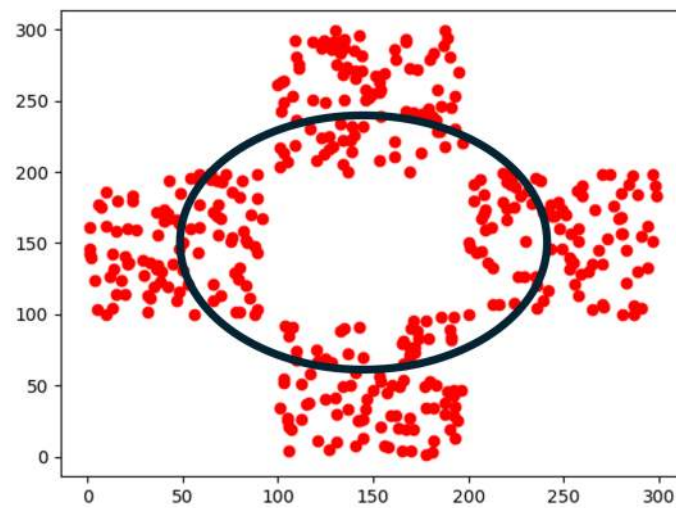


Figura 9: Conjunto *data* del ejemplo 7.2 agrupados en torno a una elipse.

8. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, presentamos los complejos de Vietoris-Rips y la homología persistente asociada a un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^k$. Además, se mostraron un par de ejemplos de cómo se usan algunos paquetes de Python para obtener el diagrama de persistencia de un conjunto de datos y la forma en que se interpreta el diagrama de persistencia. Es necesario mencionar, que a pesar de que en los ejemplos se usaron conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^2$, Ripser es capaz de trabajar con conjuntos de puntos contenidos en espacios euclidianos de dimensiones mayores a 2.

9. Agradecimientos

Los autores agradecen al Lic. en Mat. Ronaldo Álvarez Rivera por las pláticas enriquecedoras sobre complejos simpliciales, y a los revisores de la revista por todas las sugerencias realizadas para el mejoramiento de este trabajo.

10. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

11. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

12. Resumen gráfico

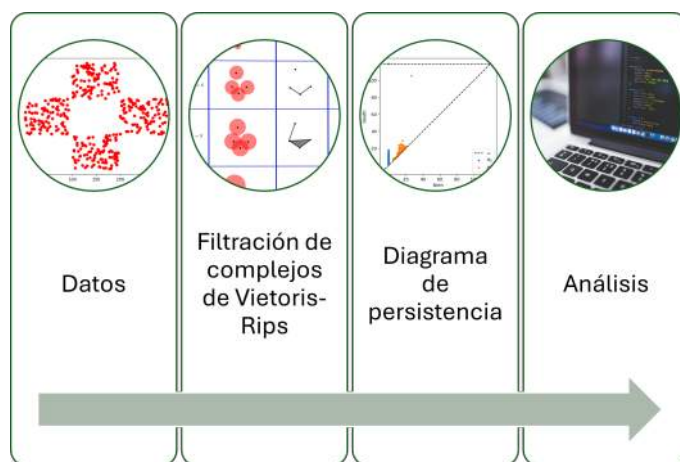


Figura 10: Homología persistente para el análisis de datos

13. Roles de contribución

ROL	AUTORES(AS)
Conceptualización	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Curación de datos	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Juan Roberto Hernández Garibay
Análisis formal	Jair Remigio Juárez Raymundo Domínguez Colín Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Investigación	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Metodología	Jair Remigio Juárez Raymundo Domínguez Colín Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Software	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Validación	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Juan Roberto Hernández Garibay
Visualización	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Juan Roberto Hernández Garibay
Escritura-borrador-original	Jair Remigio Juárez Raymundo Domínguez Colín Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Escritura-revisión-edición	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez

Referencias

- [1] Henry Adams, Timothy Emerson, Michael Kirby, Rachel Neville, Chris Peterson, Patrick Shipman, Sofya Chepushtanova, Eric Hanson, Francesco Motta, and Lori Ziegelmeier. Persistence images: A stable vector representation of persistent homology. *Journal of Machine Learning Research*, 18(8):1–35, 2017.

- [2] Gunnar Carlsson. Topology and data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2):255–308, 2009.
- [3] Gunnar Carlsson, Tigran Ishkhanov, Vin De Silva, and Afra Zomorodian. On the local behavior of spaces of natural images. *International journal of computer vision*, 76:1–12, 2008.
- [4] Edelsbrunner, Letscher, and Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete & computational geometry*, 28(4):511–533, 2002.
- [5] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Computational topology: an introduction*. American Mathematical Soc., 2010.
- [6] Python Software Foundation. *Python Programming Language*. Python Software Foundation, USA, 1991.
- [7] John B Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.
- [8] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2005.
- [9] Israel N Herstein. *Abstract algebra*. John Wiley & Sons, 1996.
- [10] William S Massey. *A basic course in algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1991.
- [11] Chad M Topaz, Lori Ziegelmeier, and Tom Halverson. Topological data analysis of biological aggregation models. *PloS one*, 10(5):e0126383, 2015.
- [12] Christopher Tralie, Nathaniel Saul, and Rann Bar-On. Ripser.py: A lean persistent homology library for python. *The Journal of Open Source Software*, 3(29):925, Sep 2018.
- [13] James W Vick. *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, volume 145. Springer Science & Business Media, 2012.