

Volumen 11 número 32

septiembre-diciembre 2025



**UJAT**

UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

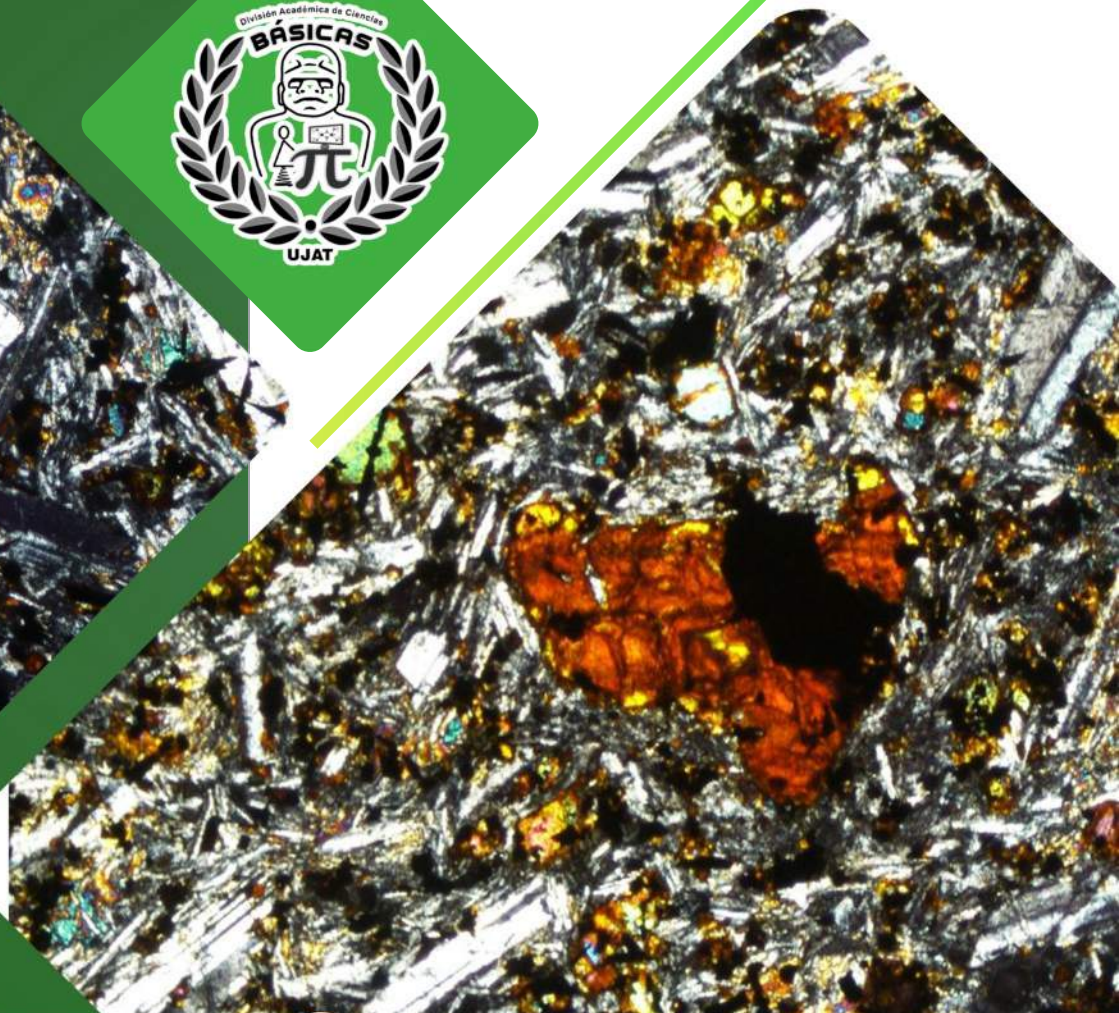
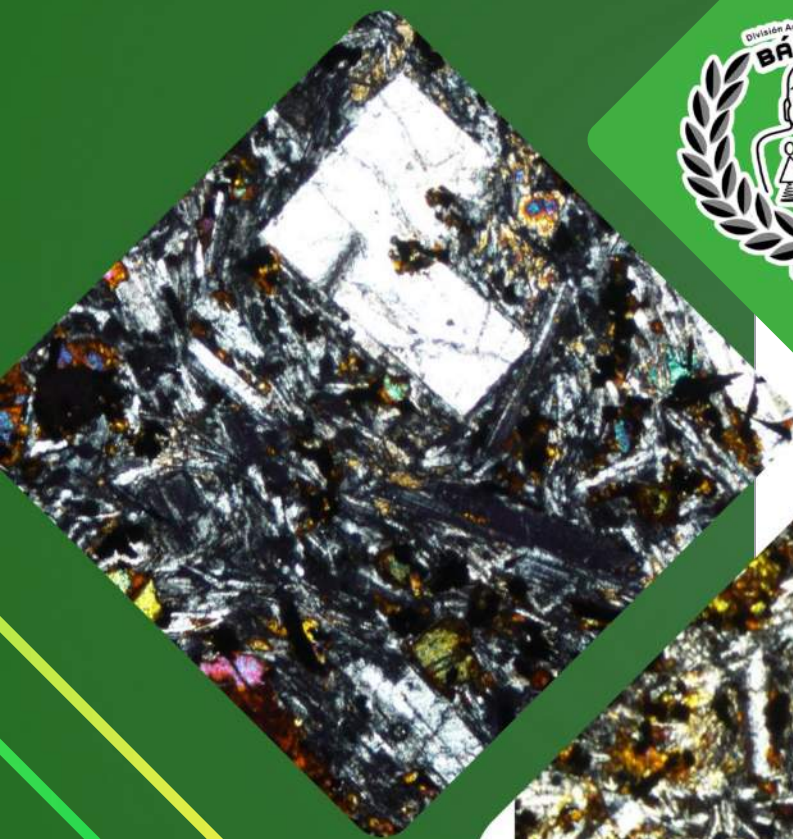
“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

# **JOBS**

$\pi$   $\ddot{a}_x$

**Journal of Basic Sciences**

DACB • UJAT



El presente número del Journal of Basic Sciences está integrado por seis contribuciones que, desde distintos campos de las ciencias naturales y matemáticas, ponen de relieve una característica fundamental en la investigación contemporánea que es la diversidad de enfoques y metodologías aplicadas en la búsqueda de soluciones y respuestas ante problemáticas específicas. Aun cuando el contexto y los objetos de estudios son diversos, desde las ciencias de la tierra hasta el análisis funcional, la física teórica o la teoría de categorías, en todos ellos se comparte un interés común: abundar en la comprensión de los fenómenos abordados, mediante herramientas metodológicas rigurosas.

El primer artículo, realizado en el campo volcánico "La Repartición", situado al noreste de San Luis Potosí, se enfoca en el análisis de la distribución de tamaño de cristales y el cálculo de los tiempos de residencia de microcristales de plagioclasa en este escenario geológico, muy apropiado para el estudio de procesos magmáticos. Con los resultados obtenidos, se enriquece la comprensión de la evolución textural de las rocas máficas y se subraya la importancia de los estudios microestructurales para reconstruir la dinámica interna de los sistemas volcánicos.

En la segunda contribución, se pone de manifiesto también el interés por estudiar la interacción entre procesos naturales y condiciones locales, ya que se examina la composición mineralógica y edafológica de suelos en Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco. Mediante estudios de difracción de rayos X y trabajo en campo, se encuentran diferencias sustanciales en la mineralogía, las propiedades físicas y la capacidad de intercambio iónico de los suelos, revelando así tanto la variabilidad intrínseca de los mismos como la influencia de actividades antropogénicas. Con este trabajo, se ofrecen insumos valiosos destinados a un manejo sostenible de los suelos en la región.

Las síntesis y propiedades catalíticas del óxido de zinc se estudian en el tercer artículo de este número, mediante técnicas analíticas apropiadas se logró la caracterización de este compuesto obtenido mediante combustión en estado sólido, además de que se probó su actividad para la degradación del 4-nitrofenol en condiciones de fotocatalisis, probándose así que puede ser un material promisorio para aplicarse exitosamente en el área de la química ambiental.

El cuarto trabajo se incluye en el ámbito de la probabilidad y el análisis, al analizar las propiedades fundamentales del kernel de calor de Dirichlet asociado a procesos de Markov simétricos, potencialmente discontinuos. Al demostrar una serie de características tales como continuidad, simetría y la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se fortalece la comprensión teórica del fenómeno, además de hacer posible su aplicación en ecuaciones semilineales de reacción-difusión no autónomas. De esta forma se entrelazan procesos estocásticos con problemas de evolución gobernados por operadores no locales.

Por otro lado, se presenta en el quinto artículo una reconstrucción precisa de la deducción de Feynman de las ecuaciones de Maxwell. A partir de la segunda ley de Newton y de las relaciones de Poisson en un espacio euclídeo, el análisis se extiende a un marco relativista mediante cálculos tensoriales en el espacio de Minkowski. Con ello, se abunda en la comprensión de los supuestos fundamentales de la derivación original, fortaleciendo así la formulación pedagógica del problema e integrando el principio de acoplamiento mínimo con los desarrollos de Montesinos y Pérez-Lorenzana.

Finalmente, en la sexta contribución de este número, se profundiza en conceptos centrales de la teoría de categorías, como son la representabilidad, los objetos universales y el Lema de Yoneda. Mediante una serie de ejemplos que abarcan áreas de las matemáticas como el álgebra lineal, la topología y la teoría de anillos, se ofrece una ruta clara hacia la comprensión de estas nociones, contribuyendo así a una difusión de ideas fundamentales que forman parte del pensamiento matemático moderno.

En conjunto, los trabajos incluidos en este número ilustran la riqueza interdisciplinaria de la investigación actual y subrayan el valor del rigor científico, desde sus aspectos conceptuales hasta los metodológicos, para la generación de conocimiento. Que estas aportaciones sirvan de inicio para nuevas dudas e inquietudes, fomentando la interacción académica y estimulando el desarrollo de investigaciones futuras.

## DIRECTORIO INSTITUCIONAL

### Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.  
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.  
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.  
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,  
Divulgación Científica y Tecnológica

### Directorio Divisional División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.  
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.  
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.  
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.  
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

## CONSEJO EDITORIAL

- **Dr. Carlos Ernesto Lobato García.** Editor en Jefe. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7780>
- **Dr. Adib Abiu Silahua Pavón.** Gestor Editorial. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-5344-1430>

## COMITÉ EDITORIAL

- **Mtra. Claudia Gisela Vázquez Cruz.** Editora Asociada. Actuaría. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0002-1791-5621>
- **Mtra. María Hortensia Almaguer Cantú.** Editora Asociada. Ciencias de la Computación. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0007-7839-9014>
- **Dr. José Arnold González Garrido.** Editor Asociado. Ciencias Farmacéuticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-1135-4050>
- **Dr. José Luis Benítez Benítez.** Editor Asociado. Física. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0009-0000-0561-5029>
- **Mtro. Guillermo Chávez Hernández.** Editor Asociado. Geofísica. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-3555-9678>
- **Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé.** Editora Asociada. Matemáticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-7342-0888>
- **Dra. Nancy Romero Ceronio.** Editora Asociada. Química. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-8169-3811>

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 32, diciembre de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. <https://revistajobs.ujat.mx>. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación y de esta Casa Editora.

Las publicaciones respaldadas con el sello editorial de la UJAT no podrán utilizarse para entrenar modelos de IA generativa, a menos de que haya una declaración expresa, tanto de la Universidad como de los autores y/o herederos.

## CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
<b>Distribución de tamaño de cristales y tiempo de residencia en rocas máficas del Complejo La Repartición, San Luis Potosí, México</b>	<b>1-9</b>
<b>Caracterización Mineralógica y Edafológica de los Suelos de Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco</b>	<b>10-19</b>
<b>Propiedades Fotocatalíticas del ZnO Sintetizado por Combustión en Estado Sólido: Análisis Estructural y Degradación de 4-Nitrofenol</b>	<b>20-28</b>
<b>Propiedades elementales del kernel de calor de Dirichlet para procesos de Markov simétricos y sus aplicaciones</b>	<b>29-51</b>
<b>Deducción de las ecuaciones de Maxwell mediante la prueba de Feynman-Dayson y su generalización relativista</b>	<b>52-67</b>
<b>Funtores representables, lema de Yoneda y objetos universales.</b>	<b>68-84</b>

## **Distribución de tamaño de cristales y tiempo de residencia en rocas máficas del Complejo La Repartición, San Luis Potosí, México**

**Torres-Sánchez D.<sup>1\*</sup> , Soto-Ramírez D.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Instituto de Geociencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Blvd. Juriquilla 3001, Campus UNAM-Juriquilla, Querétaro, 76230, México.

<sup>2</sup>Posgrado de la División de Geociencias Aplicadas, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT), Camino a la Presa San José 2055, San Luis Potosí 78216, México<sup>o</sup>

\*[dtorressan@geociencias.unam.mx](mailto:dtorressan@geociencias.unam.mx), [dariotorressan@hotmail.com](mailto:dariotorressan@hotmail.com)

---

### **Resumen**

El Campo Volcánico de La Repartición (CVLR) localizado en la porción noreste del Campo Volcánico de San Luis Potosí, presenta una variación en distintos tipos de rocas volcánicas, destacándolo como un laboratorio natural ejemplar para análisis petrológicos. Por lo tanto, el presente trabajo muestra como objetivo el realizar análisis de distribución de tamaño de cristales (CSD) y cálculos de tiempo de residencia en microcristales de plagioclasas de rocas máficas para comprender el tiempo de formación y la variación textural de estos minerales en los reservorios magmáticos. Los análisis petrográficos revelaron que las muestras analizadas presentan un ensamblaje mineralógico de olivino, piroxeno y plagioclasa embebidos en una matriz vítrea. Los análisis CSD exhiben pendientes pronunciadas para todas las muestras analizadas, como también, los tiempos de residencia indican un aproximado de 3 años, lo cual sugiere un rápido ascenso de los magmas a la superficie en niveles superiores de la corteza continental.

**Palabras claves:** *Distribución de tamaño de cristales, tiempo de residencia, petrografía, La Repartición, San Luis Potosí, México.*

### **Abstract**

La Repartición Volcanic Field (LRVF), located in the northeastern portion of the San Luis Potosí Volcanic Field, presents a variety of volcanic rock types, highlighting it as an exemplary natural laboratory for petrological analysis. Therefore, the present work aims to perform crystal size distribution (CSD) analyses and residence time calculations on plagioclase microcrystals from mafic rocks to understand the formation time and textural variation of these minerals in magmatic reservoirs. Petrographic analyses revealed that the analyzed samples present a mineralogical assemblage of olivine, pyroxene, and plagioclase embedded in a glassy matrix. CSD analyses exhibit steep slopes for all analyzed samples, and residence times indicate an approximate of 3 years, which suggests a rapid ascent of magmas to the surface at upper levels of the continental crust.

**Keywords:** *Crystal size distribution, residence time, petrography, La Repartición, San Luis Potosí, México.*

---

Recibido: 25 de agosto de 2025, Aceptado: 17 de noviembre de 2025, Publicado: 12 de diciembre de 2025

## 1. Introducción

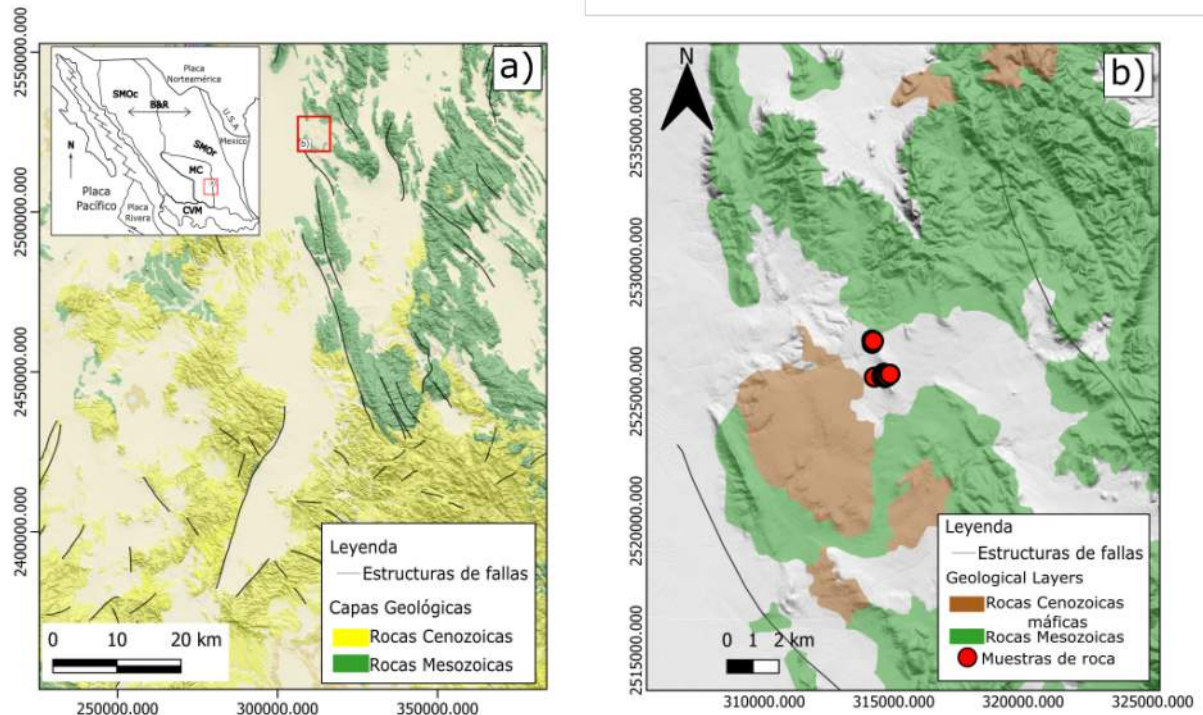
Dentro de la petrología, es bien sabido que la forma y tamaños de los cristales de rocas volcánicas refleja las condiciones de enfriamiento y de crecimiento en los sistemas magmáticos [1]. De igual forma, se conoce que la mayoría de las rocas volcánicas muestran cristales que varían en tamaños desde micras ( $\mu\text{m}$ ) hasta centímetros (cm), una característica que se explota comúnmente en el análisis de distribución del tamaño de cristales para poder inferir las vías y formas de ascenso del magma, la cinética de cristalización, o bien, los tiempos de residencia de los cristales en las cámaras o reservorios magmáticos [2].

La presencia de múltiples poblaciones de cristales en rocas volcánicas sugiere múltiples eventos de nucleación y crecimiento bajo condiciones magmáticas (p.ej. subenfriamiento magmático). Un ejemplo de esto son las poblaciones de microlitos, los cuales pueden formarse por descompresión durante el ascenso a la superficie o por enfriamiento durante el emplazamiento de la lava. Es por esto, que es razonable suponer que cada población de cristales de rocas volcánicas desarrollará morfologías cristalinas distintas que reflejan condiciones magmáticas cambiantes [3].

Por lo tanto, el presente trabajo muestra como objetivo el aplicar técnicas analíticas cuantitativas para la comprensión de la formación y variación textural de plagioclasas en rocas volcánicas de composición máfica. Para lograrlo se seleccionó rocas máficas pertenecientes al derrame Romerillo del Complejo Volcánico La Repartición, San Luis Potosí. El Complejo Volcánico La Repartición compone uno de los seis complejos volcánicos del Campo Volcánico de San Luis Potosí (CVSLP; Fig. 1a) el cual se caracteriza principalmente por un magmatismo voluminosos de rocas silíceas desarrolladas durante el periodo del Eoceno y el Oligoceno [4-8]. Las rocas máficas que componen al Complejo Volcánico La Repartición han sido estudiadas de manera escasa [5], por lo que el estudio de la formación, caracterización y procesos magmáticos involucrados en la formación de este tipo de rocas sigue siendo un tema de interés dentro de las geociencias del área de estudio.

## 2. Contexto geológico breve

El Complejo Volcánico La Repartición (CVLR; Fig. 1b) se localiza en la porción noreste del CVSLP (Fig. 1a) y se encuentra conformado principalmente por rocas volcánicas de composición félsica (flujos de lava y paquetes piroclásticos), como también por rocas volcánicas de composición de máfica e intermedia (flujos de lava) las cuales cubren un periodo de tiempo de formación que oscila entre el Oligoceno al Mioceno (~ 32-20 Ma; [5]).



**Figura 1.** a) Mapa geológico simplificado del Campo Volcánico San Luis Potosí; b) Mapa geológico simplificado del Complejo Volcánico La Repartición.

Asimismo, estas estructuras volcánicas se encuentran emplazadas a través de un basamento Cretácico el cual se encuentra conformado principalmente por rocas sedimentarias [9,5,10], como también, esta región se encuentra afectada por estructuras geológicas del Cenozoico como son: (i) sistemas de fallas normales con tendencias este-noreste (E-NE) y noroeste (NW); (ii) estructuras de pliegues con orientaciones E-NE relacionadas a la orogenia Laramide [11].

### 3. Metodología

#### 3.1 Análisis petrográfico

Se prepararon láminas delgadas de cinco muestras representativas de la zona para la elaboración del análisis modal y cuantitativo. Se elaboró un conteo de aproximadamente 1000 puntos en cada lámina delgada para la clasificación modal utilizando un microscopio petrográfico Leica y un contador de puntos semi-automático de marca PELCON en el Instituto Potosino de Investigaciones Científica y Tecnológicas (IPICYT), San Luis Potosí.

#### 3.2 Análisis de distribución de tamaño de cristal

El concepto de distribución del tamaño de cristal (CSD por sus siglas en inglés *crystal size distribution*) se introdujo por primera vez para comprender la dinámica del magma en términos de los procesos de cristalización de plagioclasas y para conocer la tasa de crecimiento durante la evolución de rocas magmáticas [12-13]. La variación del logaritmo natural de la densidad de población cristalina, es decir, el número de cristales por unidad de volumen, en conjunto con el tamaño del cristal (L) proporcionan un

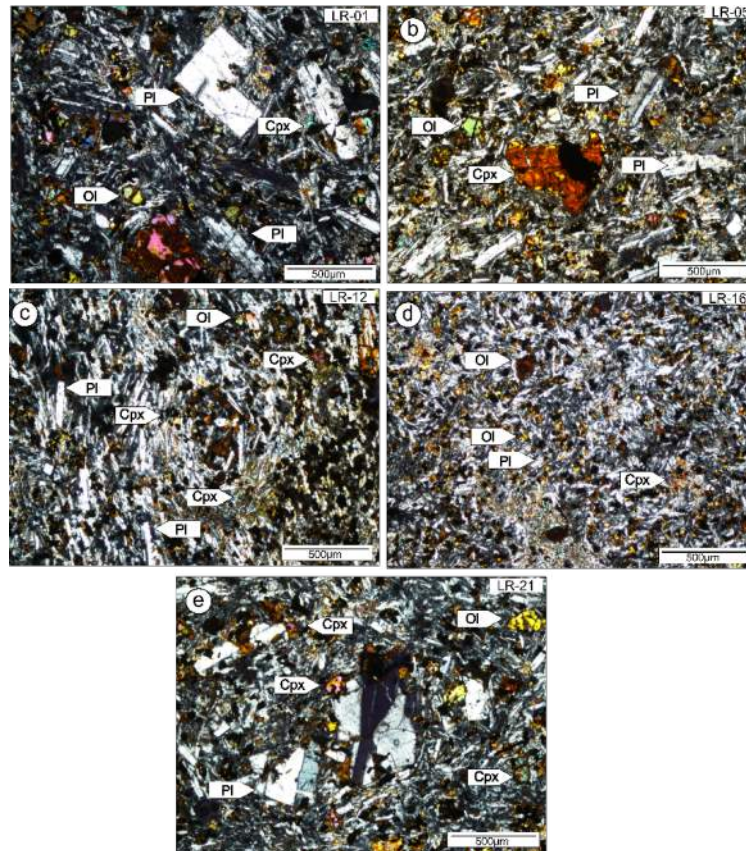
patrón lineal en un estado constante del sistema magmático [14]. El diagrama CSD muestra líneas rectas que sugieren las condiciones constantes del magma [14]. Se sugiere que un conjunto de líneas rectas a lo largo de la misma pendiente, pero con una variación en las intersecciones generadas por la reducción de temperatura, modifica la pendiente de la CSD, pero inhibe el mismo valor de la intersección. Una pendiente más pronunciada muestra evidencia de fraccionamiento de cristales. Según [14], la CSD curva y cóncava ascendente sugiere firmemente el proceso de mezcla de magma. Además, la CSD curva se genera como resultado del período progresivo de enfriamiento a través del ascenso y el emplazamiento del magma [15]. Por lo tanto, a partir del procesamiento propuesto por [14], se realizó el análisis de imágenes automático de las cinco muestras de roca representativas (Muestra LR01, LR05, LR12, LR16, LR21; Tabla 1) de las cuales se tomaron tres microfotografías representativas por cada muestra utilizando un microscopio de marca LEICA con cámara integrada del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT), San Luis Potosí. La adquisición de información para los análisis de CSD fue obtenida a partir del uso del software ImageJ (<https://imagej.net/ij/>), como también, los datos obtenidos se corrigieron, graficaron y se realizaron los cálculos adecuados utilizando el software CSDCorrections propuesto por [1]. El procesamiento de imágenes se centró en la obtención de longitudes, anchuras y áreas de los microcristales de plagioclasa que incorporan a las muestras seleccionadas. A partir de la información obtenida por el procesamiento de imágenes y aplicando el uso del software CSDCorrections [1] se obtuvieron las regresiones lineales correspondientes para el cálculo de la pendiente ( $m$ ) e intercepto para cada una de las muestras. La obtención de estas regresiones se asocia a la variación del logaritmo natural de la densidad de población de cristales (p.ej. el número de cristales por unidad de volumen) con el tamaño de cristal brindando así un patrón lineal bajo un estado consistente de sistemas abiertos [1].

## 4. Resultados y discusión

### 4.1 Análisis petrográfico

Las rocas volcánicas de composición máfica del CVLR exhiben una textura porfirítica con una presencia esporádica de vesículas (Fig. 2). Los microlitos observados en las muestras analizadas muestran una orientación sub-paralela con una matriz de estilo afanítica (Fig. 2). A su vez, se observa que el ensamblaje mineralógico principal se conforma por fenocristales de plagioclasa, los cuales se encuentran de forma escasa ( $\sim 0.3$  a  $0.8$  mm de diámetro), a su vez, se observan fenocristales subhedrales a euhedrales de clinopiroxeno (Fig. 2) con diámetros aproximados de  $0.3 - 0.5$  mm, adicionalmente, se presentan en microcristales subhedrales ( $< 0.1$  mm) de olivino (Fig. 2).

La mineralogía presente en estas rocas volcánicas se alinea a los ensamblajes mineralógicos típicos de rocas máficas del Campo Volcánico de San Luis Potosí, tanto del sector norte como del sector sur [8]. A partir de los resultados geoquímicos y geofísicos presentados por [16], se considera que un sistema magmático segmentado es exhibido por debajo del CVLR, dando lugar a características petrográficas (tamaños, formas y abundancias de cristales) variadas para un mismo estilo de litología (Fig. 2).



**Figura 2.** Microfotografías de rocas máficas del CVLR. (a-e) Fenocristales de olivino (Ol), clinopiroxenos (Cpx) y plagioclasas (Pl) con microcristales de plagioclase (Pl) embebidos en un matriz vítrea con presencia de microcristales opacos esparcidos a lo largo de la matriz.

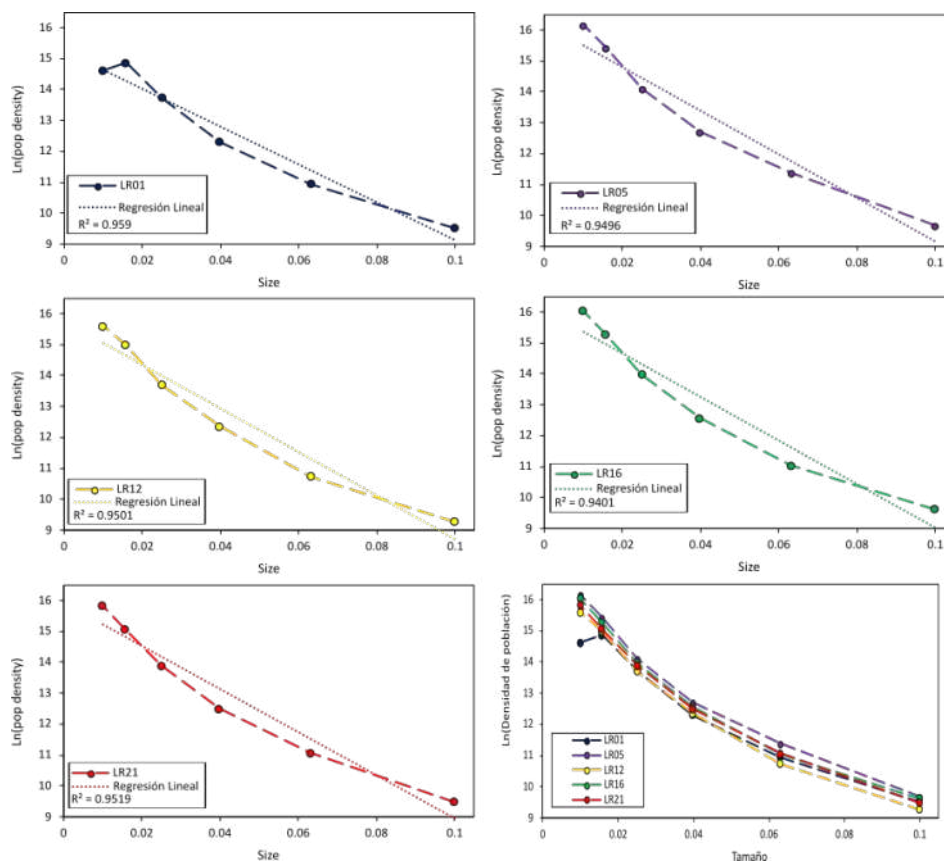
#### 4.2 Distribución de tamaño de cristales (CSD) de rocas máficas del CVLR

El resultado de los análisis de distribución de tamaño de cristales en microcristales ( $< 0.1$  mm) de plagioclase se reporta en la Figura 3. Las rocas máficas del CVLR poseen valores de pendientes que abarcan desde  $-84.5$  a  $-100$  ( $\text{mm}^{-1}$ ) e interceptos de  $15.52$  a  $16.52$  ( $\text{mm}^{-4}$ ) con valores de  $R^2$   $0.95 - 0.94$  lo cual sugiere que las muestras son estadísticamente significativas (valores significativos  $R^2 = > 0.95$ ; [1]). La pendiente pronunciada observada en los microcristales de plagioclasas de las rocas máficas del CVLR se relacionan con un número de gradiente más alto al de una pendiente suave (Fig. 3). Este tipo de pendiente pronunciada corresponde a una rápida tasa de formación de cristales, lo que brinda lugar a microcristales, o cristales pequeños [17]. A su vez, estos resultados sugieren que las muestras se relacionan a un estilo eruptivo asociado a escorias de depósitos estrombolianos [1]. Este estilo de resultados puede ser observado de igual forma en rocas ígneas analizadas por [3], [12] y [13], en donde presentan tasas de cristalización rápidas para microcristales, como para fenocristales de plagioclase, muy similares a las presentes en las muestras del presente estudio.

Por otro lado, para calcular la tasa de residencia de los cristales en el magma correspondiente se realizó el cálculo siguiendo la ecuación:

$$Tr = \left( -\frac{1}{G \times M} \right) / 31536000$$

en donde Tr se refiere al tiempo de residencia calculado en años, G es el rango de crecimiento del cristal (mm/s;  $10^{-10}$  -  $10^{-6}$  mm/s) y m describe a la pendiente de la línea de tendencia de la población de cristales, obtenida por el análisis de CSD. Dentro de esta fórmula el valor de G es elegido en base al valor propuesto por [18] para cristales de plagioclasas de rocas máficas ( $G = 10^{-10}$  mm/s) mientras que la constante de 31536000 es el coeficiente de conversión de segundos años.



**Figura 3.** Gráficas de densidad de población vs tamaño de cristal relacionado a los microcristales de plagioclasa de las rocas volcánicas del CVLR. En los gráficos se observa una pendiente pronunciada para la mayoría de los microcristales de las rocas, lo cual indica un crecimiento progresivo de los microcristales de plagioclasas, con excepción de la muestra LR01, la cual presenta una pequeña tendencia abrupta, en microcristales de tamaño  $<0.02$ mm lo que marca un cambio en crecimientos brusco al momento de generación de los microcristales presentes en la muestra.

Siguiendo las recomendaciones mencionadas por [19], se consideró que la formación de los microcristales de plagioclasa presentes en las rocas máficas del CVLR tuvo lugar en la parte superior del sistema magmático del área de estudio. Los cálculos de tiempo de residencia revelan que los microcristales de plagioclasa presentes en las rocas máficas del CVLR varía de un tiempo de 3.75 a 3.28 años (Tabla 1), lo cual sugiere que la población de microcristales sufrió un subenfriamiento alto [20].

**Tabla 1.** Información del análisis de distribución de tamaño de cristales correspondientes a las rocas máficas del CVLR (Inicial LR# indica las iniciales de la zona La Repartición).

Muestra	Pendiente de la línea de tendencia	Intercepto	R <sup>2</sup>	Tiempo de residencia (años)
LR01	-84.5	15.52	0.95	3.75
LR05	-99.5	16.56	0.94	3.19
LR12	-98.4	16.03	0.95	3.22
LR16	-100	16.4	0.94	3.17
LR21	-96.7	16.13	0.95	3.28

El sub-enfriamiento alto de microcristales en rocas volcánicas, comúnmente se relaciona a procesos de cristalización que toman lugar en niveles someros de la corteza continental en un periodo de tiempo corto [20], como es el caso que observamos para las rocas máficas del CVLR. Por lo tanto, se puede mencionar que el proceso de cristalización de microcristales de plagioclasa en rocas máficas del CVLR tomó lugar en niveles someros de la corteza en un periodo corto de tiempo (~3 años) previo a su erupción a la superficie.

El tiempo de residencia, en conjunto con los resultados de los análisis de distribución de cristales de las rocas máficas del CVLR marcan una evidencia de procesos de cristalización fraccionada rápida en conjunto con un estancamiento en niveles someros de la corteza continental, esto apoya a lo propuesto por [16] en donde, a partir de información aeromagnética y geoquímica, se propone un sistema magmático con reservorios someros a niveles de la corteza continental superior, como también, la actividad de procesos magmáticos de cristalización fraccionada. A su vez, este estilo de procesos magmáticos que afectan a las rocas máficas del CVLR, se ha observado a partir de análisis geoquímicos en complejos volcánicos aledaños de la zona de estudio, pertenecientes al Campo Volcánico de San Luis Potosí (p.ej. Complejo Volcánico Ventura, Ahualulco, Sierra de San Miguelito, entre otros). Asimismo, realizando una pequeña comparación con una zona alejada al contexto del Campo Volcánico de San Luis Potosí, [21] reportan tiempos de residencia cercanos a los de las rocas máficas del CVLR para el volcán Vesubio, Italia. Estos autores relacionan los tiempos de residencia (< 6 años; [21]) ha procesos de cristalización fraccionada rápida, como también, a un ascenso magmático parcialmente lento a través de la corteza continental. Por lo tanto, esta primera aproximación da lugar a futuras investigaciones relacionadas a los procesos de cristalización que afectan la zona, como también, la aplicación de distintas técnicas analíticas como lo puede ser el uso de la microsonda electrónica.

## 5. Conclusiones

Las rocas máficas del CVLR se caracterizan por presentar texturas porfíricas y un ensamblaje mineralógico principal de olivino, piroxeno y plagioclasas. A su vez, la matriz de estas rocas es vítrea con una alta presencia de microcristales de plagioclasas. A partir de los resultados obtenidos se considera que el tiempo estimado de residencia para los microcristales de plagioclasas presentes en la matriz de las rocas volcánicas cubre aproximadamente tres años. Este periodo de tiempo sugiere un proceso de sub-enfriamiento alto y rápido en niveles someros de la corteza continental. Asimismo, las pendientes pronunciadas observadas en las rocas volcánicas confirman el tiempo de residencia rápido, lo cual conduce a la generación de microcristales.

## 6. Agradecimientos

El primer autor (DTS) agradece a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por una beca posdoctoral. El segundo autor (DSR) se encuentra agradecido por el SECIHTI por el otorgamiento de una beca de posgrado de nivel Maestría. A su vez, agradecemos al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT), San Luis Potosí, por las facilidades en la preparación de láminas delgadas.

## 7. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses

## 8. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no se ha utilizado ninguna aplicación, software, página web o alguna herramienta de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de datos del presente trabajo.

## 9. Referencias

- [1] Higgins, M.D., “Quantitative Textural Measurements In Igneous and Metamorphic Petrology”. Cambridge University Press, 2006.
- [2] Cashman K.V. “Crystal Size Distribution (CSD) Analysis of Volcanic Samples: Advances and Challenges”, *Frontiers in Earth Science* vol. 8, pp. 1-17, 2020.
- [3] Mangler *et al.*, “Variation of plagioclase shape with size in intermediate magmas: a window into incipient plagioclase crystallization”, *Contributions to Mineralogy and Petrology*, vol. pp. 177:64, 2022
- [4] Labarthe-Hernández G., Tristán-González. “Cartografía Geológica Ahualulco: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Instituto de Geología y Metalurgia”. Folleto Técnico 70, 34, 1981
- [5] Tristán-González *et al.*, Geocronología y distribución especial del vulcanismo del Campo Volcánico de San Luis Potosí. *Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana* vol. 61, pp. 287-303, 2009.
- [6] Aguillón-Robles *et al.*, “Eocene to quaternary mafic-intermediate volcanism in San Luis Potosí, central Mexico: the transition from Farallon plate subduction to intra-plate continental magmatism”, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 276, pp. 152-172, 2014.
- [7] Verma *et al.*, “Geochemistry and petrogenesis of oligocene felsic volcanic rocks from the Pinos Volcanic Complex, Mesa Central, Mexico”, *Journal South American Earth Sciences* vol.102:102704, 2020;
- [8] Torres-Sánchez *et al.*, “ $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$  geochronology and petrogenesis of the sierra de San Miguelito volcanic complex, Mesa Central, Mexico”, *Lithos* vol. 370-371: 105613, 2020.
- [9] Eguiluz de Antuñano *et al.*, “Tectónica de la Sierra Madre Oriental”, *Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana* vol. 53, pp. 1-26, 2000.
- [10] Xu *et al.*, “Inherited structures controlling the development of the Arista-Ahualulco graben in the Mesa Central Mexico”, *Journal of South American Earth Sciences* vol. 112: 103586, 2021
- [11] Barboza *et al.*, “Carta geológica-minera Llanos del Carmen F14-A54 San Luis Potosí, escala 1: 50,000: Pachuca, Hidalgo México”, Consejo de Recursos Minerales 1 mapa, 2001.
- [12] Cashman K.V., Marsh B.D., “Crystal size distribution (CSD) in rocks and the kinetics and dynamics of crystallization II. Makoapuhi lava lake”. *Contribution to Mineralogy and Petrology* vol 99, pp. 292-305, 1988.

- [13] Marsh B.D., "On the interpretation of crystal size distributions in magmatic systems". *Journal of Petrology* vol. 39., pp. 553-600, 1998.
- [14] Higgins M.D. "Measurement of crystal size distributions", *American Mineralogy* vol. 85, pp. 1105-1116, 2000.
- [15] Armienti *et al.*, "Effects of magma storage and ascent on the kinetics of crystal growth: the case of the 1991-1993 Mt. Etna eruption", *Contributions to Mineralogy and Petrology* vol. 155, pp. 402-414, 1994.
- [16] Torres-Sánchez *et al.*, "Extensional Cenozoic Magmatism in the Mesa Central, Mexico: Petrological and Geochemical Evidence from La Repartición, San Luis Potosí", Submitted to *Journal of South American Earth Sciences*. Submitted.
- [17] Jovian *et al.*, "Textural analysis and crystal size distribution of volcanic episodes at Dieng Volcanic Complex: Interpretation of Crystallization and Magmatic Process", *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* vol. 1517: 012001, 2025.
- [18] Cashman K.V. "Relationship between plagioclase crystallization and cooling rate in basaltic melts", *Contributions to Mineralogy and Petrology* vol 133, pp. 126-142, 1993.
- [19] Nugroho *et al.* "Crystal size distribution (CSD) of plagioclase phenocryst-micrphenocryst and the calculation of crystal resident times in the continuous central eruption sequences of Mount Lasem, Central Java, Indonesia", *Journal of Physics: Conference Series* vol 1363: 01204, 2019.
- [20] Hort M. "Abrupt Change in Magma Liquids Temperature because of Volatile Loss or Magma Mixing: Effects on Nucleation, Crystal Growth and Thermal History of the Magma". *Journal of Petrology* vol 39, pp. 1063-1076, 1998.
- [21] D'Oriano *et al.* "Dynamics of ash-dominated eruptions at Vesuvius: the post-512 AD AS1a event", *Bulletin of Volcanology* vol. 73, pp. 699-715, 2011.

## **Caracterización Mineralógica y Edafológica de los Suelos de Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco**

Flores-Candelero, G. H.<sup>1</sup>, Navarro-Rangel, J. A.<sup>1\*</sup>, López-de Dios, C. del C.<sup>1</sup>, Torres-Suaret, Q.<sup>1</sup>, Alcudia-Arellano, J. T.<sup>1</sup>, García-Zaleta D. S.<sup>2</sup>, Solis-Perez, Y.Y.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Juárez Autónoma de Tabasco-División Académica de Ciencias Básicas UJAT-DACB,

<sup>2</sup>Universidad Juárez Autónoma de Tabasco -División Académica Multidisciplinaria de Jalpa de Méndez UJAT-DAMJM.,  
\*janara1998@hotmail.com

---

### **Resumen**

Este estudio aborda la caracterización mineralógica y edafológica de suelos provenientes de los municipios de Huimanguillo y Jalpa de Méndez, en Tabasco, México. A través del análisis de difracción de rayos X (DRX) y estudios edafológicos, se identificaron variaciones en la composición mineral y en la capacidad de intercambio catiónico (CIC) entre ambos sitios. Los suelos de Jalpa de Méndez mostraron una mayor diversidad mineralógica, mientras que los de Huimanguillo presentaron señales de alteración por actividad antropogénica. Las propiedades físicas como textura, color y humedad, así como las condiciones biológicas y presencia de materia orgánica, también variaron entre los perfiles analizados. Los resultados obtenidos aportan información relevante para comprender el potencial productivo de estos suelos y establecer estrategias adecuadas de conservación y manejo sostenible en la región.

**Palabras claves:** *Composición mineralógica, Suelos, Difracción de rayos X, Capacidad de intercambio catiónico, Fertilidad del suelo.*

### **Abstract**

This study addresses the mineralogical and edaphological characterization of soils from the municipalities of Huimanguillo and Jalpa de Méndez, in Tabasco, Mexico. Through X-ray diffraction (XRD) analysis and soil profile descriptions, variations were identified in mineral composition and cation exchange capacity (CEC) between the two sites. The soils from Jalpa de Méndez showed greater mineral diversity, while those from Huimanguillo presented signs of alteration due to anthropogenic activity. Physical properties such as texture, color, and moisture, along with biological activity and organic matter content, also varied among the analyzed profiles. The results provide valuable information for understanding the productive potential of these soils and for developing appropriate strategies for their conservation and sustainable management.

**Keywords:** *Mineralogical composition, Soils, X-ray diffraction, Cation exchange capacity, Soil fertility.*

---

Recibido: 26 de marzo de 2025, Aceptado: 19 de agosto de 2025, Publicado: 12 de diciembre de 2025

## 1. Introducción

El estado de Tabasco presenta una diversidad edafológica importante, con suelos que han sido afectados por actividades antropogénicas e industriales (Palma & Rincon-Ramirez, 2007). La creciente presión de la urbanización, la expansión agrícola y la explotación petrolera han modificado significativamente las características edáficas, lo que ha generado una disminución en la calidad de los suelos y una mayor susceptibilidad a la erosión y degradación (Pérez-López, 2013). Investigaciones previas han demostrado que la composición mineral de un suelo influye directamente en sus propiedades físicas y químicas, afectando su capacidad de retención de agua, intercambio de nutrientes y resistencia a la erosión (Espejel-García et al., 2015). La interacción de estos minerales con contaminantes orgánicos e inorgánicos es un factor crucial para evaluar su degradación y potencial de recuperación (Alberto & Abril, 2018).

La edafología, rama de la ciencia que estudia los suelos en su ambiente natural, permite comprender los procesos de formación, estructura y composición de estos, proporcionando bases científicas para su conservación y uso sostenible (Zavala-Cruz et al., 2017). En este contexto, el análisis mineralógico se ha convertido en una herramienta clave en estudios de geoquímica y manejo del suelo. Este tipo de análisis permite determinar la composición de los suelos y su impacto en la fertilidad y capacidad de retención de nutrientes. Factores como la presencia de minerales arcillosos, la porosidad y la capacidad de intercambio catiónico influyen directamente en el desarrollo de la vegetación y la productividad agrícola. (David J. Palma-López et al., 2007).

Los suelos predominantes en el estado de Tabasco son clasificados como vertisoles los cuales están constituidos por sedimentos aluviales del Cuaternario Reciente (0.0117 Ma) y presentan solamente horizontes superficial (A) y material parental (C), dentro de esta clasificación se encuentran nuestras zonas de estudio en Jalpa de Méndez y Huimanguillo (Palma & Rincon-Ramirez, 2007), se caracterizan por una intensa meteorización química debido a las altas temperaturas y precipitaciones, lo que favorece la lixiviación de nutrientes esenciales y la acumulación de minerales secundarios (Espejel-García et al., 2015). Además, la fertilidad del suelo está influenciada por la cantidad y tipo de arcillas presentes. Suelos con alto contenido de esmécticas y vermiculitas presentan una mayor capacidad de retención de nutrientes, mientras que aquellos dominados por cuarzo y arenas suelen ser menos fértiles y más propensos a la erosión (Martínez-Rodríguez et al., 2021). La presencia de óxidos de hierro y aluminio también puede afectar la disponibilidad de fósforo, un elemento esencial para el crecimiento de las plantas (Cejudo & Herrera-Caamal, 2019).

En estudios recientes, se ha encontrado que los suelos de regiones tropicales, como Tabasco, presentan un proceso acelerado de lixiviación debido a la alta precipitación, lo que reduce la disponibilidad de nutrientes esenciales (Quintero Ramirez et al., 2017). La influencia de actividades humanas como la deforestación y la expansión agrícola ha intensificado la pérdida de nutrientes y la compactación del suelo, afectando su estructura y porosidad (Palma & Rincon-Ramirez, 2007). Además, la contaminación por hidrocarburos y metales pesados ha modificado la composición química de los suelos, lo que puede generar efectos adversos en los ecosistemas y en la producción agrícola (González-Ruiz et al., 2015). Este estudio se enfoca en el estudio de los suelos de Huimanguillo y Jalpa de Méndez mediante su mineralogía. La composición mineralógica permitirá evaluar la influencia de estos minerales en la calidad del suelo, proporcionando información clave para el diseño de estrategias de manejo y conservación sostenible.

## 2. Metodología

### 2.1 Recolección de muestras

El estudio se realizó mediante la recolección de muestras de suelo en los municipios Roberto Madrazo Pintado, Huimanguillo (UTM 15 Q 434925.00, 1976676.00) y en Chacalapa Jalpa de Méndez, Tabasco (UTM 15Q 488505.00, 2006871.00), seleccionando tres horizontes en cada sitio de muestreo. Se establecieron protocolos de muestreo siguiendo las recomendaciones de la Norma Oficial Mexicana NOM-

021-SEMARNAT-2000 (Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales [SEMARNAT], 2000) para garantizar representatividad y evitar contaminación cruzada.

## **2.2 Descripción de perfiles**

La descripción del perfil del suelo se realizó conforme a los lineamientos establecidos por la norma **NMX-AA-132-SCFI-2006**, la cual proporciona una guía estandarizada para la caracterización morfológica de los horizontes del suelo en campo.

## **2.3 Tratamiento de las muestras**

Las muestras fueron secadas a 60°C en una estufa de laboratorio, para su posterior disgregación y tamizado con una malla de 2 mm para eliminar residuos gruesos y obtener una granulometría uniforme (Palma-López et al., 2020).

## **2.4 Caracterización textural**

Se utilizó el método del hidrómetro de Bouyoucos, midiendo la velocidad de sedimentación de partículas suspendidas determinando así las proporciones de arena, limo y arcilla en el suelo (Gabriels & Lobo, 2006).

## **2.5 Análisis mineralógico**

Se realizó mediante difracción de rayos X (DRX) en un difractómetro de polvo modelo Bruker D8 Advance con radiación  $\text{CuK}\alpha$ , operando a 40 kV y 30 mA. Se obtuvieron difractogramas en un intervalo de 5° a 70° 2 $\theta$ , con un paso de 0.02° y un tiempo de conteo de 1s por paso (González-Ruiz et al., 2015). La identificación de fases minerales se realizó utilizando la base de datos del International Centre for Diffraction Data (ICDD).

## **2.6 Nutrientes esenciales**


El análisis de calcio, magnesio, potasio y sodio permite evaluar la capacidad de intercambio catiónico (CIC) del suelo, indicador clave de fertilidad. La CIC se determinó utilizando el método de acetato de amonio a pH 7.0, con medición de cationes intercambiables mediante espectrometría de absorción atómica (Martínez-Rodríguez et al., 2021).

# **3. Resultados**

## **3.1 Perfiles edafológicos**

El análisis de los siguientes perfiles edafológicos de las zonas de estudio permitió conocer el desarrollo y propiedades edáficas de los horizontes como se presenta a continuación (Palma & Rincon-Ramirez, 2007).

**Tabla 1.** Descripción del perfil de Chacalapa, Jalpa de Méndez, Tabasco

<b>PERFIL (UTM 15 Q 488505.00, 2006871.00)</b>				
	<b>Lugar de muestreo</b>	Chacalapa Jalpa de Méndez, Tabasco		
	<b>Responsable</b>			
	<b>Fecha</b>		<b>Clima</b>	Cálido húmedo -
	<b>Profundidad</b>	H1 40 cm	H2 40 cm	H3 40cm
	<b>Longitud (cm)</b>	0 - 40	40 – 80	80 – 120
	<b>Humedad</b>	Baja	Media	Media
	<b>Matriz de suelo</b>	Arenoso franco	Arenoso franco	Arenoso franco
	<b>Color Munsell</b>	10 YR-4/1	10 YR – 5/1	10 YR – 6/8
	<b>Textura</b>	Franco-arenoso	Franco-arenoso	Franco-arenoso
	<b>Agregados</b>	Con presencia	Sin presencia	Sin presencia
	<b>Raíces</b>	Largas y abundantes	Medianas, delgadas (escasas)	Finas (escasas)
	<b>Biota</b>	Con presencia	Con escasa presencia	Con escasa presencia
	<b>Materia orgánica</b>	Raíces	Raíces	Raíces
	<b>Material antropogénico</b>	Sin presencia	Sin presencia	Sin presencia
	<b>Moteas</b>	Sin presencia	Sin presencia	Sin presencia
<b>Grietas</b>		Grandes y profundas	Anchas y delgadas	Horizontales
<b>%A</b>		83.88	10.68	5.44
<b>%R</b>		77.88	10.68	11.44
<b>%L</b>		59.88	14.68	25.44
<b>CIC (cmol/kg)</b>		0.370	0.502	0.454
<b>Observaciones</b>		En todo el perfil se encontraron raíces y grietas, en la zona de estudio se encontró a su alrededor árboles de tinto, pasto, aves, insectos y ganado vacuno.		

El perfil anterior Tabla 2. Perfil de Chacalapa, Jalpa de Méndez, Tabasco) se divide en tres horizontes de 40 cm, dando un total de 120 cm de profundidad. Todos los horizontes presentan una textura franco-arenosa lo que señala una capacidad moderada para retener agua y una adecuada ventilación. Aunque la humedad varía con la profundidad se observa un menor contenido de humedad en la capa superficial (H1, 0-40 cm) en contraste con los horizontes más profundos (H2 y H3), lo que indica un incremento en la evaporación en la zona superficial.


La escala de Munsell determina el color del terreno, que oscila entre 10 YR-4/1 en la superficie considerando una alta presencia de materia orgánica mezclada con arcilla, posible reducción temporal por saturación parcial de agua y poca aireación superficial por el alto contenido de arcillas expansivas, las

cuales causan fisuras en seco y sellado en húmedo. El horizonte más profundo presenta una coloración 10 YR-6/8 indicando una mayor oxidación de hierro por mejor drenaje interno, se tiene menor influencia de materia orgánica, la coloración brillante puede deberse al ascenso capilar y redistribución de sales o minerales de hierro durante los ciclos de contracción-hinchamiento. La abundancia de raíces en el horizonte superficial es notable, pero disminuye a medida que aumenta la profundidad, rasgo de un perfil con una mayor actividad biológica en las capas superiores. La biota sigue el mismo patrón, mostrando una mayor presencia en el horizonte superficial y disminuyendo en los niveles inferiores. El primer horizonte (H1) presenta en su estructura agregados en comparación a los horizontes más profundos. Por otro lado, las grietas se encuentran presente a lo largo del perfil variando en su morfología. La variación del CIC entre 0.370 y 0.502 cmol/kg sugiere una moderada disponibilidad de fertilidad en el suelo.

El ambiente del lugar de estudio se distingue por la existencia de árboles de tinto, pastizal, aves, insectos y ganado vacuno, indicando una interacción activa entre la fauna y el suelo. No se detectaron elementos antropogénicos ni movidos en el perfil, lo que señala que el terreno no ha sufrido modificaciones significativas debido a las acciones humanas.

Tomando en cuenta la información obtenida, el perfil del suelo analizado muestra rasgos propios de un suelo franco-arenoso con una capacidad moderada de retención de humedad y una actividad biológica concentrada en su superficie. El cambio de tonalidad, la existencia de raíces y biota, junto con la estructura del terreno, indican un entorno ecológico que promueve el crecimiento de la vegetación autóctona y la interacción con la fauna. Investigaciones adicionales podrían enfocarse en valorar la fertilidad del terreno y su posible aplicación en tareas agropecuarias o de preservación del medio ambiente.

**Tabla 3.** Descripción de perfil de Roberto Madrazo Pintado Huimanguillo, Tabasco.

PERFIL (UTM 15 Q 434925.00, 1976676.00)				
	<b>Lugar de muestreo</b>	Roberto Madrazo Pintado, Huimanguillo, Tabasco		
	<b>Responsable</b>			
	<b>Fecha</b>			<b>Clima</b> Cálido – húmedo
	<b>Profundidad</b>	H1 30 cm	H2 20 cm	H3 26 cm
	<b>Longitud (cm)</b>	0 – 30	30 – 50	30 – 56
	<b>Humedad</b>	Baja	Baja	Media
	<b>Matriz de suelo</b>	Limoso arenoso	Limoso arenoso	Limoso arenoso
	<b>Color Munsell</b>	7.5 YR 3/1	7.5 YR 6/8	7.5 YR 8/6
	<b>Textura</b>	Areno - limoso	Areno – limoso	Areno – limoso
	<b>Agregados</b>	Grava	Sin presencia	Con presencia con alto grado de compactación
	<b>Raíces</b>	Delgadas	Sin presencia	Sin presencia
	<b>Biota</b>	Sin presencia	Sin presencia	Sin presencia
	<b>Materia orgánica</b>	Con presencia	Sin presencia	Con presencia
	<b>Material antropogénico</b>	Con presencia	Con presencia	Sin presencia
	<b>Moteas</b>	Con presencia	Con presencia naranja	Con presencia naranja
	<b>Grietas</b>	Sin presencia	Sin presencia	Sin presencia
<b>Textura</b>	<b>%A</b>	78.46	3.96	17.58
	<b>%R</b>	67.88	0.11	32.02
	<b>%L</b>	63.18	0.37	36.46
<b>CIC (cmol/kg)</b>		25.0	25.0	25.0
<b>Observaciones</b>		En todo el perfil se observó un suelo pegajoso con una porosidad fina, a sus alrededores poca vegetación, ganado y pasto humedícola.		

El perfil anterior (**Tabla 2**) se divide en tres horizontes con una profundidad total de 56 cm de espesor, perfil el cual es de un clima cálido-húmedo.

La textura sugiere ser un suelo areno-limoso a lo largo del perfil lo que indica poca estabilidad en el suelo. La humedad se observa baja en los primeros dos horizontes y aumenta en el tercero, por lo cual se sugiere mayor retención de agua a profundidad.

Respecto a la escala de Munsell el primer horizonte es de color 7.5 YR 3/1, el segundo 7.5 YR 6/8 y el tercero 7.5 YR 8/6. El cambio de color respecto a la profundidad podría estar vinculada con la reducción de la materia orgánica y la existencia de moteados de color naranja en los horizontes profundos, que señalan procesos de oxidación o variaciones en la saturación del agua.

La estructura del suelo varía en cada horizonte, en el H1 existe presencia de grava, por otro lado, en el H3 se presenta un alto grado de compactación lo que limita la infiltración del agua. Por la ausencia de grietas se ve influenciada la permeabilidad del suelo.

Se encontró presencia de raíces delgadas en el H1, sin embargo, no hubo presencia de macroorganismos. Se hace énfasis en la presencia de material antropogénico en el horizonte uno y dos, lo que sugiere actividad humana. Estos factores junto con la compactación y baja porosidad afectan al suelo a retener la vegetación. El CIC es alto en todos los horizontes, lo que indica un suelo con alta capacidad para retener nutrientes, pero la baja porosidad y compactación limitan que estos nutrientes lleguen a las raíces de una forma más efectiva.

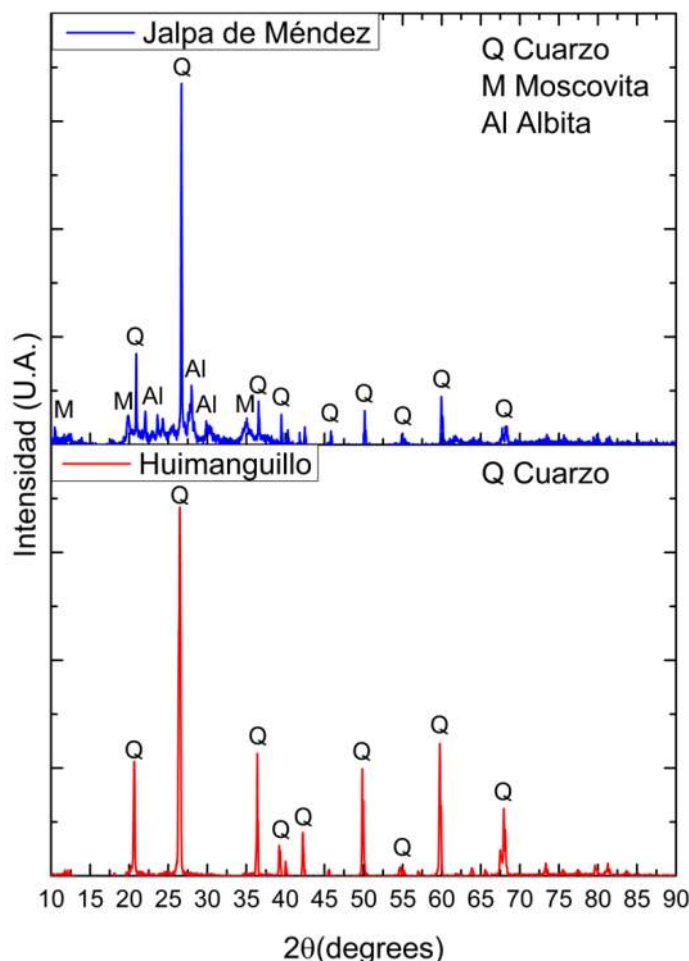
Tomando en cuenta los diferentes factores analizados del perfil del suelo de Huimanguillo, se tienen características que influyen en el uso del suelo y su capacidad para el crecimiento y desarrollo de la vegetación en él. Debido a la presencia de material antropogénico y moteas se tienen procesos de oxidación que afectan el suelo a un largo plazo. La compactación y porosidad podría mejorarse implementando técnicas garantizando un mejor uso del suelo.

### 3.2 Difracción de Rayos X

Los difractogramas obtenidos del análisis de DRX fueron comparados con la base de datos PDF-2 del ICDD para identificar las fases mineralógicas presentes en los suelos de estudio. Los resultados mostraron la presencia predominante de Cuarzo (PDF 01-070-7344), Moscovita (PDF 04-012-1956), Albita (PDF 01-072-8434):

Como se observa en la **figura 1**; se considera que la presencia de una mayor variedad de minerales en el suelo de Jalpa de Méndez es debido a un mejor manejo del suelo, lo que refleja la variedad de minerales que se encuentra en este.

Por el contrario, en el suelo de Huimanguillo la presencia predominante de la señal de cuarzo y una mínima variedad de otras señales da a entender que este suelo se ha visto afectado por la actividad antropogénica considerablemente al punto de no encontrar señales de otros minerales debido a que estos han sido afectados, por lo que se tendrá que realizar una remediación de este suelo



**Figura 1.** Difractograma de los suelos muestreados

Cartas cristalográficas: Cuarzo (Q) PDF 01-070-7344, Moscovita (M) PDF 04-012-1956, Albite (Al) PDF 01-072-8434.

#### 4. Conclusiones

Este estudio confirma que los suelos de Tabasco presentan diferencias mineralógicas y edafológicas. Los suelos de Huimanguillo tienen menor retención de nutrientes debido a su composición y estructura, estos son ácidos con bajos niveles de fertilidad nativa con un lento drenaje interno, además siendo afectado por actividades agrícolas, correspondiendo con lo mencionado por (Palma-López, 2007). Mientras que los suelos de Jalpa de Méndez muestran una mayor diversidad mineralógica, pero con menor capacidad de retención de nutrientes, problemas de anegamiento y falta de aireación (Palma-López, 2007). Estos hallazgos son relevantes para la gestión del uso del suelo en la región y pueden contribuir a estrategias de conservación y rehabilitación.

Además, se resalta la importancia de continuar con estudios geoespaciales para identificar patrones de distribución mineralógica y evaluar su impacto en la productividad agrícola y forestal. La incorporación de técnicas avanzadas como la espectroscopía y análisis isotópico complementaría los resultados obtenidos en este estudio, proporcionando una visión más amplia sobre la evolución del suelo en Tabasco. La adopción de estrategias de remediación basadas en estudios mineralógicos permitirá una gestión sostenible del suelo, contribuyendo a la seguridad alimentaria y la protección del medio ambiente.

## 5. Agradecimientos

Los autores agradecen a la División Académica de Ciencias Básicas por el apoyo brindado en la realización de este trabajo de investigación, así mismo se agradece a la academia de química, a su cuerpo académico, a la red multidisciplinaria en materia ambiental, desde la perspectiva de la química aplicada y sus recursos con los cuales fue posible realizar este trabajo.

## 6. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

## 7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

## 8. Resumen Gráfico





Figura 1. Resumen gráfico

## 10. Referencias

- [1] Alberto, J., & Abril, C. (2018). El Impacto Medioambiental De La Fertilización Orgánica Sobre Los Cultivos. Importancia En La Formación De Profesionales De La Agronomía The Environmental Impact Of Organic Fertilization On Crops. Importance In The Training Of Professionals Of Agronomy.
- [2] Cejudo, E., & Herrera-Caamal, K. G. (2019). Humedales en dolina del norte de Quintana Roo, México: ecosistemas poco conocidos. Ecosistemas y Recursos Agropecuarios, 6(17), 207–218. <https://doi.org/10.19136/era.a6n17.1827>
- [3] David J. Palma-López, José Cisneros Domínguez, & Elvia Moreno Cáliz. (2007). Suelos de Tabasco: su uso y manejo sustentable. (I. y F. Colegio de Postgraduados, Ed.; Vol. 1).
- [4] Espejel-García, A., Romero-Domínguez, J., Isabel Barrera-Rodríguez, A., Torres-Espejel Jesús Félix-Crescencio Ra Ximhai, B., & Ximhai, R. (2015). Ra Ximhai Universidad Autónoma Indígena de México. 11, 77–95.
- [5] Gabriels, D., & Lobo, D. (2006). Métodos para determinar granulometría y densidad aparente del suelo Methods for determining granulometry and bulk density of the soil.
- [6] González-Ruiz, L. E., González-Partida, E., Martínez, L., Pironon, J., Camprubí, A., & Vega-González, M. (2015). Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana. Boletín de La Sociedad Geológica Mexicana,

- 67(3), 517–531. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1405-33222015000300014&lng=es&nrm=iso&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-33222015000300014&lng=es&nrm=iso&tlng=es)
- [7] J, P.-L. D., Ramírez, J. R., Reyes, G. F., & Y, P.-C. D. (2017). UPDATING THE CLASSIFICATION OF SOILS IN TABASCO, MÉXICO (Vol. 10).
- [8] Martínez-Rodríguez, Ó. G., Can-Chulim, Á., Ortega-Escobar, H. M., Bojórquez-Serrano, J. I., Cruz-Crespo, E., García-Paredes, J. D., & Madueño-Molina, A. (2021). Fertilidad e índice de calidad del suelo de la cuenca del río San Pedro en Nayarit. *REVISTA TERRA LATINOAMERICANA*, 39. <https://doi.org/10.28940/terra.v39i0.766>
- [9] Morales-Bautista, C. M., García, C. E. L., Méndez-Olán, C., & Chávez, M. de J. A. (2016). Evaluación del tratamiento del intercambio catiónico en dos suelos aluviales contaminados con aguas congénitas. *Interciencia*, 41(10), 696–702.
- [10] Palma, D. J., & Rincon-Ramirez, J. (2007). Suelos de Tabasco: Su Uso y Manejo Sustentable. <https://www.researchgate.net/publication/293958380>
- [11] Palma-López, D. J. , C. D. J. , M. C. E. , & R.-R. J. A. (2007). Suelos de Tabasco: su uso y manejo sustentable. (I. y F. Colegio de Postgraduados, Ed.; Primera, Vol. 1).
- [12] Pérez-López, E. (2013). Análisis de fertilidad de suelos en el laboratorio de Química del Recinto de Grecia, Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica. *InterSedes*, 14(29), 6–18.
- [13] Quintero Ramirez, A., Valencia González, Y., & Lara Valencia, L. A. (2017). Efecto de los lixiviados de residuos sólidos en un suelo tropical. *DYNA*, 84(203), 283–290. <https://doi.org/10.15446/dyna.v84n203.63875>
- [14] Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales. (2000). NOM-021-SEMARNAT-2000: Que establece las especificaciones de fertilidad, salinidad y clasificación de suelos, estudio, muestreo y análisis. <https://www.ordenjuridico.gob.mx/Documentos/Federal/wo69255.pdf>

## **Propiedades Fotocatalíticas del ZnO Sintetizado por Combustión en Estado Sólido: Análisis Estructural y Degradación de 4-Nitrofenol**

**Alejandro-López, A.<sup>1</sup>, Serrano de la Rosa, L.<sup>2</sup>, Castillejos-Mosqueda, S.<sup>3</sup>, Cerna-Cortez, J.<sup>4</sup>,  
Silahua-Pavón, A.<sup>1</sup> , Cervantes-Urbe, A.<sup>1\*</sup> , Martínez-Gómez, C.<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Centro de Investigación de Ciencia y Tecnología Aplicada de Tabasco (CICTAT), DACB, Km.1 carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, C.P. 86690, A.P. 24, Cunduacán (Tabasco), México.

<sup>2</sup>Laboratorio Central IFUAP, Av. San Claudio y Blvd. 18 sur, Ed. EMA 1, Ciudad Universitaria, Col. San Manuel, C.P. 72570 Puebla, Puebla.

<sup>3</sup>Centro Avanzado de Pruebas Analíticas no destructivas, Edificio FCQ-12, Valsequillo s/n Col. San Manuel, C.P. 72570, Puebla, Puebla.

<sup>4</sup>Facultada de Ciencias Químicas BUAP, Av. Universidad, Edif. 1-FCQ9, Ciudad Universitaria, Col. San Manuel, C.P. 72570 Puebla, Puebla.

<sup>5</sup>Departamento de Química, División de Ciencias Naturales y Exactas, Campus Guanajuato de la Universidad de Guanajuato, Noria Alta s/n, Col. Noria Alta, Gto, Guanajuato, C. P. 36050.

\*[adrian.cervantes@ujat.mx](mailto:adrian.cervantes@ujat.mx)

---

### **Resumen**

Este estudio presenta la síntesis y caracterización del óxido de zinc (ZnO) mediante combustión en estado sólido, y su aplicación en la fotodegradación del 4-nitrofenol (4-NP). El ZnO obtenido mostró una estructura cristalina hexagonal tipo wurtzita. La espectroscopía UV-Vis reveló un band gap de 3.31 eV y un área superficial específica de 0.63 m<sup>2</sup>/g. Este óxido de zinc presentó actividad fotocatalítica en la degradación de 4-Nitrofenol (4-NP). Estos resultados demuestran que la combustión en estado sólido es un método eficaz para producir ZnO con propiedades óptimas para aplicaciones ambientales, sin necesidad de agentes químicos adicionales.

**Palabras claves:** ZnO, Fotocatálisis, 4-Nitrofenol, Combustión en estado sólido.

### **Abstract**

This study presents the synthesis and characterization of zinc oxide (ZnO) through solid-state combustion and its application in the photodegradation of 4-nitrophenol (4-NP). The obtained ZnO exhibited a hexagonal wurtzite crystal structure. UV-Vis spectroscopy revealed a band gap of 3.31 eV and a specific surface area of 0.63 m<sup>2</sup>/g. This zinc oxide demonstrated photocatalytic activity in the degradation of 4-nitrophenol (4-NP). These results show that solid-state combustion is an effective method for producing ZnO with optimal properties for environmental applications, without the need for additional chemical agents.

**Keywords:** ZnO, Photocatalysis, 4-Nitrophenol, Solid-estate combustion

---

Recibido: 19 de agosto de 2024, Aceptado: 04 de agosto de 2025, Publicado: 12 de diciembre de 2025

## 1. Introducción

El óxido de zinc (ZnO) es un material semiconductor de gran interés debido a sus propiedades únicas, como su amplia banda prohibida ( $\sim 3.37$  eV), y sus diversas aplicaciones en campos como la fotocatalisis, sensores [1], [2], dispositivos optoelectrónicos y materiales antimicrobianos [3], [4]. La morfología y las propiedades estructurales del ZnO juegan un papel crucial en su rendimiento en aplicaciones específicas, por lo que la síntesis controlada de ZnO con características morfológicas deseadas ha sido objeto de numerosos estudios científicos [5]. Diversos métodos de síntesis, tales como la precipitación química, sol-gel, hidrotermal y deposición por vapor químico, han sido empleados para producir ZnO con variadas morfologías, como nanorods, nanoflowers, nanospheres y nanosheets [6], [7], [8]. Estas morfologías pueden influir significativamente en las propiedades ópticas, electrónicas y catalíticas del ZnO. La síntesis de ZnO con morfologías específicas, como nanorods y nanoplates, puede optimizar sus propiedades catalíticas. Las estructuras jerárquicas tridimensionales del ZnO han mostrado un rendimiento mejorado en la producción de hidrógeno debido a la mayor área superficial y la mejor separación de cargas [9]. El óxido de zinc (ZnO) ofrece ventajas significativas sobre el óxido de titanio ( $\text{TiO}_2$ ) en aplicaciones fotocatalíticas debido a su mayor movilidad electrónica y menor tasa de recombinación de pares electrón-hueco. El ZnO presenta una mayor eficiencia en la absorción de luz UV y una mejor capacidad de separación de cargas, lo que mejora la eficiencia fotocatalítica [10], [6]. Además, la facilidad de dopaje y la capacidad de formar diversas morfologías nanoscópicas hacen que ZnO sea más versátil y eficiente en la degradación de contaminantes y la producción de hidrógeno [11]. Las estructuras jerárquicas del ZnO, como nanoflowers y nanorods, han demostrado ser altamente efectivas en la fotodegradación de contaminantes, incluyendo tintes y compuestos orgánicos volátiles. Estas morfologías ofrecen una mayor área superficial y una mejor dispersión de la luz, mejorando la actividad fotocatalítica [12]. Estudios han demostrado que los nanorods y nanosheets son efectivos en la degradación del 4-nitrofenol, un contaminante orgánico común. Estas estructuras permiten una mejor interacción con el contaminante y una mayor generación de especies reactivas de oxígeno [13]. La síntesis del ZnO con estructuras jerárquicas ha mostrado una eficiencia mejorada en la fotodegradación de 4-nitrofenol, atribuido a la alta área superficial y la óptima exposición de los sitios catalíticos [14]. En este estudio, presentamos un análisis de la morfología y de las propiedades fisicoquímicas del ZnO obtenido mediante nuestro método de síntesis, “Combustión en estado sólido”, y evaluamos la actividad catalítica en la fotodegradación del 4-Nitrofenol.

## 2. Metodología Experimental

### 2.1 Síntesis del óxido de zinc

Se utilizó el reactivo nitrato de zinc, el cual se disolvió en 100 mL de agua la cantidad necesaria para obtener 1 gramo de óxido de zinc. Se mantuvo en agitación por 12 horas. Posteriormente se recristalizó en nitrato de zinc extrayendo el disolvente por evaporación lenta a  $60^\circ\text{C}$  por 24 h. El producto obtenido fue calcinado con una rampa de  $2^\circ\text{C}/\text{min}$  hasta alcanzar los  $500^\circ\text{C}$  y se mantuvo a esa temperatura por 4 h. Esta metodología de síntesis se le ha denominado combustión en estado sólido.

### 2.2 Difracción de rayos X

El análisis de difracción de rayos X se utilizó para determinar la composición de las fases del polvo. La difracción de rayos X (XRD) se realizó utilizando un difractómetro Bruker D2 PHASER con una fuente de

radiación Co K $\alpha$  ( $\lambda = 0,179$  nm) durante un tiempo de análisis de 660 segundos. El análisis se llevó a cabo en el rango de 20° a 80°. La base de datos JADE 6 se utilizó para completar la identificación de las fases.

### 2.3 Espectroscopía de Reflectancia Difusa UV-Vis (DRS UV-Vis)

El espectro de reflectancia difusa UV-Vis se realizó en un espectrofotómetro Varian Cary 300, en el rango de 800 a 200 nm, equipado con una esfera integradora. Se utilizó BaSO<sub>4</sub> con una reflectividad del 100% como referencia. La energía de band gap ( $E_g$ ) de la muestra se estimó a partir de los espectros de absorción UV teniendo en cuenta la Ecuación 1.

$$\alpha(E) \propto (E - E_g)^{m/2} \quad \text{Ec. 1}$$

Donde  $\alpha(E)$  es el coeficiente de absorción para un fotón de energía  $E$ , y  $m=4$  para una transición indirecta entre bandas.

### 2.4 Adsorción-Desorción de Nitrógeno

La determinación del área específica, diámetro y volumen de poro de los catalizadores se llevó a cabo mediante la técnica de fisisorción de N<sub>2</sub>. Se realizó en un equipo de medición de área superficial, MICROMERITICS TRISTAR 3020 II a 77 K (-196 °C). Para eliminar impurezas, se pesó una muestra de 0.1 g y se degasificó durante 3 horas a 300 °C. Los datos se analizaron utilizando el método BET (Brunauer, Emmet y Teller) y la distribución de poros se determinó mediante DFT.

### 2.5 Prueba fotocatalítica

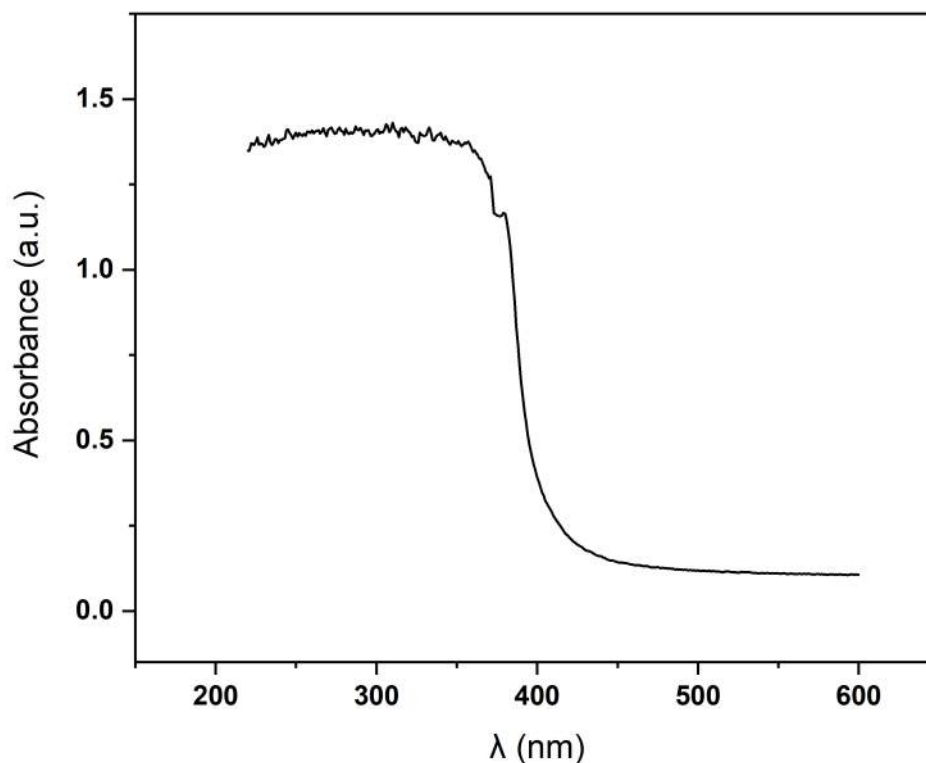
Las pruebas de degradación fotocatalítica se llevaron a cabo en un reactor fotoquímico provisto de irradiación de luz UV ( $\lambda = 365$  nm) utilizando una lámpara de mercurio (25 W). El fotocatalizador (0.1 g/L) se dispersó en 200 mL de una solución acuosa de 4-nitrofenol (4-NP) (15 ppm) a pH natural. Como fuente de oxígeno, se proporcionó un flujo de aire (3.2 L/min) para obtener 8.4 mg/L de oxígeno disuelto. Antes de encender la lámpara, la suspensión se agitó continuamente a 700 rpm durante 60 minutos en la oscuridad para asegurar el establecimiento de un equilibrio de adsorción-desorción entre el fotocatalizador y el contaminante. El sistema se mantuvo con agua circulante a temperatura ambiente y confinado en una caja oscura con protección contra luz UV. Aproximadamente 3 mL de la suspensión fueron muestreados y filtrados (nylon, 0.45  $\mu$ m) para determinar la concentración residual de 4-NP mediante un espectrofotómetro UV-Vis (Varian, Cary 300). A partir de los resultados obtenidos, se calculó el porcentaje de degradación. Para determinar los porcentajes de degradación se utilizó la Ecuación 2.

$$x(\%) = \frac{[4NP^0] - [4NP]}{[4NP^0]} \quad \text{Ec. 2}$$

Donde  $[4NP^0]$  (ppm) es la concentración cuando se enciende la luz para iniciar el proceso de fotodegradación y  $[A]$  (ppm) es la concentración después de 6 horas de irradiación.

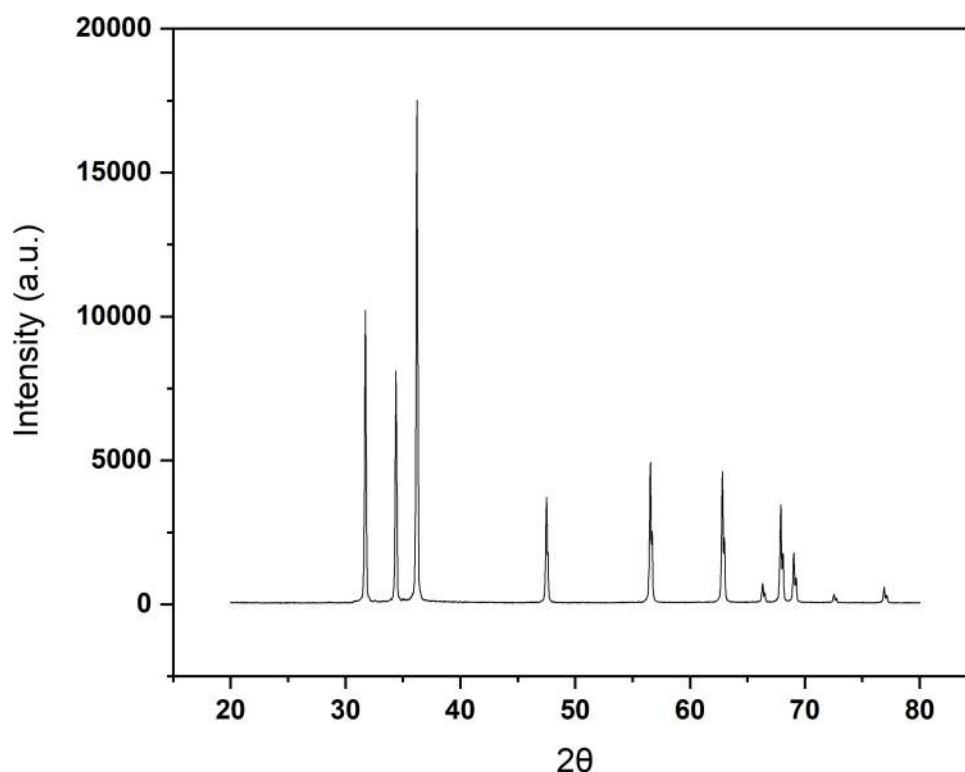
### 3. Resultados y Discusión

El espectro UV-Vis del óxido de zinc (ZnO) sintetizado muestra una absorción en el rango de 300-400 nm, con un borde de absorción alrededor de 375 nm, véase Figura 1. Este comportamiento es típico del ZnO y corresponde a su transición de banda prohibida (band gap). Se calculó la energía del band gap y el valor es aproximadamente 3.31 eV. La fuerte absorción en el rango UV indica que el material sintetizado tiene una estructura adecuada y está libre de contaminantes que puedan alterar sus propiedades ópticas. Esto es confirmado en literatura por los valores similares de band gap para ZnO puro, alrededor de 3.26 eV y 3.3 eV, utilizando espectroscopía UV-Vis [15]. Estos resultados sugieren que el método de combustión en estado sólido es eficaz para la síntesis del ZnO, produciendo materiales de alta pureza con propiedades ópticas coherentes con las reportadas en la literatura científica [16].



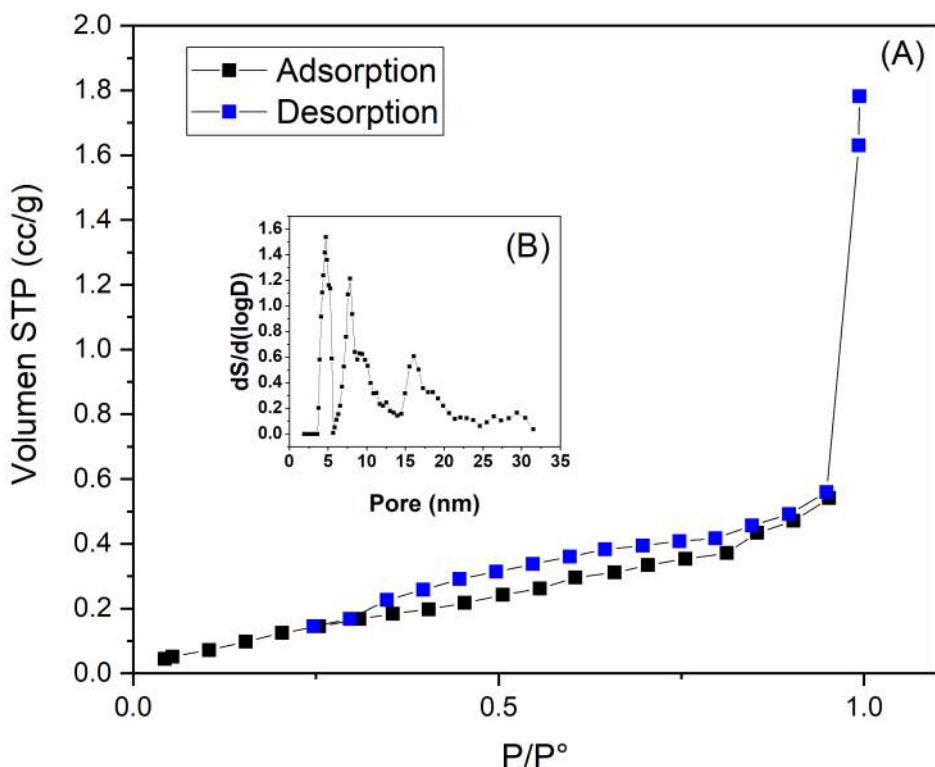
**Figura 1.** Espectro de absorción del óxido de zinc.

El patrón de difracción de rayos X (XRD) de la muestra de ZnO muestra varias señales en  $2\theta \approx 31.8^\circ$ ,  $34.4^\circ$ ,  $36.2^\circ$ ,  $47.5^\circ$ ,  $56.6^\circ$ ,  $62.8^\circ$ ,  $66.3^\circ$ ,  $67.9^\circ$  y  $69.1^\circ$ , véase Figura 2. Estos picos corresponden a los planos cristalinos (100), (002), (101), (102), (110), (103), (200), (112) y (201) del ZnO con estructura wurtzita, respectivamente; véase Figura 2. La presencia de estas señales confirma que la muestra de ZnO tiene una estructura cristalina hexagonal tipo wurtzita. Este resultado es consistente con los datos de la carta de referencia JCPDS No. 01-079-0205 para ZnO.



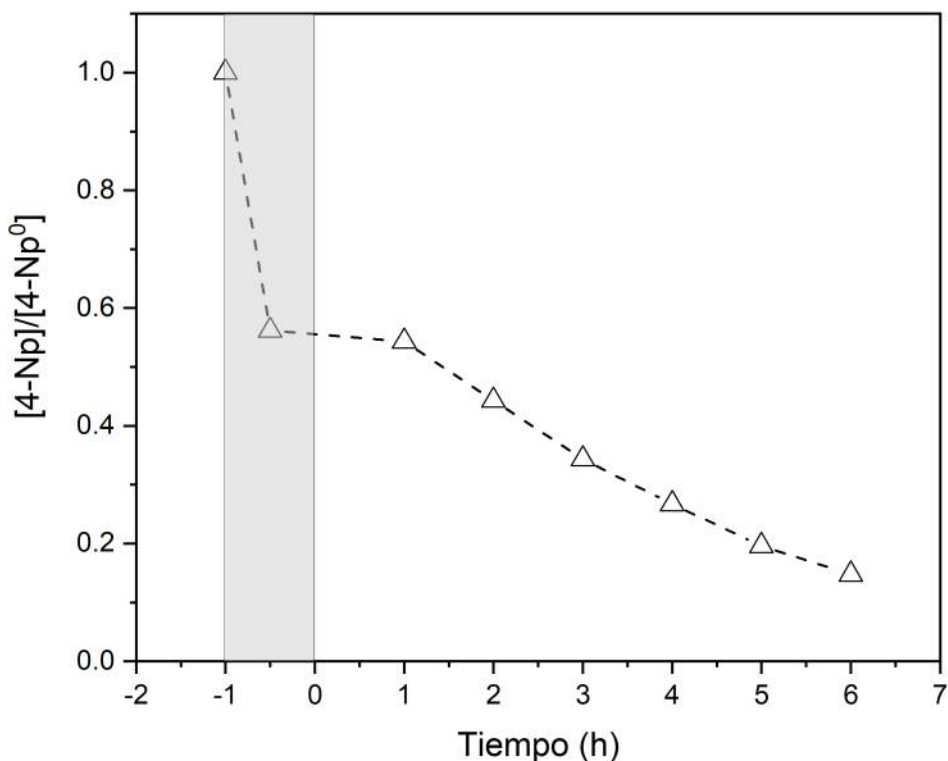
**Figura 2.** Difracción de rayos x del Oxido de Zinc.

La isoterma de adsorción-desorción de nitrógeno proporciona información sobre las propiedades texturales del material, como el área superficial específica, el volumen de poros y la distribución de tamaño de poros. Los resultados de adsorción-desorción isotérmica de la muestra de ZnO muestra en la Figura 3. La isoterma del ZnO se asemeja a una isoterma tipo IV según la clasificación de la IUPAC. Este tipo de isoterma es característico de materiales mesoporosos, que presentan poros con tamaños en el rango de 2 a 50 nm [17]. La adsorción se incrementa a medida que la presión relativa se aproxima a 1, presentando un incremento abrupto el cual es asociado a la condensación capilar en mesoporos. En relación con el bucle de histéresis parece similar al tipo H2, que está asociado con materiales que tienen poros de botella de tinta o sistemas de poros desordenados. Esta histéresis se caracteriza por una rama de desorción más inclinada que la de adsorción. La distribución de tamaños de poro obtenida mediante DFT confirma que el material tiene una estructura porosa compleja, con una combinación de mesoporos pequeños (2-5 nm) y medianos a grandes (10-15 nm). Esto es consistente con la isoterma de adsorción-desorción que mostró un bucle de histéresis H2. La muestra de ZnO presenta un área superficial específica de 0.63 m<sup>2</sup>/g. Aunque este valor es bajo, sigue siendo suficiente para proporcionar una superficie activa.



**Figura 3.** Proceso de adsorción-desorción de nitrógeno (A) y distribución de tamaño de poro (B).

La Figura 4 presenta la degradación del 4-nitrofenol (4-NP) normalizada en función del tiempo. La zona en gris representa la etapa de equilibrio en oscuridad. Durante la etapa de equilibrio, la concentración de 4-NP disminuye ligeramente antes de la irradiación UV. Este fenómeno se debe a la adsorción del 4-NP en la superficie del ZnO. La adsorción previa del 4-NP en la oscuridad asegura que una fracción significativa del contaminante esté disponible en la superficie del ZnO cuando comience la irradiación UV. Una vez iniciada la irradiación UV, se observa una disminución significativa y continua de la concentración de 4-NP. El ZnO genera pares electrón-hueco. Estos electrones y huecos pueden reaccionar con las moléculas de agua y oxígeno adsorbidas en la superficie del ZnO, generando especies reactivas de oxígeno (ERO) como radicales hidroxilos [18]. La alta cristalinidad del ZnO, proporciona sitios activos que mejoran la eficiencia fotocatalítica. Estos defectos actúan como centros de captura para los electrones y huecos, reduciendo la recombinación y aumentando la generación de ERO [19].



**Figura 4.** Concentración normalizada del 4-Nitrofenol en función del tiempo.

#### 4. Conclusiones

El método de Combustión en Estado Sólido para la síntesis de ZnO ha demostrado ser una técnica efectiva para producir materiales con propiedades ópticas, estructurales y catalíticas deseables. Las caracterizaciones realizadas confirman que el ZnO sintetizado presenta una alta cristalinidad, defectos estructurales controlados, una adecuada área superficial específica y una notable eficiencia fotocatalítica en la degradación del 4-NP. Estos resultados sugieren que este método de síntesis es una alternativa factible y eficiente para la producción de fotocatalizadores basados en ZnO, libres de agentes químicos que puedan interferir o influenciar las propiedades del material.

#### 5. Agradecimientos

Agradecimientos especiales al CONAHCYT por el apoyo brindado a Alma Rosa Alejandro López, CVU 1232701.

#### 6. Conflicto de intereses

Los autores declaran que no tienen ningún interés financiero competitivo conocido, ni relaciones personales que pudieran haber parecido influir en el trabajo presentado en este artículo.

## 7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial



Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

## 8. Referencias

- [1] R. Hong, T. Pan, J. Qian, y H. Li, «Synthesis and surface modification of ZnO nanoparticles», *Chemical Engineering Journal*, vol. 119, n.o 2-3, pp. 71-81, jun. 2006, doi: 10.1016/j.cej.2006.03.003.
- [2] M. J. Zheng, L. D. Zhang, G. H. Li, y W. Z. Shen, «Fabrication And Optical Properties Of Large-Scale Uniform Zinc Oxide Nanowire Arrays By One-Step Electrochemical Deposition Technique», *Chemical Physics Letters*, vol. 363, n.o 1-2, pp. 123-128, sep. 2002, doi: 10.1016/S0009-2614(02)01106-5.
- [3] V. Consonni, «ZnO Nanowires: Growth, Properties, and Energy Applications», *Nanomaterials*, vol. 13, n.o 18, p. 2519, sep. 2023, doi: 10.3390/nano13182519.
- [4] M. Laurenti y V. Cauda, «ZnO Nanostructures for Tissue Engineering Applications», *Nanomaterials*, vol. 7, n.o 11, p. 374, nov. 2017, doi: 10.3390/nano7110374.
- [5] M. A. Borysiewicz, «ZnO as a Functional Material, a Review», *Crystals*, vol. 9, n.o 10, p. 505, sep. 2019, doi: 10.3390/cryst9100505.
- [6] Y. Sun et al., «The Applications of Morphology Controlled ZnO in Catalysis», *Catalysts*, vol. 6, n.o 12, p. 188, nov. 2016, doi: 10.3390/catal6120188.
- [7] X. Wang, M. Ahmad, y H. Sun, «Three-Dimensional ZnO Hierarchical Nanostructures: Solution Phase Synthesis and Applications», *Materials*, vol. 10, n.o 11, p. 1304, nov. 2017, doi: 10.3390/ma10111304.
- [8] Z. L. Wang, «Zinc Oxide Nanostructures: Growth, Properties And Applications», *J. Phys.: Condens. Matter*, vol. 16, n.o 25, pp. R829-R858, jun. 2004, doi: 10.1088/0953-8984/16/25/R01.
- [9] A. Ejsmont y J. Goscińska, «Hydrothermal Synthesis of ZnO Superstructures with Controlled Morphology via Temperature and pH Optimization», *Materials*, vol. 16, n.o 4, p. 1641, feb. 2023, doi: 10.3390/ma16041641.
- [10] C. Gao et al., «Brief Review of Photocatalysis and Photoresponse Properties of ZnO–Graphene Nanocomposites», *Energies*, vol. 14, n.o 19, p. 6403, oct. 2021, doi: 10.3390/en14196403.
- [11] V. Vaiano, O. Sacco, y M. Matarangolo, «Photocatalytic Degradation Of Paracetamol Under UV Irradiation Using TiO<sub>2</sub>-Graphite Composites», *Catalysis Today*, vol. 315, pp. 230-236, oct. 2018, doi: 10.1016/j.cattod.2018.02.002.
- [12] D. Bakranova y D. Nagel, «ZnO for Photoelectrochemical Hydrogen Generation», *Clean Technol.*, vol. 5, n.o 4, pp. 1248-1268, oct. 2023, doi: 10.3390/cleantechnol5040063.
- [13] X. Su et al., «Influence of Wurtzite ZnO Morphology on Piezophototronic Effect in Photocatalysis», *Catalysts*, vol. 12, n.o 9, p. 946, ago. 2022, doi: 10.3390/catal12090946.
- [14] S. Luo, R. Chen, L. Xiang, y J. Wang, «Hydrothermal Synthesis of (001) Facet Highly Exposed ZnO Plates: A New Insight into the Effect of Citrate», *Crystals*, vol. 9, n.o 11, p. 552, oct. 2019, doi: 10.3390/cryst9110552.
- [15] A. K. Zak, M. E. Abrishami, W. H. Abd. Majid, R. Yousefi, y S. M. Hosseini, «Effects Of Annealing Temperature On Some Structural And Optical Properties Of Zno Nanoparticles Prepared By A Modified Sol–Gel Combustion Method», *Ceramics International*, vol. 37, n.o 1, pp. 393-398, ene. 2011, doi: 10.1016/j.ceramint.2010.08.017.

- [16] S. Indrawirawan, H. Sun, X. Duan, y S. Wang, «Low Temperature Combustion Synthesis Of Nitrogen-Doped Graphene For Metal-Free Catalytic Oxidation», *J. Mater. Chem. A*, vol. 3, n.o 7, pp. 3432-3440, 2015, doi: 10.1039/C4TA05940A.
- [17] M. Thommes et al., «Physisorption Of Gases, With Special Reference To The Evaluation Of Surface Area And Pore Size Distribution (IUPAC Technical Report)», *Pure and Applied Chemistry*, vol. 87, n.o 9-10, pp. 1051-1069, oct. 2015, doi: 10.1515/pac-2014-1117.
- [18] A. Stanković, Lj. Veselinović, S. D. Škapin, S. Marković, y D. Uskoković, «Controlled Mechanochemically Assisted Synthesis Of ZnO Nanopowders In The Presence Of Oxalic Acid», *J Mater Sci*, vol. 46, n.o 11, pp. 3716-3724, jun. 2011, doi: 10.1007/s10853-011-5273-6.
- [19] K. S. W. Sing et al., «Reporting Physisorption Data for Gas/Solid Systems», en *Handbook of Heterogeneous Catalysis*, 1.a ed., G. Ertl, H. Knözinger, F. Schüth, y J. Weitkamp, Eds., Wiley, 2008, pp. 1217-1230. doi: 10.1002/9783527610044.hetcat0065.

# Propiedades elementales del kernel de calor de Dirichlet para procesos de Markov simétricos y sus aplicaciones

Ceballos-Lira, Marcos Josías<sup>1,\*</sup> , Pérez, Aroldo<sup>1</sup> ,

<sup>1</sup>División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

\*marjocel.81@hotmail.com

---

## Resumen

En este artículo de difusión se demuestran algunas propiedades básicas del kernel de calor de Dirichlet. En teoría de probabilidad este objeto matemático es la densidad de transición de un proceso de Markov matado. En este trabajo se consideran procesos fuertes de Markov simétricos que podrían ser discontinuos. Entre las propiedades elementales probadas se encuentran: la continuidad, la simetría y la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Se presenta también una aplicación importante a la teoría de ecuaciones semilineales de tipo reacción-difusión no autónomas con condiciones de frontera de Dirichlet. La difusión en este caso es el generador del proceso de Markov asociado, el cual se conoce que podría ser un operador integro-diferencial no local.

**Palabras claves:** *Kernel de calor de Dirichlet, Proceso de Markov fuerte simétrico, densidad de transición de Dirichlet, tiempo de salida, proceso matado, solución mild, explosión.*

## Abstract

In this diffusion article some basic properties of the Dirichlet heat kernel are demonstrated. In probability theory this mathematical object is the transition density of a killed Markov process. In this work, symmetric strong Markov processes that could be discontinuous are considered. Among the basic properties demonstrated are: continuity, symmetry, and the Chapman-Kolmogorov equation. An important application to the theory of non-autonomous semilinear reaction-diffusion equations with Dirichlet boundary conditions is also presented. Diffusion in this case is the generator of the associated Markov process, which is known to be a non-local integro-differential operator.

**Keywords:** *Dirichlet heat kernel, symmetric strong Markov process, Dirichlet transition density, exit time, killed process, mild solution, blow up.*

---

Recibido: 27 de marzo de 2025. Aceptado: 6 de noviembre de 2025. Publicado: 12 de diciembre de 2025.

## 1. Introducción

En la actualidad, debido a su importancia tanto en la teoría como en las aplicaciones, hay un gran interés en el estudio de procesos de Markov simétricos. El proceso estocástico asociado al operador laplaciano, por ejemplo, es un proceso de Markov simétrico llamado movimiento browniano y ha sido usado en diferentes áreas del conocimiento científico (e.g. la física, biología, ingeniería, mecánica cuántica, finanzas, etc.). El movimiento browniano tiene trayectorias continuas de rápido crecimiento sin derivada en ningún punto y ha permitido modelar sistemas con un gran número de perturbaciones aleatorias. La distribución del desplazamiento de cada partícula involucrada en

esta difusión es gaussiana; luego es posible calcular el desplazamiento promedio, así como también que tanto se dispersa éste del valor real, es decir, su varianza.

Ahora bien, cuando la distribución del desplazamiento de cada partícula tiene un decaimiento asintóticamente lento, tipo polinomial, a este prototipo de difusión se le conoce en la literatura como difusión anómala y es de especial interés en mecánica estadística. En este movimiento anormal no es posible, en algunos casos, calcular el desplazamiento promedio de las partículas y cuando lo es, desafortunadamente no es posible determinar su varianza. Ejemplos que exhiben difusión anómala son: el movimiento de partículas en flujos turbulentos, el transporte de carga en sólidos anómalos, las micelas disueltas, los vidrios porosos, el enfriamiento por láser con retroceso secundario y la dinámica caótica. Es bien sabido que la difusión anómala puede ser adecuadamente descrita mediante las trayectorias discontinuas del proceso de Lévy simétrico  $\alpha$ -estable y su generador  $\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ ,  $\alpha \in (0, 2)$  (laplaciano fraccionario). El lector interesado en como se hace esto y en otras áreas de aplicación, puede consultar [1, 7, 27] y las referencias allí dadas.

También en matemáticas financieras se ha observado que, aunque los procesos  $\alpha$ -estables proporcionan mejores representaciones de datos financieros que los procesos gaussianos, los datos financieros tienden a volverse más gaussianos en una escala de tiempo más larga. Los llamados procesos  $\alpha$ -estables relativistas tienen esta propiedad requerida: se comportan como procesos  $\alpha$ -estables en pequeña escala y se comportan como el movimiento browniano a gran escala. Otros procesos que tienen este tipo de propiedad se pueden obtener “atenuando” o “truncando” los procesos  $\alpha$ -estables, es decir, multiplicando las densidades de Lévy de los procesos  $\alpha$ -estables con factores decrecientes estrictamente positivos y completamente monótonos. Este procedimiento genera una clase importante de procesos, llamados procesos de Lévy simétricos  $\alpha$ -estables truncados, que surgen de manera natural en aplicaciones donde solo se permiten saltos hasta un tamaño prefijado (ver [20] y las referencias allí dadas).

Si se conoce de manera expresa la densidad de transición  $p(t, x, y)$  de un proceso de Markov  $X$ , entonces es evidente que el estudio de sus trayectorias es menos complicado y en consecuencia el análisis del fenómeno asociado. Sin embargo, excepto en algunos casos especiales, obtener una expresión explícita de  $p(t, x, y)$  (en caso de que exista) suele ser imposible. En el campo de ecuaciones diferenciales parciales, a la densidad de transición  $p(t, x, y)$  se le conoce como kernel de calor. Si  $\mathcal{L}$  denota el generador del proceso de Markov  $X$ , se dice entonces que  $p(t, x, y)$  es la solución fundamental de la ecuación del calor  $\partial_t u = \mathcal{L}u$ . Por lo tanto, conocer propiedades y estimaciones precisas de  $p(t, x, y)$  es una cuestión fundamental tanto en la teoría de la probabilidad como en ecuaciones diferenciales parciales. Estos tipos de estudios se han realizado desde hace más de un siglo para procesos de difusión, aunque para procesos discontinuos apenas se logró comenzar en este siglo (ver [3] y referencias dadas allí). No obstante, estudiar las propiedades y estimaciones del kernel de calor de Dirichlet  $p_D(t, x, y)$ , el cual es la solución fundamental del problema  $\partial_t u = \mathcal{L}u$ ,  $u|_{D^c} = 0$ ,  $D$  dominio en  $\mathbb{R}^d$ , es todavía más complicado. En teoría de probabilidad, el kernel de calor de Dirichlet  $p_D(t, x, y)$  es la densidad de transición asociada al proceso matado  $X_D$ . Una de las razones por la que es tan complejo conocer sus propiedades y estimaciones, viene directamente de la definición de la misma, a saber

$$p_D(t, x, y) := p(t, x, y) - \mathbb{E}_x\{p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); t > \tau_D\}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

donde  $\tau_D$  es la primera vez que el proceso  $X$  abandona el dominio  $D$ . Nótese que al ser  $p_D(t, x, y)$  una resta, una característica tan básica como la positividad (recuerde que una densidad de transición es no negativa) deja de ser inmediata.

En la mayoría de los trabajos que obtienen estimaciones y propiedades de  $p_D(t, x, y)$ , se utilizan estimaciones y propiedades conocidas de  $p(t, x, y)$ . El objetivo de este trabajo es proporcionar

demostraciones de propiedades elementales de  $p_D(t, x, y)$  para una clase de procesos de Markov fuertes, simétricos, continuos por la derecha y cuasi continuos por la izquierda (ver el inicio de la Sección 2). Cabe destacar que esta clase de procesos incluye importantes procesos de Lévy y procesos de Feller que surgen tanto en matemática pura como en la aplicada (ver Ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3). El resultado principal de este artículo es el Teorema 4.1 y las propiedades elementales probadas son: la ecuación de Chapman-Kolmogorov, la continuidad y la simetría. La mayoría de trabajos que se conocen sobre estimaciones de  $p_D(t, x, y)$  (en el caso de procesos de Markov discontinuos), dejan al lector la prueba de tales propiedades elementales e indican que es suficiente guiarse de las demostraciones para el caso gaussiano, usando las estimaciones conocidas de  $p(t, x, y)$ . La referencia estándar recomendada para esta labor es [15]. Sin embargo, consideramos que las pruebas no son tan directas como en el caso gaussiano, ya que en este caso se utiliza la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano. Otra ventaja empleada en tales pruebas, es que se conoce de manera explícita la función de densidad de probabilidad de transición del movimiento browniano, la cual es unimodal, isotrópica y uniformemente continua en  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  para cada  $t > 0$ . Estas bondades han permitido obtener diferentes demostraciones de dichas propiedades básicas a lo largo de los años. Consideramos entonces que este trabajo de difusión atenderá ese vacío frecuentemente ignorado en la literatura y motivará a los lectores a conocer más sobre tales procesos discontinuos. Más aún, en nuestra última sección presentamos una aplicación de tales propiedades a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas semilineales no autónomas. Cabe destacar que, en este artículo, las demostraciones de los resultados son dadas en forma más detallada que las presentadas en las referencias [4, 6, 15, 16, 18, 21, 24]. En cada uno de nuestros resultados y demostraciones, donde utilizamos alguna de las anteriores fuentes bibliográficas, indicamos la cita, el resultado específico en el cual nos basamos y su página. Incluso, en algunos casos, algunas ideas de tales fuentes fueron adaptadas para poderlas aplicar en el contexto de nuestros procesos de interés.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 introducimos el proceso de Markov con el que estaremos trabajando y presentamos algunos ejemplos. En la Sección 3 probamos propiedades del tiempo de salida  $\tau_D$ . Estas propiedades son importantes ya que la densidad de transición  $p_D(t, x, y)$  se expresa en términos de  $\tau_D$  (ver (1)) y las trayectorias de  $X$  podrían tener saltos. La Sección 4 versa sobre las propiedades elementales mencionadas anteriormente. Se presentan demostraciones de ellas y de algunas otras propiedades. En la Sección 5 mostramos una aplicación de las propiedades de  $p_D(t, x, y)$  a la solución de una ecuación de Cauchy de tipo reacción-difusión, con condiciones de frontera de Dirichlet.

En este artículo usamos la siguiente notación:  $|\cdot|$  es la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^d$ ,  $d(F, G)$  es la distancia euclidiana entre  $F, G \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $m_\ell(dx) = dx$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{B}(D)$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $D$ ,  $C_c^p(D)$  es el espacio de todas las funciones reales continuas de clase  $C^p$ , con soporte compacto contenido en  $D$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots, \infty$  y  $C_0^p(D) = \overline{C_c^p(D)}$ ;  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  (convenimos que  $C_c^0(D) = C_c(D)$  y  $C_0^0(D) = C_0(D)$ ).  $B_r(x)$  es la bola abierta de radio  $r > 0$  centrada en  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , es la norma en  $L^p(D)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ .

## 2. Proceso de Markov simétrico y ejemplos

Sea  $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, X(t), \mathbb{P}_x; t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$  un proceso de Hunt<sup>1</sup>, es decir,  $X$  es un proceso de Markov (temporalmente homogéneo) con las siguientes propiedades:

$[H_1]$  :  $X$  es continuo a la derecha.

<sup>1</sup>Para el lector interesado, [6] y [16] son referencias clásicas sobre este tipo de procesos. En [6] los procesos de Hunt son llamados procesos estándar. El libro [18] contiene en su apéndice una introducción concisa sobre estos procesos, ya que el objetivo de los autores es estudiar formas de Dirichlet para procesos de Markov generales.

- [ $H_2$ ] :  $X$  es quasi continuo a la izquierda.
- [ $H_3$ ] :  $X$  tiene la propiedad fuerte de Markov.
- [ $H_4$ ] :  $X$  es normal, es decir,  $\mathbb{P}_x\{X(0) = x\} = 1, x \in \mathbb{R}^d$ .

Suponemos adicionalmente que  $X$  tiene una densidad de probabilidad de transición  $p(t, x, y)$  tal que:

- [ $p_1$ ] : Para cada  $t > 0$ ,  $p(t, \bullet, \bullet)$  es continua en  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ .
- [ $p_2$ ] :  $p(t, x, y) = p(t, y, x), t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$ .
- [ $p_3$ ] :  $M_\delta := \sup\{p(t, x, y); t > 0, |x - y| > \delta\} < \infty$ .

Observe que [ $p_2$ ] implica que  $X$  es simétrico. Dado  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  definamos la variable aleatoria  $\tau_B := \inf\{t > 0; X(t) \notin B\}$ . Vamos a suponer que la función de distribución de la variable aleatoria  $\tau_{B_\delta(x)}$  satisface:

$$[F_\tau] : \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\} = 0, \delta > 0.$$

La variable aleatoria  $\tau_B$  es **el primer instante o tiempo de salida** del conjunto  $B$ . Es inmediato que si  $A \subseteq B$ , entonces  $\tau_A \leq \tau_B$ . Enunciamos a continuación otras propiedades elementales. Los resultados propuestos son conceptos técnicos frecuentemente utilizados y sus demostraciones usualmente son omitidas en la mayoría de los textos. Cabe destacar que, en el caso de trayectorias continuas, las demostraciones son directas. Sin embargo, dado que ese no es nuestro caso, presentaremos con detalle dichas pruebas. En lo que sigue  $\Omega \ni \omega \mapsto \theta_t(\omega) \in \Omega$  denota el operador traslación que satisface  $X(s) \circ \theta_t(\omega) = X(s + t)(\omega), s, t \geq 0$ .

**Proposición 2.1.** Sea  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

1.  $\tau_B$  es terminal, es decir, si  $T$  es un tiempo de paro, entonces  $\tau_B = T + \tau_B \circ \theta_T$  sobre el evento  $\{T < \tau_B\}$ .
2.  $\mathbb{P}_x\{\tau_B > 0\} = 1, x \in B^\circ$ .
3. Si  $B$  es abierto, entonces  $X(\tau_B) \notin B$  sobre el evento  $\{\tau_B < \infty\}$ .
4. Si  $B$  es cerrado, entonces la función de distribución de  $\tau_B$  está dada por el siguiente límite

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B \geq t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x\{X(kt/2^n) \in B; k = 1, \dots, 2^n - 1\}.$$

*Demostración.* 1. Si  $\tau_B = \infty$ , el resultado es inmediato. De la definición de ínfimo, se tiene que

$$T + \tau_B \circ \theta_T = \inf\{t > T; X(t) \notin B\} \quad (2)$$

y así, nuevamente de la definición de ínfimo  $\tau_B \leq T + \tau_B \circ \theta_T$ . Para probar la igualdad procederemos por contradicción. En efecto, supongamos que existe  $\omega$  tal que  $\tau_B(\omega) < T(\omega) + \tau_B \circ \theta_T(\omega)$ . Entonces, de la definición de ínfimo, existe  $t > 0$  tal que  $\tau_B(\omega) \leq t < T(\omega) + \tau_B \circ \theta_T(\omega)$  y  $X(t, \omega) \notin B$ . Puesto que  $T(\omega) < \tau_B(\omega)$ , de lo anterior y (2), se obtiene que  $T(\omega) + \tau_B \circ \theta_T(\omega) \leq t$ , lo cual es la contradicción deseada.

2. Si  $\tau_B(\omega) = 0$ , entonces existe una sucesión decreciente  $(t_n)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ ,  $X(t_n, \omega) \in B^c$ . Si adicionalmente se tiene que  $X(0, \omega) = x$ , por  $[H_1]$  se llega a que  $B^\circ \ni x = X(0, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n, \omega) \in \overline{B^c}$ . Luego, de  $[H_4]$  tenemos que  $\mathbb{P}_x\{\tau_B = 0\} = \mathbb{P}_x\{\tau_B = 0, X(0) = x\} = 0$ .
3. Usando el argumento anterior puede demostrarse que si  $\tau_B(\omega) < \infty$ , entonces se tiene que  $X(\tau_B(\omega), \omega) \in \overline{B^c} = B^c$ .
4. Para cada  $t > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  sea  $J_t(n) := \{j_k := kt/2^n; k = 1, \dots, 2^n - 1\}$  y sea  $J_t := \cup_{n=1}^\infty J_t(n)$ . Entonces  $J_t \subseteq (0, t)$  y  $\overline{J_t} = [0, t]$ . Usando que  $B$  es cerrado y  $[H_1]$ , puede probarse que  $\{X(s) \in B, s \in (0, t)\} = \{X(j) \in B, j \in J_t\}$ . Pero en general, de la definición de ínfimo,  $\{\tau_B \geq t\} = \{X(s) \in B, s \in (0, t)\}$  y así  $\{\tau_B \geq t\} = \cap_{n=1}^\infty \{X(j_k) \in B; k = 1, \dots, 2^n - 1\}$ . El resultado es ahora consecuencia del teorema de la convergencia monótona (aplicado a las funciones indicadoras de los complementos de estos eventos).

□

Presentamos a continuación algunos ejemplos de procesos de Markov que cumplen las propiedades  $[H_1]$ ,  $[H_2]$ ,  $[H_3]$ ,  $[H_4]$ ,  $[p_1]$ ,  $[p_2]$ ,  $[p_3]$  y  $[F_\tau]$ . Junto a cada proceso dado se presenta una forma no trivial de su generador.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $X$  un proceso de Lévy simétrico con densidad de probabilidad de transición que satisface  $[p_1]$  y  $[p_3]$ . Claramente  $X$  cumple  $[H_1]$ - $[H_4]$  y  $[p_2]$ . Para verificar  $[F_\tau]$ , sean  $\delta > 0$ ,  $B := \overline{B_{\delta/2}(x)}$  y  $B_0 := \overline{B_{\delta/2}(0)}$ . Nótese que de la Proposición 2.1.4 y el hecho de que todo proceso de Lévy es espacialmente homogéneo, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x\{\tau_B \geq 2t\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x\{X(kt/2^n) \in B; k = 1, \dots, 2^n - 1\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0\{X(kt/2^n) \in B_0; k = 1, \dots, 2^n - 1\} \\ &= \mathbb{P}_0\{\tau_{B_0} \geq 2t\}. \end{aligned}$$

Se sigue de esto y la Proposición 2.1.2 que

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\} \leq \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}_x\{\tau_B < 2t\} = 0.$$

Presentamos a continuación un ejemplo específico.

Sea  $X$  un movimiento browniano subordinado, es decir,  $X(t) = W(S(t))$ ,  $t \geq 0$ , donde  $S = (S(t); t \geq 0)$  es un subordinador independiente del movimiento browniano  $W = (W(t); t \geq 0)$ . Por tanto, la densidad de probabilidad de transición esta dada por

$$p(t, x, y) = \int_0^\infty (4\pi s)^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \mathbb{P}\{S(t) \in ds\}.$$

La función  $(4\pi s)^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}$  es uniformemente continua y uniformemente acotada sobre el conjunto  $\{(s, x, y); s > 0, |x - y| > \delta\}$ , luego  $p(t, x, y)$  satisface  $[p_1]$  y  $[p_3]$ . Sea  $\psi$  el exponente de Laplace de  $S$ , esto es

$$\psi(r) = \nu r + \int_0^\infty (1 - e^{-rt}) \mu(dt), \quad r \geq 0,$$

donde  $\nu \geq 0$ ,  $\mu$  es la medida de Lévy del subordinador  $S$ . Si  $\mathcal{L}$  es el generador de  $X$ , entonces se conoce que  $\mathcal{L}f(x) = -\psi(-\Delta)f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  (ver [2, Teorema 3.3.15, p. 145]).

Los movimientos brownianos subordinados son la fuente de múltiples operadores usados en diferentes áreas de la ciencia. Algunos de ellos son:  $\Delta$  (laplaciano);  $\Delta_\alpha := -(-\Delta)^{\alpha/2}$ ,  $\alpha \in (0, 2)$

(laplaciano fraccionario);  $mc^2 - (m^{2/\alpha}c^{4/\alpha} - c^{2/\alpha}\Delta)^{\alpha/2}$ ,  $m, c > 0$ ,  $\alpha \in (0, 2)$  (operador Schrödinger relativista fraccionario);  $\Delta_\alpha + \Delta_\beta$ ,  $0 < \beta < \alpha < 2$ ;  $\Delta + \Delta_\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 2)$ . El capítulo 3 de [2] es una referencia básica acerca de la teoría general que involucra los operadores anteriores. Dicho capítulo incluye información acerca de el laplaciano, el laplaciano fraccionario y el operador Schrödinger relativista fraccionario; mientras que [12] y [11] contienen información más especializada acerca de  $\Delta_\alpha + \Delta_\beta$  y  $\Delta + \Delta_\alpha$ , respectivamente.

En el siguiente ejemplo  $\Gamma(\cdot)$  denota la función gamma. Recuerde que ésta se define por  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$ ,  $x > 0$ .

**Ejemplo 2.2.** Sea  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, x); x \in \mathbb{R}^d\} \ni (x, y) \mapsto J(x, y) \in [0, \infty)$  una función medible y simétrica, es decir  $J(x, y) = J(y, x)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Para cualesquiera  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  definamos

$$\mathcal{E}(f, g) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]J(x, y) dx dy,$$

y  $\text{Dom}(\mathcal{E}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$ . Suponga que existe una función creciente  $(0, \infty) \ni t \mapsto \psi(t) \in (0, \infty)$  con las siguientes propiedades:

1. Existen  $\beta_1, \beta_2 > 0$  y  $c_1, c_2 > 0$  tales que

$$c_1 \left(\frac{R}{r}\right)^{\beta_1} \leq \frac{\psi(R)}{\psi(r)} \leq c_2 \left(\frac{R}{r}\right)^{\beta_2}, \quad 0 < r \leq R. \quad (3)$$

2.  $\int_0^1 \frac{s}{\psi(s)} ds < \infty$ .

3. Existe  $\bar{C} > 0$  de modo que

$$\frac{\bar{C}^{-1}}{|x - y|^d \psi(|x - y|)} \leq J(x, y) \leq \frac{\bar{C}}{|x - y|^d \psi(|x - y|)}. \quad (4)$$

Bajo las hipótesis anteriores  $(\mathcal{E}, \text{Dom}(\mathcal{E}))$  es una forma regular de Dirichlet en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con kernel de saltos  $J$ , por lo que existe un proceso de Feller conservativo  $X$  que posee una densidad de transición continua  $p(t, x, y)$  en  $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  y además cumple que

$$p(t, x, y) \leq \frac{Ct}{|x - y|^d \psi(|x - y|)} + \frac{C}{\Phi^{-1}(t)^d} e^{-a_* |x - y|^2 / \Phi^{-1}(t)^2}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (5)$$

donde  $a_*, C > 0$  y  $\Phi^{-1}$  es la inversa de

$$\Phi(r) := \frac{r^2}{2 \int_0^r \frac{s}{\psi(s)} ds}, \quad r > 0$$

(ver [3, Teorema 1.2, pág. 2833]). El hecho de que  $X$  es conservativo garantiza que  $p(t, x, y)$  es una densidad de probabilidad de transición, es decir,  $\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) dy = 1$ , para toda  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ . La función  $\Phi$  es estrictamente creciente y  $\lim_{r \downarrow 0} \Phi(r) = 0$  como puede consultarse en [3, p. 2836]. Observe que si  $\int_0^\infty \frac{s}{\psi(s)} ds = \infty$ , entonces de (3) se sigue que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \infty$ . Si  $\int_0^\infty \frac{s}{\psi(s)} ds < \infty$ , entonces es claro que el límite anterior se cumple. De esta manera  $\lim_{t \downarrow 0} \Phi^{-1}(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^{-1}(t) = \infty$ . Usando estos límites, (5) y que  $\psi$  es creciente, puede probarse que  $p(t, x, y)$

satisface  $[p_3]$ . Finalmente, veamos que  $X$  tiene la propiedad  $[F_\tau]$ . En efecto, utilizando el lado izquierdo de (3) obtenemos que, para toda  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)^c} \frac{Ct}{|x-y|^d \psi(|x-y|)} dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_{2^{n+1}r}(x) \setminus B_{2^n r}(x)} \frac{Ct}{|x-y|^d \psi(|x-y|)} dy \\ &\leq \frac{Ct}{r^d \psi(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_\ell(B_{2^{n+1}r}(x))}{2^{(d+\beta_1)n}} \\ &= \frac{C't}{\psi(r)}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $C' := C2^{d+\beta_1} \pi^{d/2} / [c_1 \Gamma(1+d/2)(2^{\beta_1} - 1)]$ . Por otra parte, observe que

$$\begin{aligned} I_r(t) &:= \int_{B_r(x)^c} \frac{C}{\Phi^{-1}(t)^d} e^{-a_* |x-y|^2 / \Phi^{-1}(t)^2} dy \\ &= \int_{r/\Phi^{-1}(t)}^{\infty} C u^{d-1} e^{-a_* u^2} du \\ &\leq \frac{C}{2a_*^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \end{aligned}$$

para toda  $r > 0$ . La función  $I_r(\cdot)$  es creciente y  $\lim_{t \downarrow 0} I_r(t) = 0$ . Las relaciones anteriores y (5) implican que

$$\mathbb{P}_x\{X(t) \notin B_{\delta/2}(x)\} \leq \frac{C't}{\psi(\delta/2)} + I_{\delta/2}(t), \quad \delta > 0. \quad (7)$$

Sin embargo, por la Proposición 2.1.3,  $X(\tau_{B_\delta(x)}) \notin B_\delta(x)$  en el evento  $\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\}$  por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x\{X(t) \in B_{\delta/2}(x), \tau_{B_\delta(x)} \leq t\} &\leq \mathbb{P}_x\{X(t) \notin B_{\delta/2}(X(\tau_{B_\delta(x)})), \tau_{B_\delta(x)} \leq t\} \\ &= \mathbb{E}_x\left\{\mathbb{P}_{X(\tau_{B_\delta(x)})}\{X(t - \tau_{B_\delta(x)}) \notin B_{\delta/2}(X(\tau_{B_\delta(x)}))\}; \tau_{B_\delta(x)} \leq t\right\} \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d, s \leq t} \mathbb{P}_z\{X(s) \notin B_{\delta/2}(z)\}, \end{aligned}$$

donde se ha usado  $[H_3]$  en la igualdad. Ahora  $[F_\tau]$  es consecuencia del hecho de que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\} \leq \mathbb{P}_x\{X(t) \notin B_{\delta/2}(x)\} + \mathbb{P}_x\{X(t) \in B_{\delta/2}(x), \tau_{B_\delta(x)} \leq t\}$$

y la desigualdad (7).

En general, es difícil encontrar una fórmula explícita para el generador de un proceso de Markov simétrico de saltos puros, incluso si este está asociado a una forma regular de Dirichlet. No obstante, esto es posible si se conocen más propiedades del kernel de saltos  $J$ . Por ejemplo, si  $\int_{\mathbb{R}^d} (|x-y|^2 \wedge 1) J(x, y) dy$  es localmente integrable y

$$\int_{B_1(0)} |h| |J(x, x+h) - J(x, x-h)| dh < \infty,$$

entonces el generador  $\mathcal{L}$  de  $X$  tiene la forma

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x)^c} [f(x) - f(y)] J(x, y) dx dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, f \in C_0^2(\mathbb{R}^d),$$

ver [26, Teorema 2.2, p. 404].

**Ejemplo 2.3.** Sea  $A(x) = (a_{ij}(x); i, j = 1, \dots, d)$  una matriz de funciones reales definidas en  $\mathbb{R}^d$  que es uniformemente elíptica y acotada, en el sentido de que existe una constante  $c \geq 1$  tal que

$$c^{-1}|z|^2 \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}(x) z_i z_j \leq c|z|^2, \quad x, z \in \mathbb{R}^d$$

y  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, x); x \in \mathbb{R}^d\} \ni (x, y) \mapsto J(x, y) \in [0, \infty)$  es una función medible simétrica tal que existe una función estrictamente creciente  $[0, \infty) \ni r \mapsto \psi(r) \in [0, \infty)$ , con  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(1) = 1$ , que satisface (3) y (4). En este caso las constantes positivas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  están relacionadas por  $\beta_1 \leq \beta_2 < 2$ . Observamos que si  $c_* := 1 + c_2(2 - \beta_2)^{-1}$ , entonces el lado derecho de (3) garantiza que

$$\int_0^r \frac{s}{\psi(s)} ds \leq c_* \frac{r^2}{\psi(r)}, \quad r > 0. \quad (8)$$

Para cada  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  definamos

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x) A(x) \nabla g(x)^t dx + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] J(x, y) dx dy,$$

donde  $\text{Dom}(\mathcal{E}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$ . Luego,  $(\mathcal{E}, \text{Dom}(\mathcal{E}))$  es una forma regular de Dirichlet en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y por tanto existe un proceso de Hunt simétrico  $X$  con función de densidad de transición continua  $p(t, x, y)$  tal que

$$p(t, x, y) \leq \frac{t}{|x - y|^d \psi(|x - y|)} + \frac{1}{t^{d/2}} e^{-b|x - y|^2/t}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (9)$$

donde  $b > 0$  y su generador  $\mathcal{L}$  está dada por

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x)^c} [f(x) - f(y)] J(x, y) dy,$$

$x \in \mathbb{R}^d$ ,  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  (ver [13, Teorema 1.4, p. 557]). Los lados derechos de (3) y (4) implican que

$$J(x, y) \leq \frac{c_2}{|x - y|^{d+\beta_2}} \quad \text{cuando} \quad |x - y| \leq 1. \quad (10)$$

Además, usando (8) y argumentando como en (6) concluimos que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (|x - y|^2 \wedge 1) J(x, y) dy &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B_1(0)} |x - y|^2 J(x, y) dy + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B_1(0)^c} J(x, y) dy \\ &\leq \bar{C} \int_0^1 \frac{s}{\psi(s)} ds + \frac{C'}{\psi(1)} \\ &\leq \bar{C} c_* + C'. \end{aligned}$$

De de esto y (10) se puede demostrar, en forma similar a [13, p. 563], que el proceso  $X$  es conservativo. Las propiedades  $[p_3]$  y  $[F_\tau]$  son válidas y su demostración es similar a la dada en el Ejemplo 2.2 pero usando ahora la desigualdad (9).

### 3. Propiedades del tiempo de salida

En esta sección presentamos algunas propiedades importantes del tiempo de salida  $\tau_B$ . El tiempo de salida es una variable aleatoria que nos permitirá estudiar la probabilidad de transición del proceso  $X$  en algún boreliano  $B$ . Las probabilidades de transición en  $B$ , serán estimadas mediante la densidad de transición de Dirichlet, la cual, como mencionamos en nuestra introducción, se expresa en términos del tiempo de salida. De aquí la importancia de conocer propiedades de  $\tau_B$ . En lo que resta de esta sección, suponemos que  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

En general, si una variable aleatoria es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, es imposible que con probabilidad positiva tome valores en el boreliano  $\{t\}$ , con  $t > 0$ . La siguiente proposición nos dice que  $\tau_B$  tiene esta propiedad y su demostración está basada en la prueba del Teorema 4.7 de [24, p. 11], en el contexto gaussiano.

**Proposición 3.1.** *Para cada  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^d$  se tiene que  $\mathbb{P}_x\{\tau_B = t\} = 0$ .*

*Demostración.* Sean  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ . Supongamos válida la siguiente afirmación:

[A] : Existe  $s \in (0, t)$  tal que  $\mathbb{P}_\bullet\{\tau_B = s\} = 0$ ,  $m_\ell$ -c.d.q.

Usando la Proposición 2.1.1 puede probarse que  $\{\tau_B = t\} = \{\tau_B > t - s, t - s + \tau_B \circ \theta_{t-s} = t\}$ . Esto junto con  $[H_3]$  y la afirmación [A] implican que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B = t\} \leq \mathbb{P}_x\{\tau_B \circ \theta_{t-s} = s\} = \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(t-s)}\{\tau_B = s\}\} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} p(t-s, x, y) dy = 0.$$

Probemos entonces [A]. Dado  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  denotamos por  $\#B$  la cardinalidad de  $B$ . Recuerde que  $B$  es finito cuando  $\#B < \aleph_0$ , donde  $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , sea  $A_n := B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)$ . Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{s \in (0, t)} \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy &= \sup \left\{ \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B \in F\} dy; F \subseteq (0, t), \#F < \aleph_0 \right\} \\ &\leq m_\ell(A_n) < \infty. \end{aligned}$$

Luego, si  $P_n := \{s \in (0, t); \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy > 0\}$  se sigue de [17, Proposición 0.20, p. 11] que  $\#P_n \leq \aleph_0$ . Sea  $P := \{s \in (0, t); \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy > 0\}$ . Usando que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy,$$

deducimos que  $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ . Finalmente, al ser  $(0, t) = P \cup P^c$  y  $\#P \leq \aleph_0$ , concluimos que  $P^c \neq \emptyset$  y así [A] es verdadera.  $\square$

Dado que el tiempo de salida  $\tau_B$  podría ser  $\infty$ , una pregunta interesante es ¿Bajo qué condiciones  $\tau_B$  es finito? La respuesta a esta cuestión viene dada en el Teorema 3.1 y para su demostración haremos uso de la semicontinuidad inferior de la función  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq t\}$ ,  $t > 0$ . Esta última afirmación es el enunciado de nuestra siguiente proposición y su demostración se basa en las pruebas dadas en [4, p. 81, Proposición 1.10], [15, p. 22, Proposición 1.19], [16, p. 163, Proposición 1] y [24, p. 20, Proposición 2.1]. Sin embargo, cabe destacar que en tales demostraciones se utiliza que, para cada  $\delta \in (0, t)$ , la función  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(\delta)}\{\tau_B \leq t - \delta\}\}$  es continua, lo cual es consecuencia del hecho de que la densidad de probabilidad de transición del movimiento browniano es conocida. Nosotros no hacemos uso de esto, ya que bajo nuestros supuestos, no tenemos fórmula explícita de  $p(t, x, y)$ .

**Proposición 3.2.** Para cada  $t > 0$  la función  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq t\}$  es semicontinua inferiormente.

*Demostración.* Para cada  $\delta > 0$  sean  $f_\delta(x) := \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(\delta)}\{\tau_B \leq t - \delta\}\}$  y  $\tau_B(\delta) := \delta + \tau_B \circ \theta_\delta$ . Observe que  $\tau_B(\delta) = \inf\{t > \delta; X(t) \notin B\}$ ,  $\tau_B(\bullet)$  es decreciente y  $\lim_{\delta \downarrow 0} \tau_B(\delta) = \tau_B$ . De la definición de  $f_\delta$ , la propiedad  $[p_1]$  y el lema de Fatou, tenemos

$$\begin{aligned} f_\delta(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B \leq t - \delta\} p(\delta, x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{z \rightarrow x} \mathbb{P}_y\{\tau_B \leq t - \delta\} p(\delta, z, y) dy \\ &\leq \liminf_{z \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B \leq t - \delta\} p(\delta, z, y) dy \\ &= \liminf_{z \rightarrow x} f_\delta(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto cada  $f_\delta$  es semicontinua inferiormente. Por  $[H_3]$  obtenemos que  $f_\delta(x) = \mathbb{P}_x\{\tau_B(\delta) \leq t\}$ , por lo que  $f_\bullet(x)$  es creciente para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ . Se sigue de esto y la Proposición 3.1 que  $\lim_{\delta \downarrow 0} f_\delta(x) = \mathbb{P}_x\{\tau_B < t\} = \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq t\}$ . De aquí, el resultado se sigue por la semicontinuidad inferior de cada  $f_\delta$ .  $\square$

El siguiente teorema presenta dos condiciones bajo las cuales  $\tau_B$  es finita, casi seguramente. La demostración se basa en la prueba del Teorema 1.17 en [15, p. 20] y la Proposición 2.8 en [24, p. 23].

**Teorema 3.1.** Considere los siguientes enunciados.

1.  $m_\ell(B) < \infty$  y existe  $[0, \infty) \ni t \mapsto \phi(t) \in [0, \infty)$  tal que  $\phi((0, \infty)) \subseteq (0, \infty)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty$  y  $p(t, x, y) \leq 1/\phi(t)$  para toda  $t > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .
2.  $m_\ell(B^c) > 0$  y  $p(t, x, y) > 0$  para toda  $t > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

Si cualquiera de los enunciados anteriores se cumple, entonces se tiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x\{\tau_B\} < \infty.$$

*Demostración.* Comenzamos suponiendo que 1. es cierto. Sea  $t_0 > 0$  suficientemente grande de manera que  $m_\ell(B) < \phi(t_0)$  y sea  $\kappa := m_\ell(B)/\phi(t_0)$ . Entonces  $\kappa \in (0, 1)$  y  $x \in \mathbb{R}^d$  se tiene que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B > 2t_0\} \leq \mathbb{P}_x\{X(t_0) \in B\} = \int_B p(t_0, x, y) dy \leq \frac{1}{\phi(t_0)} \int_B dy = \kappa.$$

Luego, la propiedad  $[H_3]$  implica que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B > (n+1)2t_0\} = \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(n2t_0)}\{\tau_B > 2t_0\}; \tau_B > n2t_0\} \leq \kappa \mathbb{P}_x\{\tau_B > n2t_0\}.$$

Por inducción matemática concluimos que  $\mathbb{P}_x\{\tau_B > n2t_0\} \leq \kappa^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Por lo tanto, para toda  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathbb{E}_x\{\tau_B\} \leq 2t_0 \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\{\tau_B > n2t_0\} = \frac{2t_0}{1-\kappa},$$

lo cual concluye nuestra demostración en esta primera parte.

Supongamos ahora que 2. se cumple. Por la Proposición 3.1 tenemos que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B \leq 1\} = \mathbb{P}_x\{\tau_B < 1\} \geq \int_{B^c} p(1/2, x, y) dy > 0, \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^d. \quad (11)$$

Sea  $f \in C_c(B)$  tal que  $1_B \leq f \leq 1$ . Para cada  $r \geq 0$  definamos  $T_r := \inf\{t > 0; \int_0^t f(X(u)) du > r\}$ . Puesto que  $f \leq 1$ , puede verse fácilmente que  $T_r \geq r$ . Nótese que sobre  $\{T_r < \infty\}$  se cumple lo siguiente:

$$[T_1]: \quad \int_0^{T_r} f(X(u)) du = r.$$

$$[T_2]: \quad \{T_r \geq t\} = \left\{ \int_0^t f(X(u)) du \leq r \right\}.$$

$$[T_3]: \quad T_{r+1} = T_r + T_1 \circ \theta_{T_r}.$$

Es bien sabido que para cualquier proceso de Markov (especialmente homogéneo) que satisface  $[H_1]$ - $[H_4]$ , la filtración  $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$  es continua a la derecha (ver por ejemplo [16, p. 75]). La propiedad  $[T_2]$  y la continuidad a la derecha de la filtración  $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$  implican que  $T_r$  es un tiempo de paro. Afirmamos que para cada  $r > 0$  se tiene que  $X(T_r) \in \text{Supp}(f)$  sobre  $\{T_r < \infty\}$ , donde  $\text{Supp}(f) := \overline{\{x \in B; f(x) \neq 0\}}$ . En efecto, supongamos que para alguna  $r > 0$  se cumple que  $X(T_r) \notin \text{Supp}(f)$ . Entonces existe  $\omega$  y una bola abierta  $B_\epsilon(X(T_r)(\omega))$  tal que  $f$  se anula sobre ella. Luego, debido a  $[H_1]$  podemos fijar  $\gamma > 0$  suficientemente pequeña de manera que  $f(X(\bullet, \omega)) = 0$  sobre  $[T_r(\omega), T_r(\omega) + \gamma]$ . Usando esto y las propiedades  $[T_1]$ ,  $[T_2]$  se llega a que

$$r < \int_0^{T_r(\omega)+\gamma} f(X(u, \omega)) du = \int_0^{T_r(\omega)} f(X(u, \omega)) du = r,$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba nuestra afirmación. Sea  $\delta := \inf_{x \in \text{Supp}(f)} \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq 1\}$ . De la Proposición 3.2 se sigue que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\delta = \mathbb{P}_{x_0}\{\tau_B \leq 1\}$ . Más aún, (11) implica que  $\delta > 0$ . Utilizando  $[H_3]$ ,  $[T_3]$ , el hecho de que  $T_r \geq r$  y que  $X(T_r) \in \text{Supp}(f)$  en el evento  $\{T_r < \tau_B\}$ , concluimos que

$$\mathbb{P}_x\{T_{r+1} < \tau_B\} = \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(T_r)}\{T_1 < \tau_B\}; T_r < \tau_B\} \leq (1 - \delta)\mathbb{P}_x\{T_r < \tau_B\}, \quad r > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Por inducción matemática se obtiene que  $\mathbb{P}_x\{T_n < \tau_B\} \leq (1 - \delta)^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, puesto que  $1_{(0, \tau_B/2]}(t)1_{B^c}(X(t)) = 0$ ,  $1_B \leq f$  y  $[T_2]$ ,

$$\mathbb{E}_x\left\{\frac{\tau_B}{2}\right\} \leq \mathbb{E}_x\left\{\int_0^{\tau_B} f(X(t)) dt\right\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left\{\int_0^{\tau_B} f(X(t)) dt > n\right\} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x\{T_n < \tau_B\}.$$

Por lo tanto  $\mathbb{E}_x\{\tau_B\} \leq 2(1 + \delta^{-1})$  para toda  $x \in \mathbb{R}^d$ . Esto último concluye la prueba de este teorema.  $\square$

El movimiento browniano y el proceso simétrico  $\alpha$ -estable son ejemplos de procesos de Markov cuyas respectivas funciones de densidad de probabilidad cumplen ambas condiciones del Teorema 3.1. En efecto, en el caso del movimiento browniano se conoce que

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, t > 0,$$

por lo que ambas condiciones del Teorema 3.1 se cumplen. Para el proceso simétrico  $\alpha$ -estable, ver el Teorema 2.1 en [14, p. 208], incisos (1) y (5). Los procesos de Markov en los Ejemplos 2.2 y 2.3 satisfacen la segunda condición del Teorema 3.1 sobre cualquier boreliano acotado  $B$ . En efecto, para el Ejemplo 2.2 ver [3, Teorema 1.2, p. 2833] y para el Ejemplo 2.3 ver [13, Teorema 1.4, p. 557].

## 4. Propiedades de la densidad de transición de Dirichlet

En esta sección contruimos una densidad de transición  $p_D(t, x, y)$  para el proceso matado asociado a  $X$  y presentamos algunas de sus propiedades. Como veremos en la próxima sección,  $p_D(t, x, y)$  es el kernel de calor de Dirichlet y por esta razón es conocido también en la literatura como densidad de transición de Dirichlet. En esta sección suponemos que  $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Definamos  $r(t, x, y) := \mathbb{E}_x\{p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); t > \tau_D\}$ ,  $t > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$  y

$$p_D(t, x, y) := p(t, x, y) - r(t, x, y), \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d. \quad (12)$$

Observe que si  $B \in \mathcal{B}(D)$ , por el teorema de Tonelli,  $[H_3]$  y la Proposición 3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_B p_D(t, x, y) dy &= \mathbb{P}_x\{X(t) \in B\} - \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(\tau_D)}\{X(t - \tau_D) \in B\}; t > \tau_D\} \\ &= \mathbb{P}_x\{X(t) \in B\} - \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t > \tau_D\} \\ &= \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t < \tau_D\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos el **proceso matado**  $X_D = (X_D(t); t \geq 0)$  mediante

$$X_D(t) := \begin{cases} X(t), & t < \tau_D, \\ \dagger, & t \geq \tau_D, \end{cases}$$

donde  $\dagger$  es un valor fijo, entonces hemos probado que  $p_D(t, x, y)$  es una densidad de transición para el proceso matado  $X_D$ . Al punto fijo  $\dagger$  se le denomina **punto cementerio**.

La densidad de transición  $p_D(t, x, y)$  hereda algunas propiedades de la densidad de probabilidad  $p(t, x, y)$ . Antes de mostrar dichas propiedades probaremos tres lemas. El primero (Lema 4.1) es un resultado preliminar que nos ayudará a probar la continuidad de las trazas  $p_D(t, x, \bullet)$ ,  $t > 0$ ,  $x \in D$  y  $p_D(t, \bullet, y)$ ,  $t > 0$ ,  $y \in D$ , sobre  $D$ . Como veremos en el Teorema 4.1, lo anterior tendrá como consecuencia la continuidad de  $p_D(t, \bullet, \bullet)$  sobre  $D \times D$ , para cada  $t > 0$ .

**Lema 4.1.** *Supongamos que  $D$  abierto y sea  $t > 0$ .*

1. *Para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $r(t, x, \bullet)$  es continua en  $D$ .*
2. *Sea  $h(s, x, y) := \mathbb{E}_x\{r(t - s, X(s), y)\}$ ,  $0 < s < t$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Entonces, para cada  $s \in (0, t)$ ,  $y \in D$ ,  $h(s, \bullet, y)$  es continua en  $\mathbb{R}^d$ . Más aún, si  $K \subseteq D$  es compacto, entonces*

$$\limsup_{s \downarrow 0} \sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| = 0, \quad y \in D.$$

*Demostración.* Puesto que  $D$  es abierto, para cada  $y \in D$  existe  $\epsilon_y$  suficientemente pequeño de manera que  $\overline{B_{\epsilon_y}(y)} \subseteq D$ . Definamos  $\delta_y := d(D^c, \overline{B_{\epsilon_y}(y)})$ . Luego, cada  $\delta_y$  es positivo debido a que  $D^c$  es cerrado.

1. Sea  $(y_n)$  una sucesión en  $D$  que converge a  $y$ . De la Proposición 2.1.3 se sigue que la sucesión de variables aleatorias  $(p(t - \tau_D, X(\tau_D), y_n)1_{\{t > \tau_D\}})$  está acotada por  $M_{\delta_y/2}$  para  $n$  suficientemente grande. Debido a  $[p_3]$ , es claro que  $M_{\delta_y/2} < \infty$ . Por el teorema de la convergencia dominada y  $[p_1]$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(t, x, y_n) = r(t, x, y)$  lo cual prueba nuestra afirmación.

2. Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $\mathbb{R}^d$  que converge a  $x \in \mathbb{R}^d$ . Usando que  $y \in D$ , la Proposición 2.1.3 y  $[p_3]$ , concluimos que

$$p(t - \tau_D, X(\tau_D), y) 1_{\{s > \tau_D\}} \leq M_{\frac{\delta_y}{2}} < \infty, \text{ para toda } x \in \mathbb{R}^d \text{ y } t \geq s. \quad (13)$$

Luego, de la definición de  $r(t, x, y)$ ,

$$\begin{aligned} |h(s, x_n, y) - h(s, x, y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} r(t - s, z, y) |p(s, x_n, z) - p(s, x, z)| dz \\ &\leq M_{\frac{\delta_y}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |p(s, x_n, z) - p(s, x, z)| dz. \end{aligned}$$

Pero  $\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x_n, z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, z) dz = 1$  y  $p(s, x_n, y), p(s, x, y)$  son no negativas, para toda  $n$ , por lo que el lema de Scheffé implica que el lado derecho de la última desigualdad converge a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto prueba la primera parte de 2.

Ahora, sean  $t > 0$ ,  $y \in D$  y  $s \in (0, t)$ . De la propiedad  $[H_3]$  y (13) se sigue que

$$\begin{aligned} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| &= |\mathbb{E}_x\{p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); s \geq \tau_D\} \\ &\quad + \mathbb{E}_x\{\mathbb{E}_{X(s)}\{p(t - s - \tau_D, X(\tau_D), y); t - s > \tau_D\}; t > \tau_D > s\} \\ &\quad - h(s, x, y)| \\ &\leq \mathbb{E}_x\{p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); s \geq \tau_D\} \\ &\quad + \mathbb{E}_x\{\mathbb{E}_{X(s)}\{p(t - s - \tau_D, X(\tau_D), y); t - s > \tau_D\}; s \geq \tau_D\} \\ &\leq 2M_{\frac{\delta_y}{2}} \mathbb{P}_x\{s \geq \tau_D\}. \end{aligned}$$

Sean  $K$  un subconjunto compacto de  $D$  y  $\delta := d(D^c, K) > 0$ . Claramente para toda  $x \in K$  se cumple que  $B_\delta(x) \subseteq D$ . Por lo tanto

$$\sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| \leq 2M_{\frac{\delta_y}{2}} \sup_{x \in K} \mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq s\}.$$

El resultado ahora es consecuencia de  $[F_\tau]$ .

□

La demostración de Lema 4.1.2 se basa en la prueba del Teorema 2.4 en [21, p. 142].

El siguiente lema es crucial en la demostración de que para cada  $t > 0$ ,  $p_D(t, \bullet, \bullet)$  es simétrica y su demostración se fundamenta en las pruebas de los siguientes resultados: [15, p. 33, Teorema 2.4], [4, p. 122, Proposición 4.1], [18, p. 153, Lema 4.1.3], [24, p. 36, Teorema 4.3].

**Lema 4.2.** Sean  $B, C \in \mathcal{B}(D)$  con  $D$  cerrado. Entonces

$$\int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t \leq \tau_D\} dx = \int_B \mathbb{P}_x\{X(t) \in C, t \leq \tau_D\} dx,$$

para toda  $t > 0$ .

*Demostración.* En la prueba de la Proposición 2.1.4 se observó que el hecho de que  $D$  es cerrado implica que  $\{t \leq \tau_D\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X(j_k) \in D; j_k = kt/2^n, k = 1, \dots, 2^n - 1\}$ . Luego, al ser  $p(t, x, y)$  una densidad de probabilidad de transición se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_C \mathbb{P}_x \{X(t) \in B, t \leq \tau_D\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbb{P}_{x_0} \{X(j_1) \in D, X(j_2) \in D, \dots, X(j_{2^n}) \in B\} dx_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D 1_C(x_0) \left[ \int_D \int_D \dots \int_B \prod_{k=1}^{2^n} p(j_k - j_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_{2^n} \dots dx_2 dx_1 \right] dx_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \int_D \int_D \dots \int_D 1_C(x_0) \prod_{k=1}^{2^n} p(t/2^n, x_{k-1}, x_k) 1_B(x_{2^n}) dx_{2^n} \dots dx_2 dx_1 dx_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \int_D \int_D \dots \int_D 1_B(x_{2^n}) \prod_{k=1}^{2^n} p(t/2^n, x_{2^n-k}, x_{2^n-(k-1)}) 1_C(x_0) dx_0 dx_1 dx_2 \dots dx_{2^n}. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variables  $y_k = x_{2^n-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n$  y la propiedad  $[p_2]$  obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_C \mathbb{P}_x \{X(t) \in B, t \leq \tau_D\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \int_D \int_D \dots \int_D 1_B(y_0) \prod_{k=1}^{2^n} p(t/2^n, y_{k-1}, y_k) 1_C(y_{2^n}) dy_{2^n} \dots dy_2 dy_1 dy_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D 1_B(y_0) \left[ \int_D \int_D \dots \int_C \prod_{k=1}^{2^n} p(j_k - j_{k-1}, y_{k-1}, y_k) dy_{2^n} \dots dy_2 dy_1 \right] dy_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \mathbb{P}_{y_0} \{X(j_1) \in D, X(j_2) \in D, \dots, X(j_{2^n}) \in C\} dy_0 \\ &= \int_B \mathbb{P}_x \{X(t) \in C, t \leq \tau_D\} dx. \end{aligned}$$

Esto concluye nuestra prueba. □

El siguiente resultado será sustancial en la prueba de la propiedad de Chapman-Kolmogorov.

**Lema 4.3.** Para cualesquiera  $s, t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ , la función  $\int_D p(s, x, z) p(t, z, \bullet) dz$  es continua en  $\mathbb{R}^d$ .

*Demostración.* Sean  $y \in \mathbb{R}^d$  y  $(y_n)$  una sucesión que converge a  $y$ . Definamos, para cada  $z \in \mathbb{R}^d$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(z) := 1_D(z) p(s, x, z) p(t, z, y)$ ,  $f_n(z) := 1_D(z) p(s, x, z) p(t, z, y_n)$ ,  $g(z) := p(s, x, z) p(t, z, y)$ ,  $g_n(z) := p(s, x, z) p(t, z, y_n)$ . Nótese que  $f \leq g$ ,  $f_n \leq g_n$  para toda  $n$  y por la propiedad de Chapman-Kolmogorov de  $p(t, x, y)$  se sigue que  $\int_{\mathbb{R}^d} g(z) dz = p(s+t, x, y) < \infty$  y  $\int_{\mathbb{R}^d} g_n(z) dz = p(s+t, x, y_n) < \infty$  para toda  $n$ . Pero de la propiedad  $[p_1]$  obtenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} g(z) dz$ . La afirmación es ahora consecuencia del teorema de la convergencia dominada generalizado (ver [28, p. 74, Lema 6.3]). □

Nuestro próximo teorema es el principal resultado de esta sección y usamos la siguiente notación: dado un subconjunto abierto  $D$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\delta_D(x) = d(x, D^c)$  para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ . La demostración está

basada en las pruebas de los siguientes resultados: [15, p. 33, Teorema 2.4], [24, p. 36, Teorema 4.3], [21, p. 141, Teorema 2.4]

**Teorema 4.1.** Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  un abierto y  $p_D(t, x, y)$  dada por (12). La densidad de transición  $p_D(t, x, y)$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $p_D(t, x, y)$  tiene la propiedad de Chapman-Kolmogorov.
2. Para toda  $t > 0$ ,  $p_D(t, \bullet, \bullet)$  es continua en  $D \times D$ .
3.  $p_D(t, x, y) = p_D(t, y, x)$ ,  $t > 0$ ,  $x, y \in D$ .

*Demostración.* 1. Del Lema 4.1.1 y  $[p_1]$  se sigue que para cada  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^d$  la función  $p_D(t, x, \bullet)$  es continua en  $D$  y así  $p_D(t, x, y) \geq 0$  para toda  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $y \in D$  debido a que cada  $p_D(t, x, \bullet)$  es una densidad de transición. Luego,  $0 \leq p_D(s, x, z)p_D(t, z, y) \leq p(s, x, z)p(t, z, y)$ ,  $s, t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $y, z \in D$ . Usando esto, el Lema 4.3 y el teorema de la convergencia dominada generalizado, puede probarse que  $\int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, \bullet) dz$  es continua en  $D$ , para  $s, t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ . El argumento es similar al de la prueba del Lema 4.3 por lo que se omite. Por lo tanto, para probar la propiedad de Chapman-Kolmogorov, es suficiente demostrar que para cada  $s, t > 0$  y  $x, y \in D$  se tiene que

$$p_D(s+t, x, \bullet) = \int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, \bullet) dz, \quad m_{\ell}\text{-c.d.} \quad (14)$$

En efecto, sean  $A \in \mathcal{B}(D)$  y  $s, t > 0$ . De la propiedad terminal (ver Proposición 2.1.1) de  $\tau_D$  tenemos que  $\{s+t < \tau_D\} = \{s < \tau_D, t < \tau_D \circ \theta_s\}$ . Luego, por la propiedad  $[H_3]$  se deduce que

$$\begin{aligned} \int_A p_D(s+t, x, y) dy &= \mathbb{P}_x\{X(s+t) \in A, s+t < \tau_D\} \\ &= \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(s)}\{X(t) \in A, t < \tau_D\}; s < \tau_D\} \\ &= \int_D \mathbb{P}_z\{X(t) \in A, t < \tau_D\} p_D(s, x, z) dz \\ &= \int_A \left[ \int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, y) dz \right] dy. \end{aligned}$$

De la arbitrariedad de  $A \in \mathcal{B}(D)$ , se sigue (14).

2. Comenzamos mostrando que  $p_D(t, \bullet, y)$  es continua en  $D$  para cada  $t > 0$  y  $y \in D$ . Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $D$  que converge a  $x \in D$ . Puesto que  $D$  es abierto, podemos elegir  $K \subseteq D$  compacto tal que  $x, x_n \in K$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $s \in (0, t)$ . Por tanto, si  $h(s, x, y)$  es la función del Lema 4.1.2, tenemos que

$$\begin{aligned} |p_D(t, x_n, y) - p_D(t, x, y)| &\leq |p_D(t, x_n, y) - h(s, x_n, y)| + |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| \\ &\quad + |h(s, x_n, y) - h(s, x, y)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| + |h(s, x_n, y) - h(s, x, y)|. \end{aligned}$$

Luego, del Lema 4.1.2 se sigue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |p_D(t, x_n, y) - p_D(t, x, y)| \leq 2 \sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)|.$$

Así, la continuidad de  $p_D(t, \bullet, y)$  se sigue del Lema 4.1.2 haciendo  $s \downarrow 0$ . Ahora, debido a que, como se demostró en 1.,  $p_D(t, x, \bullet)$  también es continua, entonces  $p_D(t, \bullet, \bullet)$  es continua, ya que por la propiedad de Chapman-Kolmogorov (parte 1. de este teorema),

$$p_D(t, x, y) = \int_D p_D(t/2, x, z) p_D(t/2, z, y) dz.$$

3. Puesto que  $D$  es abierto, podemos escribir que  $D^c = \{x; \delta_D(x) = 0\}$ . Definamos la sucesión creciente de conjuntos  $D_n := \{x; \delta_D(x) \geq n^{-1}\}$  y consideremos las sucesiones de tiempos de paro  $(\tau_{D_n^\circ})$  y  $(\tau_{D_n})$ . Claramente  $(\tau_{D_n^\circ})$  y  $(\tau_{D_n})$  son sucesiones crecientes tales que  $\tau_{D_n^\circ} \leq \tau_{D_n} \leq \tau_D$  para toda  $n$ . Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{D_n} = \tau_D, \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.}, x \in D. \quad (15)$$

Para ver esto, es suficiente mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{D_n^\circ} = \tau_D$ ,  $\mathbb{P}_x\text{-c.s.}, x \in D$ . Sea  $\bar{\tau} := \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{D_n^\circ}$ . Puesto que  $\bar{\tau} \leq \tau_D$ , (15) es inmediato sobre el evento  $\{\bar{\tau} = \infty\}$ . Debido a que  $\bar{\tau} = \sup_n \tau_{D_n^\circ}$ , de la Proposición 2.1.3 se sigue que  $X(\tau_{D_n^\circ}) \notin D_n$  en el evento  $\{\bar{\tau} < \infty\}$ . Usando  $[H_2]$ , la continuidad de  $\delta_D(\bullet)$  y lo anterior, deducimos que  $\delta_D(X(\bar{\tau})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_D(X(\tau_{D_n^\circ})) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$ , y así  $X(\bar{\tau}) \notin D$  en el evento  $\{\bar{\tau} < \infty\}$ . Este hecho y la propiedad  $[H_4]$  prueban que  $\bar{\tau} > 0$ ,  $\mathbb{P}_x\text{-c.s.}, x \in D$  y consecuentemente  $\tau_D \leq \bar{\tau}$  en  $\{\bar{\tau} < \infty\}$ . Esto último concluye la prueba de (15). Utilizando ahora (15), el teorema de la convergencia monótona, la Proposición 3.1 y el Lema 4.2 obtenemos que, para cualesquiera  $B, C \in \mathcal{B}(D)$ ,

$$\begin{aligned} \int_B \int_C p_D(t, x, y) dx dy &= \int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t < \tau_D\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t < \tau_{D_n}\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t \leq \tau_{D_n}\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \mathbb{P}_x\{X(t) \in C, t \leq \tau_{D_n}\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \mathbb{P}_y\{X(t) \in C, t < \tau_{D_n}\} dy \\ &= \int_B \mathbb{P}_y\{X(t) \in C, t < \tau_D\} dy \\ &= \int_B \int_C p_D(t, y, x) dx dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $p_D(t, x, y) = p_D(t, y, x)$ ,  $m_\ell \otimes m_\ell\text{-c.d.q.}$  La continuidad de cada  $p_D(t, \bullet, \bullet)$  implica nuestro resultado. □

Puesto que  $\tau_D$  es un tiempo de paro y la filtración es continua a la derecha (ver [16, p. 75]), la ley cero-uno de Blumenthal nos dice que  $\mathbb{P}_x\{\tau_D = 0\} \in \{0, 1\}$  para toda  $x \in \mathbb{R}^d$ . Se dice que un punto  $x \in \mathbb{R}^d$  es **regular** para  $D^c$  cuando  $\mathbb{P}_x\{\tau_D = 0\} = 1$ . El conjunto de todos los puntos regulares a  $D^c$  es denotado por  $(D^c)^r$ . Por tanto  $(D^c)^r = \{x \in \mathbb{R}^d; \mathbb{P}_x\{\tau_D = 0\} = 1\}$ . Puede demostrarse que  $(D^c)^\circ \subseteq (D^c)^r \subseteq \overline{D^c}$  (ver [6, p. 62]). Se dice que el conjunto  $D$  es **regular** si  $\partial D \subseteq (D^c)^r$ . Así, en un conjunto regular, el proceso  $X$  abandona el conjunto  $D$  inmediatamente después del tiempo de salida, siempre que inicie su movimiento en cualquier punto de la frontera.

Suponga que  $D$  es un conjunto regular abierto. De la propiedad  $[H_4]$  se deduce que  $\mathbb{P}_x\{X(0) \in A\} = 1_A(x)$  para toda  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ . Luego, si  $x \in (D^c)^r$ , entonces

$$r(t, x, y) = \mathbb{E}_x\{p(t, X(0), y)\} = p(t, x, y), \quad t > 0, y \in \mathbb{R}^d.$$

Pero  $D^c$  es cerrado, por lo que  $D^c = (D^c)^\circ \cup \partial D \subseteq (D^c)^r \cup \partial D = (D^c)^r$ . La igualdad anterior y el Teorema 4.1.3 implican que  $p_D(t, x, y)$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$p_D(t, x, y) := \begin{cases} p(t, x, y) - r(t, x, y), & x, y \in D, \\ 0, & x \notin D \text{ o bien } y \notin D. \end{cases}$$

Los conjuntos regulares son importantes en teoría del potencial. Por ejemplo, se conoce que si  $D$  es un dominio regular y  $f \in C_b(D)$ , entonces la función  $u(x) = \mathbb{E}_x\{f(X(\tau_D))\}$ ,  $x \in \overline{D}$ , resuelve el problema de Dirichlet en el dominio  $D$ , es decir,  $u$  es armónica en  $D$ , continua en  $\overline{D}$  y  $u|_{\partial D} = f$ . La solución  $u$  puede interpretarse como el potencial electrostático en  $D$  cuando el potencial en la frontera está dado por  $f$  ([19, p. 474]).

## 5. Una aplicación a la teoría general de ecuaciones diferenciales parciales

En esta sección, presentamos una aplicación analítica de la densidad de transición de Dirichlet y sus propiedades, a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales.

Muchos procesos de reacción-difusión se pueden modelar matemáticamente mediante ecuaciones parabólicas. La importancia de dichos modelos radica en que presentan una relación matemática entre la tasa de variación temporal y la tasa de variación espacial de alguna magnitud física o química dependiendo del fenómeno. Un ejemplo de tales modelos es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= k(t)\mathcal{A}u(t, x) + h(t)\mathcal{R}(u(t, x)), \quad t > 0, x \in D, \\ u(0, x) &= f(x), \quad x \in D, u|_{D^c} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

donde  $D$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^d$ ,  $[0, \infty) \ni t \mapsto k(t) \in [0, \infty)$ ,  $[0, \infty) \ni t \mapsto h(t) \in [0, \infty)$  son continuas,  $[0, \infty) \ni u \mapsto \mathcal{R}(u) \in [0, \infty)$  es localmente Lipchitz,  $\mathcal{A}$  es un operador de difusión y la condición inicial  $f \in \text{Dom}(\mathcal{A})$  es no negativa.

Por ejemplo, cuando  $k(t) \equiv k > 0$ ,  $\mathcal{A} = \Delta|_D$  y  $h \equiv 0$ , el problema anterior se transforma en el problema lineal clásico del calor con condición de frontera. Un modelo no lineal y quizás poco conocido entre lectores matemáticos, es el modelo de Frank-Kamenetzky (adimensional), es decir, cuando  $k(t) \equiv 1$ ,  $\mathcal{A} = \Delta|_D$ ,  $h(t) \equiv \delta > 0$ ,  $\mathcal{R}(u) = e^u$  y  $f \equiv 0$ . La constante adimensional (llamada *constante de Frank-Kamenetzky*) es importante porque depende de muchos parámetros, por ejemplo, la densidad del material y su difusividad térmica. El modelo de Frank-Kamenetzky describe como evoluciona con el tiempo la temperatura de un material combustible, que fue sometido a un proceso de ignición inicial y cuya temperatura externa es constante. Para más detalles ver [5] y las referencias allí dadas. Sin embargo, este operador de difusión podría ser más general como hemos visto en los Ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3.

De la teoría de semigrupos se conoce que la solución  $u$  del problema de Cauchy (16), puede ser expresada en términos del sistema de evolución asociado al generador no autónomo  $k(t)\mathcal{A}$ . Veremos a continuación como la densidad de transición de Dirichlet  $p_D(t, x, y)$  permite construir este sistema

de evolución. Por esta razón, en la literatura de ecuaciones diferenciales parciales, se conoce a la densidad de transición de Dirichlet  $p_D(t, x, y)$  como **kernel de calor de Dirichlet**.

En lo que sigue suponemos que  $D$  es abierto,  $\text{Dom}(\mathcal{A}) \subseteq L^2(D)$  y denotamos por  $\langle f, g \rangle$  a la integral  $\int_D f(x)g(x) dx$ . Recuerde que  $L^2(D)$  es un espacio de Hilbert respecto al producto interno  $\langle \bullet, \bullet \rangle$ .

Para cada  $f \in L^\infty(D)$ , definamos

$$S_D(t)f(x) := \int_D f(y)p_D(t, x, y) dy, \quad t > 0, x \in D$$

y sea  $S_D(0)f(x) := f(x)$ ,  $x \in D$ . La familia de operadores  $(S_D(t); t \geq 0)$  forma un semigrupo fuertemente continuo en  $L^2(D)$ . Sin embargo, para demostrar esto, acorde con el Lema 1.4.3 en [18, p. 30], necesitamos el siguiente resultado preliminar.

**Lema 5.1.** *Para cada  $f \in C_c(D)$  se tiene que  $\lim_{t \downarrow 0} S_D(t)f(x) = f(x)$ ,  $x \in D$ .*

*Demostración.* Es bien conocido que toda función en  $C_c(D)$  es uniformemente continua, por lo que, si  $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; |x - y| \leq \delta\}$ , entonces  $\lim_{\delta \downarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$ . Sean  $\delta > 0$  y  $x \in D$ . Nótese que

$$\begin{aligned} |S_D(t)f(x) - f(x)| &= |S_D(t)f(x) - f(x)\mathbb{P}_x\{t < \tau_D\} + f(x)\mathbb{P}_x\{t < \tau_D\} - f(x)| \\ &\leq \int_D |f(x) - f(y)|p_D(t, x, y) dy + \|f\|_\infty \mathbb{P}_x\{\tau_D \leq t\} \\ &\leq \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}_x\{1_{(-\delta, \delta)^c}(X(t) - X(0)); X(0) = x\} \\ &\quad + \|f\|_\infty \mathbb{P}_x\{\tau_D \leq t\}, \end{aligned}$$

donde hemos usado  $[H_4]$  en la última desigualdad. Debido a la propiedad  $[H_1]$  y a la Proposición 2.1.2 se sigue que

$$\limsup_{t \downarrow 0} |S_D(t)f(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta).$$

Haciendo  $\delta \downarrow 0$  se obtiene la prueba de este lema. □

**Teorema 5.1.** *La familia de operadores  $(S_D(t); t \geq 0)$  forma un semigrupo auto-adjunto de contracciones fuertemente continuo en  $L^2(D)$ .*

*Demostración.* Veamos primero que  $(S_D(t); t \geq 0)$  tiene la propiedad de semigrupo. En efecto, sean  $f \in L^2(D)$  y  $s, t \geq 0$ . Usando la propiedad de Chapman-Kolmogorov (ver Teorema 4.1.1)

$$\begin{aligned} S_D(s+t)f(x) &= \int_D f(u) \left[ \int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, u) dz \right] du \\ &= \int_D \left[ \int_D f(u)p_D(t, z, u) du \right] p_D(s, x, z) dz \\ &= \int_D S_D(t)f(z)p_D(s, x, z) dz \\ &= S_D(s)S_D(t)f(x), \end{aligned}$$

lo cual muestra nuestra afirmación. Probamos ahora que cada  $S_D(t)$  es auto-adjunto. Sean  $f, g \in L^2(D)$  y  $t \geq 0$ . Entonces aplicando el Teorema 4.1.3, se sigue que

$$\begin{aligned}\langle S_D(t)f, g \rangle &= \int_D \left[ \int_D f(y) p_D(t, x, y) dy \right] g(x) dx \\ &= \int_D f(y) \left[ \int_D g(x) p_D(t, y, x) dx \right] dy \\ &= \langle f, S_D(t)g \rangle.\end{aligned}$$

A continuación mostramos que cada  $S_D(t)$  es un operador de contracción en  $L^2(D)$ . Hemos visto que cada  $p_D(t, x, \bullet)$  es una densidad de transición. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con respecto a la medida  $p_D(t, x, y) dy$ , el hecho de que cada  $S_D(t)$  es un operador auto-adjunto, la propiedad de semigrupo y que  $p_D(t, x, y) \leq p(t, x, y)$  obtenemos que

$$\begin{aligned}\|S_D(t)f\|_2 &\leq \sqrt{\langle S_D(t)1, S_D(t)|f|^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle S_D(t)S_D(t)1, |f|^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle S_D(2t)1, |f|^2 \rangle} \\ &\leq \|f\|_2,\end{aligned}$$

como se afirmaba. Finalmente mostramos que  $(S_D(t); t \geq 0)$  es fuertemente continuo en  $L^2(D)$ . Lo anterior es consecuencia inmediata de [18, p. 30, Lema 1.4.3] y el hecho de que  $C_c(D)$  es denso en  $L^2(D)$ . Sin embargo, presentaremos con detalle la prueba de esta afirmación. En efecto, puesto que cada  $S_D(t)$  es una contracción en  $L^2(D)$ , se tiene que

$$\|S_D(t)f - f\|_2^2 \leq 2\|f\|_2^2 - 2\langle S_D(t)f, f \rangle, \quad f \in L^2(D).$$

Se sigue de esto, el Lema 5.1 y el teorema de la convergencia dominada que

$$\lim_{t \downarrow 0} \|S_D(t)f - f\|_2 = 0, \quad f \in C_c(D). \quad (17)$$

Sea  $f \in L^2(D)$ . Debido a la densidad de  $C_c(D)$  en  $L^2(D)$ , para cada  $\varepsilon > 0$  podemos fijar  $f_\varepsilon \in C_c(D)$  tal que  $\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon/2$ . Usando nuevamente que cada  $S_D(t)$  es una contracción en  $L^2(D)$  se deduce que  $\|S_D(t)f - f\|_2 \leq \varepsilon + \|S_D(t)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_2$ . Luego, de (17) concluimos que

$$\limsup_{t \downarrow 0} \|S_D(t)f - f\|_2 \leq \varepsilon.$$

La arbitrariedad de  $\varepsilon > 0$  muestra el resultado y consecuentemente finaliza la demostración.  $\square$

Veamos ahora como el semigrupo permite obtener una expresión de la solución  $u$  de (16). Para esta parte es suficiente tener presente las propiedades básicas de semigrupos de operadores y sus generadores (ver por ejemplo [25, Capítulo 1]). Sean  $K(t, s) := \int_s^t k(r) dr$ ,  $t, s \geq 0$  y  $U(t, s)f := S(K(t, s))f$ ,  $f \in L^\infty(D)$ . Del Teorema 5.1, es inmediato que  $(U_D(t, s); t \geq s \geq 0)$  es un sistema de evolución (ver [25, Definición 5.3, p. 129]) de contracciones en  $L^2(D)$ . Es fácil ver que si  $v \in \text{Dom}(\mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{A}$  es el generador infinitesimal  $(S_D(t); t \geq 0)$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} U_D(t, s)v(t, x) = k(t)\mathcal{A}U_D(t, s)v(t, x)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial s} U_D(t, s)v(s, x) = -U_D(t, s)k(s)\mathcal{A}v(s, x). \quad (18)$$

Sea  $u$  una solución (clásica) de (16) y sea  $v(t, x) := U_D(t, s)u(s, x)$ ,  $s \in [0, t]$ ,  $x \in D$ . Luego,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= U_D(t, 0)f(x) + v(t, x) - v(0, x) \\ &= U_D(t, 0)f(x) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial s}(s, x) ds \\ &= U_D(t, 0)f(x) + \int_0^t \left[ -U_D(t, s)k(s)\mathcal{A}u(s, x) + U_D(t, s)\frac{\partial u}{\partial s}(s, x) \right] ds, \end{aligned}$$

donde hemos usado (18) en la última igualdad. Puesto que  $u$  satisface (16) concluimos de lo anterior que  $u$  satisface la ecuación integral

$$u(t, x) = U_D(t, 0)f(x) + \int_0^t h(s)U_D(t, s)\mathcal{R}(u(s, x)) ds, \quad t \geq 0, x \in D. \quad (19)$$

Cualquier solución de la ecuación integral (19) se le llama **solución mild** de (16). Nótese que si  $p_D(s, x, t, y) := p_D(K(t, s), x, y)$ ,  $t \geq s \geq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , entonces (19) queda expresada de la siguiente manera:

$$u(t, x) = \int_D f(y)p_D(s, x, t, y) dy + \int_0^t \int_D h(s)\mathcal{R}(u(s, y))p_D(s, x, t, y) dy ds \quad t \geq 0, x \in D.$$

Por tanto conocer propiedades y estimaciones del kernel de calor de Dirichlet  $p_D(t, x, y)$ , permite entender el comportamiento de la solución mild.

La importancia de la solución mild radica en que ha permitido obtener descripciones cualitativas del comportamiento asintótico de la solución  $u$  del modelo (16). Por ejemplo, se conoce que la solución  $u$  del problema (16) podría manifestar el fenómeno de **explosión en tiempo finito**, el cual se presenta cuando el valor de la solución diverge a infinito tras un cierto intervalo de existencia. Específicamente, se dice que  $u$  explota en un tiempo finito  $t_e > 0$  si

$$\lim_{t \uparrow t_e} \|u(t, \cdot)\|_\infty = \infty.$$

En caso contrario se dice que  $u$  **no explota en tiempo finito o que está globalmente definida**. Determinar bajo que condiciones ocurre este fenómeno se llama **estudio de la explosión**. Como hemos visto, toda solución (clásica) de (16), es una solución mild. Luego, realizar un estudio de la explosión de la solución mild implica determinar bajo que condiciones ocurre o no ocurre la explosión en tiempo finito de la solución de (16). Esta idea ha sido explotada desde hace años por diferentes autores como puede ser consultado en [8, 9, 10, 22, 23] y las referencias dadas en dichos trabajos.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se han presentado demostraciones de propiedades elementales del kernel de calor de Dirichlet para una clase bastante general de procesos de Markov simétricos. Como fue expuesto en los ejemplos, esta clase incluye procesos cuyos generadores asociados surgen en varios modelos matemáticos. El estudio del comportamiento asintótico de soluciones de modelos con condiciones de frontera de Dirichlet de la forma (16), depende del conocimiento de las propiedades del kernel de calor de Dirichlet, el cual posee una forma general no trivial (véase (12)).

En la actualidad no existen muchas fuentes bibliográficas que presenten demostraciones detalladas de las propiedades básicas del kernel de calor de Dirichlet para procesos de Markov simétricos

discontinuos y las que existen se basan en estimaciones del kernel de calor del proceso de Markov simétrico dado. De aquí, la importancia de la difusión de tales pruebas, ya que también demuestran la trascendencia de las técnicas probabilistas en el estudio de un objeto matemático con tal generalidad.

## 7. Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros anónimos por su cuidadosa revisión y comentarios, los cuales contribuyeron en la mejora de este artículo. El autor M.J. Ceballos-Lira agradece al SECIHTI por la beca otorgada en el marco de la convocatoria “Estancias Posdoctorales por México para la formación y Consolidación de las y los Investigadores por México 2022”.

## 8. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

## 9. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.



## Referencias

- [1] S. Abe and S. Thurner, “Anomalous diffusion in view of Einstein’s 1905 theory of Brownian motion”, *Phys. A.*, vol. 356, pp. 403–407, 2005, doi: 10.1016/j.physa.2005.03.035.
- [2] D. Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] J. Bae, J. Kang, P. Kim P and J. Lee, “Heat kernel estimates for symmetric jump processes with mixed polynomial growths”, *Ann. Probab.*, vol. 5, no. 49, pp. 2830–2868, 2019, doi: 10.1214/18-AOP1323.
- [4] R. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*. Springer New York, NY, 1995.
- [5] D. Bebernes and D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*. Springer New York, 1989.
- [6] R. Blumenthal and R. Gettoor, *Markov processes and potential theory*. Academic Press, 1968.
- [7] J.-P. Bouchaud and A. Georges, “Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications”, *Phys. Rep.*, vol. 195, pp. 127–293, 1990, doi: 10.1016/0370-1573(90)90099-N.
- [8] M.J. Ceballos-Lira and A. Pérez, “Blow up and globality of solutions for a nonautonomous semilinear heat equation with Dirichlet condition”, *Rev. Colomb. Mat.*, vol. 53, no. 1, pp. 57–72, 2019, doi: 10.15446/recolma.v53n1.81042.

- [9] M.J. Ceballos-Lira and A. Pérez, “Global solutions and blowing-up solutions for a nonautonomous and non local in space reaction-diffusion system with Dirichlet boundary conditions”, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, vol. 23, no. 4, pp. 1025–1053, 2020, doi: 10.1515/fca-2020-0054.
- [10] M.J. Ceballos-Lira and A. Pérez, “Blow up and non-blow up of a reaction-diffusion system with time-dependent Lévy generators and reactions of class  $H$ ”, *Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, vol. 22, pp. 451–472, 2025, doi: 10.30757/ALEA.v22-16.
- [11] Z.-Q. Chen, P. Kim and R. Song, “Dirichlet heat kernel estimates for  $\Delta + \Delta^{\alpha/2}$  in  $C^{1,1}$  open sets”, *J. Lond. Math. Soc.* vol. 54, no. 4, pp. 1357–1392, 2010, doi: 10.1112/jlms/jdq102.
- [12] Z.-Q. Chen, P. Kim and R. Song, “Dirichlet heat kernel estimates for  $\Delta^{\alpha/2} + \Delta^{\beta/2}$ ”, *Illinois J. Math.*, vol. 84, no. 2, pp. 1357–1392, 2011, doi: 10.1215/ijm/1348505533.
- [13] Z.-Q. Chen and T. Kumagai, “A priori Hölder estimate, parabolic Harnack principle and heat kernel estimates for diffusions with jumps”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, vol. 26, no. 2, pp. 551–589, 2010, doi: 10.4171/RMI/609.
- [14] Z.-Q. Chen and R. Song, “Intrinsic Ultracontractivity and conditional gauge for symmetric stable processes”, *J. Funct. Anal.*, vol. 150, pp. 204–239, 1997, doi: 10.1006/jfan.1997.3104.
- [15] K.L. Chung and Z. Zhao, *From brownian motion to Schrödinger’s equation*. Springer Berlin, Heidelberg, 1995.
- [16] K.L. Chung and J.B. Walsh, *Markov processes, brownian motion, and time symmetry*. Springer New York, NY, 2005.
- [17] G.B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, 2<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, 1995.
- [18] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*. Berlin, New York: De Gruyter, 1994.
- [19] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 2<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag, 2002.
- [20] P. Kim and R. Song, “Boundary behavior of harmonic functions for truncated stable processes”, *J. Theor. Probab.*, vol. 21, pp. 287–321, 2008, doi: 10.1007/s10959-008-0145-y.
- [21] P. Kim and R. Song, “Boundary Harnack principle for Brownian motions with measure-valued drifts in bounded Lipschitz domains”, *Math. Ann.*, vol. 339, pp. 135–174, 2009, doi: 10.1007/s00208-007-0110-6.
- [22] J.A. López-Mimbela and A. Pérez, “Global and nonglobal solutions of a system of nonautonomous semilinear equations with ultracontractive Lévy generators”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 423, no. 1, pp. 720–733, 2015, doi: 10.1016/j.jmaa.2014.10.025
- [23] A. Pérez, “Global existence and blow-up for nonautonomous systems with non-local symmetric generators and Dirichlet conditions”, *Diff. Equ. Appl.*, vol. 7, no. 2, pp. 263–275, 2015, doi: 10.7153/dea-07-15.
- [24] S.C. Port and C.J. Stone, *Brownian motion and classical potential theory*. Academic Press, Inc., 1978.

- [25] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York, Inc., 1983.
- [26] R.L. Schilling and T. Uemura, “On the Feller property of Dirichlet forms generated by pseudo differential operators”, *Tohoku Math. J.*, vol. 59, pp. 401–422, 2007, doi: 10.2748/tmj/1192117985.
- [27] J. Vázquez, “Recent progress in the theory of nonlinear diffusion with fractional Laplacian operators”, *Discrete contin. Dyn. Syst.*, vol. 7, no. 4, pp. 857–885, 2014, doi: 10.3934/dcdss.2014.7.857.
- [28] J. Villa Morales, Introducción a la medida e integración. Textos Universitarios, Ciencias Básicas, UAA, 2005.

# Deducción de las ecuaciones de Maxwell mediante la prueba de Feynman-Dayson y su generalización relativista.

Arias-Jiménez, S. A.<sup>1</sup> , López-Arellano, C.M.<sup>2</sup>, Manuel-Cabrera, J.<sup>1,\*</sup> , Paulin Fuentes, J.M.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, c.p. 86690, Km. 1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, Col. La Esmeralda, Cunduacán, Tabasco, México.*

<sup>2</sup>*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla., Apartado Postal J-48 72570, Puebla, Puebla, Mexico.*

\*jaime.manuel@ujat.mx

---

## Resumen

Este trabajo ofrece una reconstrucción detallada y conceptualmente clara de la deducción de Feynman de las ecuaciones de Maxwell, basada en la segunda ley de Newton y en el uso de corchetes de Poisson entre coordenadas y velocidades en un espacio euclídeo. Aunque motivado pedagógicamente, nuestro enfoque es rigurosamente técnico y clarifica los supuestos fundamentales que subyacen tanto en la deducción original como en su extensión relativista. Comenzamos revisando la ley de la fuerza de Lorentz en un marco euclídeo clásico, para luego reformularla de manera covariante utilizando el cálculo tensorial en el espacio de Minkowski, incorporando la prescripción de acoplamiento mínimo tal como fue establecida formalmente por Montesinos y Perez-Lorenzana. Su contribución permite reconciliar la prueba de Feynman con una aplicación general y sistemática del principio de acoplamiento mínimo.

**Palabras claves:** *Ecuaciones de Maxwell, Corchetes de Poisson, Prueba de Feynman-Dayson, Acoplamiento mínimo.*

## Abstract

This work offers a detailed and conceptually transparent reconstruction of Feynman's derivation of Maxwell's equations, based on Newton's second law and the use of Poisson brackets between coordinates and velocities in Euclidean space. While pedagogically motivated, our approach is technically rigorous and clarifies the foundational assumptions underlying both the original and relativistic versions of the derivation. We begin by revisiting the Lorentz force law in a classical Euclidean framework and then reformulate it covariantly using Minkowskian tensor calculus, incorporating the minimal coupling prescription as formally established by Montesinos and Perez-Lorenzana. Their contribution highlights how Feynman's proof can be reconciled with a general and systematic application of the minimal coupling principle.

**Keywords:** *Maxwell's equations, Poisson brackets, Feynman-Dyson proof, Minimal coupling.*

---

Recibido: 27 de julio de 2025. Aceptado: 28 de noviembre de 2025. Publicado: 12 de diciembre de 2025.

## 1. Introducción

La demostración de las ecuaciones de Maxwell a partir de principios mecánico-cuánticos, originalmente atribuida a Richard Feynman y difundida por Freeman J. Dyson en 1989 [1], representa un enfoque novedoso para conectar la dinámica de partículas con la teoría electromagnética clásica. En su trabajo, Dyson mostró que, partiendo de la segunda ley de Newton y las relaciones de conmutación canónica, era posible derivar las ecuaciones fundamentales que gobiernan los campos eléctricos y magnéticos, así como la fuerza de Lorentz que actúa sobre partículas cargadas. Este planteamiento abrió un nuevo camino para entender la teoría electromagnética desde una perspectiva basada en principios mecánicos subyacentes.

El impacto de esta demostración generó múltiples discusiones críticas y extensiones en la literatura científica. Por un lado, autores como Farquhar [3], Dombey [7] y Moreira [8] señalaron limitaciones conceptuales y técnicas, particularmente en cuanto a la justificación de ciertos supuestos implícitos, como la estructura espacio-temporal y la dependencia de postulados específicos de la mecánica cuántica. Estas críticas fomentaron un análisis más riguroso y una búsqueda de condiciones en las que el argumento fuese válido.

Paralelamente, otros investigadores profundizaron en la generalización y formalización del método. Tanimura [4] realizó una extensión relativista y adaptó el esquema a teorías de gauge no abelianas, utilizando herramientas avanzadas del formalismo de operadores y la teoría cuántica de campos. Land, Shnerb y Horwitz [5] exploraron la conexión del enfoque de Feynman con los fundamentos de la teoría de gauge, destacando la importancia de las estructuras algebraicas y geométricas involucradas. Más recientemente, Montesinos y Pérez-Lorenzana [6] reformularon la demostración desde el principio de acoplamiento mínimo, clarificando el papel de la simetría gauge y la covarianza en la deducción de las ecuaciones de Maxwell.

Adicionalmente, investigaciones como la de Vaidya y Farina [2] cuestionaron la coexistencia coherente de las ecuaciones de Maxwell con la mecánica galileana, poniendo en evidencia la necesidad de la relatividad especial para un marco conceptual consistente. En un plano más formal, Bracken [9] estudió la estructura de corchetes de Poisson asociada al problema de Feynman, evidenciando vínculos profundos entre la formulación clásica y la cuántica, así como la geometría simpléctica subyacente.

En conjunto, estos trabajos han consolidado y enriquecido la comprensión del enfoque de Feynman-Dyson, situándolo como un puente conceptual importante entre la mecánica, la teoría de gauge y el electromagnetismo clásico, además de ofrecer nuevas perspectivas para su generalización a contextos relativistas y no abelianos.

Este trabajo presenta una reconstrucción sistemática y conceptualmente rigurosa de la deducción de las ecuaciones de Maxwell basada en principios mecánicos y geométricos, originalmente propuesta por Feynman. Aunque el enfoque tiene un espíritu pedagógico, se desarrolla con detalle técnico y busca clarificar los supuestos fundamentales que subyacen en el argumento original de Feynman y en sus extensiones relativistas y geométricas. Se revisa primero la deducción de la fuerza de Lorentz a partir de los corchetes de Poisson en un espacio euclídeo, y luego se reformula de manera covariante utilizando un formalismo tensorial compatible con la geometría de Minkowski.

Este artículo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 se revisa el procedimiento de Feynman-Dyson para deducir la forma de la fuerza de Lorentz y de las ecuaciones homogéneas. En la Sección 3 se presenta la extensión relativista de este enfoque en el espacio-tiempo plano de Minkowski, enfatizando el papel del tensor electromagnético y de los corchetes covariantes. En la sección 4 se introducen las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell prestando especial atención al concepto del acoplamiento mínimo. Mientras que finalmente, en la sección 5 se presentan algunas observaciones y posibles direcciones futuras de investigación.

## 2. Deducción de Feynman-Dyson de las ecuaciones de Maxwell.

El procedimiento propuesto por Feynman y presentado por Dyson [1] parte de una hipótesis central: asumir que existen corchetes de Poisson bien definidos entre las posiciones  $x_i$  y las velocidades  $\dot{x}_i$  de una partícula en un espacio euclídeo tridimensional, con las siguientes propiedades fundamentales

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (1)$$

$$m[x_i, \dot{x}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, que vale 1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ . Estas relaciones son análogas a las relaciones de conmutación canónicas en mecánica cuántica, con la diferencia de que se plantean en un marco clásico mediante corchetes de Poisson.

A partir de la segunda ley de Newton

$$m\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t). \quad (3)$$

y combinando esta relación con otras propiedades de los corchetes (ver apéndice), así como utilizando las reglas introducidas anteriormente (1)-(2), podemos deducir las siguientes expresiones

$$[x_i, f(x_j)] = 0, \quad (4)$$

lo que indica que la posición conmuta con cualquier función de posición, y también

$$[x_i, f(\dot{x}_j)] = \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}, \quad (5)$$

que nos muestra cómo la posición se relaciona con funciones de velocidad, y

$$[\dot{x}_i, f(x_j)] = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (6)$$

que indica la relación inversa para la velocidad con funciones de posición. Estas expresiones serán muy importantes para los cálculos que haremos.

### 2.1. Fuerza de Lorentz.

A partir de la segunda ley de Newton (3), queremos deducir la forma de  $F_i$ . Para ello, diferenciamos en el tiempo el corchete de la ecuación (2)

$$m \frac{d}{dt} [x_i, \dot{x}_j] = m [\dot{x}_i, \dot{x}_j] + m [x_i, \ddot{x}_j] = \frac{d}{dt} (i\hbar\delta_{ij}) = 0. \quad (7)$$

Recordando que, la fuerza está dada por (3), sustituimos esta expresión en (7), obteniendo

$$m [\dot{x}_i, \dot{x}_j] = -[x_i, F_j]. \quad (8)$$

*Interpretación:* la no conmutatividad entre las velocidades introduce un término proporcional a  $[x_i, F_j]$ , el cual, debido a la propiedad de antisimetría del corchete de Poisson, satisface la relación

$$[x_i, F_j] = -[x_j, F_i]. \quad (9)$$

Esto indica que dicho término posee una estructura antisimétrica en los índices espaciales. Para capturar esta característica de manera explícita, resulta natural introducir un nuevo campo antisimétrico, el cual puede, en principio, depender tanto de las coordenadas como de las velocidades. Para capturar de manera general esta estructura, introducimos un nuevo campo antisimétrico  $M_{ij}$ , y suponemos que existe una constante de proporcionalidad  $a$  tal que

$$[x_i, F_j] = aM_{ij}. \quad (10)$$

Donde sea  $M_{ij}$  una matriz antisimétrica de  $3 \times 3$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & 0 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

La constante  $a$  se introduce como un factor dimensional que permite mantener general la relación entre el conmutador (10) y (11), facilitando su identificación posterior con cantidades físicas conocidas. Este enfoque también permite que  $a$  absorba posibles factores constantes que surjan en el cálculo, y será determinado más adelante al comparar expresiones explícitas para el conmutador.

Definimos ahora un vector  $H_k$  tal que

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{123}H_3 & \epsilon_{132}H_2 \\ \epsilon_{213}H_3 & 0 & \epsilon_{231}H_1 \\ \epsilon_{312}H_2 & \epsilon_{321}H_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Esto nos permite escribir:

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}H_k. \quad (13)$$

Por lo tanto, se puede expresar

$$[x_i, F_j] = a\epsilon_{ijk}H_k. \quad (14)$$

Utilizando los resultados anteriores, en particular la ecuación (5), podemos reescribir la ecuación (14) como

$$[x_i, F_j] = \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i} = a\epsilon_{ijk}H_k, \quad (15)$$

de donde se obtiene

$$\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{ijk}H_k. \quad (16)$$

Cambiando el índice  $j$  por  $i$  en (16) y multiplicando por  $d\dot{x}_l$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_l} d\dot{x}_l = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{lik}H_k d\dot{x}_l, \quad (17)$$

$$dF_i = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{lik}H_k d\dot{x}_l, \quad (18)$$

renombrando el índice ( $l \rightarrow j$ ) en (18)

$$dF_i = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{jik}H_k d\dot{x}_j. \quad (19)$$

Integrando esta relación con respecto a  $\dot{x}_j$

$$F_i = \frac{m}{i\hbar} a \epsilon_{jik} H_k \dot{x}_j + C_i(x, t), \quad (20)$$

y ajustando la constante  $a = -\frac{i\hbar}{m}$ . Este valor de  $a$  no solo ajusta la dimensión correcta de la relación, sino que también garantiza que la fuerza  $F_i$  adopte la forma esperada

$$F_i = -\epsilon_{jik} H_k \dot{x}_j + C_i. \quad (21)$$

La determinación de la constante  $a$  queda plenamente justificada, tanto dimensional como conceptualmente, habilitando la identificación de los campos físicos  $E_i(x, t)$  y  $H_i(x, t)$ . Al identificar  $C_i(x, t) = E_i(x, t)$ , la fuerza adquiere la forma

$$F_i = E_i + \epsilon_{ijk} \dot{x}_j H_k. \quad (22)$$

que coincide con la ley de Lorentz. De esta manera, queda establecido que  $E_i$  y  $H_i$  son los campos que rigen la dinámica de una carga sometida a interacciones electromagnéticas según las relaciones de conmutación.

## 2.2. Divergencia del campo magnético.

Continuando con las deducciones, ahora abordamos la inexistencia del monopolio magnético. Para ello, retomemos la ecuación (15)

$$[x_i, F_j] = -\frac{i\hbar}{m} \epsilon_{ijk} H_k. \quad (23)$$

Esta expresión es fundamental y constituirá el punto de partida para los desarrollos posteriores. Si ahora calculamos el conmutador de (23) con  $x_k$ , se obtiene

$$[x_k, [x_i, F_j]] = -\frac{i\hbar}{m} \epsilon_{ijl} [x_k, H_l]. \quad (24)$$

Aplicando la identidad de Jacobi<sup>1</sup>, tenemos

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] + [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, x_i]] + [\dot{x}_k, [x_i, \dot{x}_j]] = 0. \quad (25)$$

Observando el tercer término en (25), notamos su similitud con la ecuación (2). Aplicando el conmutador con  $\dot{x}_k$  al lado izquierdo de (2), se obtiene

$$[\dot{x}_k, [x_i, \dot{x}_j]] = [\dot{x}_k, \frac{1}{m} i\hbar \delta_{ij}] = 0. \quad (26)$$

De manera análoga, el segundo término de la identidad de Jacobi resulta ser 0. Esto deja únicamente el primer término

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = 0, \quad (27)$$

resultado que será fundamental para las interpretaciones físicas posteriores.

Recordando la ecuación (8), podemos conmutarla con  $x_k$  para obtener

$$[x_i, [x_j F_k]] = -m [x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = 0. \quad (28)$$

Este resultado puede sustituirse directamente en la ecuación (24), lo que nos lleva a

---

<sup>1</sup>  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$

$$[x_i, [x_j, F_k]] = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{jkl}[x_i, H_l] = 0. \quad (29)$$

De aquí se deduce que

$$[x_i, H_l] = 0. \quad (30)$$

Lo que significa que  $H$  es una función solo de  $x$  y  $t$ .

Otro resultado útil para nuestra demostración se obtiene al sustituir la forma propuesta para la fuerza de Lorentz en la ecuación (23)

$$[x_i, E_j + \epsilon_{jlk}\dot{x}_l H_k] = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (31)$$

Aplicando la propiedad de linealidad del conmutador (ver apéndice), la ecuación anterior se reescribe como

$$[x_i, E_j] + [x_i, \epsilon_{jlk}\dot{x}_l H_k] = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (32)$$

Analizando el segundo término del lado izquierdo en (32), aplicamos nuevamente la linealidad

$$\epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l H_k] = \epsilon_{jlk}([x_i, \dot{x}_l]H_k + [x_i, H_k]\dot{x}_l). \quad (33)$$

De acuerdo con (30), sabemos que  $[x_i, H_k] = 0$ , por lo que el segundo término en (33) desaparece, con lo que queda

$$\epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l H_k] = \epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l]H_k. \quad (34)$$

Sustituyendo ahora (2) en la expresión anterior, se obtiene

$$\epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l H_k] = \epsilon_{jlk}\left(\frac{i\hbar}{m}\delta_{il}\right)H_k = \epsilon_{jik}\frac{i\hbar}{m}H_k. \quad (35)$$

Sustituyendo en (32) los resultado de 35, obtenemos

$$[x_i, E_j] + \epsilon_{jik}\frac{i\hbar}{m}H_k = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (36)$$

obtenemos

Sustituyendo este resultado en (31), obtenemos

$$[x_i, E_j] = 0, \quad (37)$$

lo que indica que el campo eléctrico  $E$  también depende únicamente de  $x$  y  $t$ .

Regresando a la ecuación (23), la reescribimos como

$$m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = \frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (38)$$

multiplicando (38) en ambos lados por  $\epsilon_{ijl}$ , se obtiene

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}H_k = \frac{m^2}{i\hbar}\epsilon^{ijl}[\dot{x}_i, \dot{x}_j], \quad (39)$$

$$2\delta_k^l H_k = \frac{m^2}{i\hbar}\epsilon_{ijl}[\dot{x}_i, \dot{x}_j], \quad (40)$$

$$H_l = \frac{m^2}{2i\hbar}\epsilon_{ijl}[\dot{x}_i, \dot{x}_j] \quad (41)$$

Si ahora conmutamos (41) con  $\dot{x}_k$

$$[\dot{x}_k, H_k] = -\frac{im^2}{2\hbar}\epsilon_{ijk}[x_k, [\dot{x}_i, \dot{x}_j]]. \quad (42)$$

Nuevamente, aplicando la identidad de Jacobi

$$[x_k, [\dot{x}_i, \dot{x}_j]] = 0, \quad (43)$$

lo que finalmente implica

$$[\dot{x}_k, H_k] = 0. \quad (44)$$

Según la expresión (6), este conmutador se interpreta como

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (45)$$

es decir, la **ecuación de Maxwell para la divergencia del campo magnético**, lo cual completa la demostración de la inexistencia del monopolito magnético.

### 2.3. Ley de Faraday.

Para facilitar el desarrollo de los cálculos, partimos directamente de la ecuación (41). Si derivamos esta expresión con respecto al tiempo, obtenemos

$$\frac{d}{dt}H_k = -\frac{im^2}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\frac{d}{dt}[\dot{x}_i, \dot{x}_j]. \quad (46)$$

Sabemos que, por definición, el lado izquierdo de la ecuación se puede expresar como

$$\frac{d}{dt}H_k = \frac{\partial H_k}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial H_k}{\partial x_m}. \quad (47)$$

Ahora nos enfocamos en el lado derecho de la ecuación (46). Utilizando la relación entre la aceleración y la fuerza, se tiene:

$$-\frac{im^2}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\frac{d}{dt}[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[F_i, \dot{x}_j]. \quad (48)$$

Sustituyendo la expresión de la fuerza de Lorentz (22), se obtiene:

$$-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[F_i, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i + \epsilon_{imn}\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j]. \quad (49)$$

Analizando únicamente el lado derecho de la ecuación anterior, y aplicando las propiedades del conmutador, se llega a

$$-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i + \epsilon_{imn}\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i, \dot{x}_j] - \frac{im}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}[\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j]. \quad (50)$$

Aplicando la regla de Leibniz II (indicada en el apéndice como ecuación 112), y simplificando los términos, podemos escribir:

$$-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i + \epsilon_{imn}\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j] = -\epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \dot{x}_j \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \dot{x}_k \frac{\partial H_j}{\partial x_j}. \quad (51)$$

Sustituyendo las expresiones de los lados izquierdo y derecho en la ecuación (46), se obtiene:

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial H_k}{\partial x_m} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \dot{x}_j \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \dot{x}_k \frac{\partial H_j}{\partial x_j}. \quad (52)$$

De acuerdo con las propiedades deducidas en secciones anteriores, sabemos que el tercer término del lado derecho se cancela debido a imponer la ecuación (45). Además, los segundos términos de ambos lados de la ecuación (52) se anulan. Por lo tanto, queda la siguiente igualdad

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j}. \quad (53)$$

Esta expresión es equivalente a:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (54)$$

que corresponde a la Ley de Faraday, como se quería demostrar.

### 3. Formulación relativista especial.

Tomando en cuenta que previamente hemos deducido las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell utilizando de manera explícita la versión galileana de la ley de Lorentz en combinación con una estructura cuántica basada en los corchetes de Poisson, es decir, una formulación que entrelaza las descripciones clásica y cuántica como en la prueba de Feynman [2], [3], surge ahora una nueva consideración. Al trabajar en un espacio plano de naturaleza clásica, una de las debilidades de dicha derivación es la ausencia de covarianza de Lorentz de forma manifiesta. Por este motivo, resulta natural proponer una versión relativista especial del mismo razonamiento [4], [5].

Consideremos entonces una partícula relativista de masa en reposo  $m$  en un marco inercial, sometida a una fuerza externa tal que su momento generalizado satisface la regla de acoplamiento mínimo. Siguiendo el desarrollo detallado presentado en [6], partimos de una partícula que se mueve en un espacio-tiempo de Minkowski, cuyas coordenadas describimos como

$$x^\mu(\tau), \quad \mu = 0, 1, \dots, d-1, \quad (55)$$

donde  $\tau$  es un parámetro.

El momento canónico incorpora la contribución del campo electromagnético a través del potencial  $A_\mu$ , lo que nos permite escribir

$$\pi_\mu = m\dot{x}_\mu + A_\mu(x, \pi). \quad (56)$$

Establecemos ahora la notación para las derivadas respecto al tiempo propio  $\tau$  y las coordenadas canónicas de una función  $f(x, \pi)$  en el espacio de fases

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{d\tau}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \bar{\partial}^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \pi_\mu}. \quad (57)$$

El corchete de Poisson en su formulación relativista toma la forma

$$\{f, g\} \equiv \eta_{\rho\sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial x^\rho} \frac{\partial g}{\partial \pi^\sigma} - \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \frac{\partial f}{\partial \pi^\sigma} \right) = \eta_{\rho\sigma} (\partial^\rho f \bar{\partial}^\sigma g - \partial^\rho g \bar{\partial}^\sigma f). \quad (58)$$

Gracias a la presencia explícita de la métrica de Minkowski  $\eta_{\rho\sigma}$ , este corchete es covariante bajo transformaciones de Lorentz, propiedad fundamental que lo distingue del caso galileano.

Con todo lo anterior establecido, procedamos a calcular el corchete  $\{x_\mu, \dot{x}_\nu\}$ . Para ello, partimos del despeje de la velocidad a partir de la expresión del momento canónico

$$\dot{x}_\nu = \frac{1}{m}(\pi_\nu - A_\nu(x, \pi)). \quad (59)$$

Al aplicar el corchete con  $x_\nu$ , se obtiene

$$\{x_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{1}{m}(\{x_\mu, \pi_\nu\} - \{x_\mu, A_\nu(x, \pi)\}). \quad (60)$$

Utilizando la definición del corchete relativista antes introducida, llegamos a la expresión

$$m\{x_\mu, \dot{x}_\nu\} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}. \quad (61)$$

Este resultado es análogo al caso no relativista (2), pero revela cómo la estructura métrica de Minkowski y la dependencia del potencial en el momento modifican la dinámica.

### 3.1. Fuerza de Lorentz Relativista.

Una observación crucial es que de la expresión (55) podemos empezar a esbozar la presencia de una fuerza. Derivando esta expresión con respecto al parámetro afín  $\tau$ , se obtiene

$$F^\nu = (\dot{\pi}_\nu - \frac{d}{d\tau} A_\nu(x, \pi)). \quad (62)$$

Para avanzar en la derivación, diferenciamos la ecuación (61) respecto a  $\tau$

$$m \frac{d}{d\tau} \{x_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{d}{d\tau} (\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}). \quad (63)$$

donde aplicamos la regla de Leibniz al corchete de Poisson

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} + m\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\} = \frac{d}{d\tau} (\frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}). \quad (64)$$

Reorganizando términos

$$m\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\} = -m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} + \frac{d}{d\tau} (\frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}). \quad (65)$$

Este resultado vincula la variación de la aceleración con los corchetes de velocidad y la evolución del potencial. A continuación, evaluamos el corchete  $\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\}$  utilizando la expresión (59)

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} (\{\pi^\mu, \pi^\nu\} - \{A^\mu, \pi^\nu\} - \{\pi^\mu, A^\nu\} + \{A^\mu, A^\nu\}). \quad (66)$$

Dado que  $\{\pi^\mu, \pi^\nu\} = 0$  por ser canónicamente conjugadas a  $x^\mu$ , esta contribución se anula. Por tanto

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} (-\{A^\mu, \pi^\nu\} - \{\pi^\mu, A^\nu\} + \{A^\mu, A^\nu\}). \quad (67)$$

Evaluamos ahora cada término por separado mediante la definición del corchete de Poisson

$$\{A^\mu, \pi^\nu\} = \eta^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \pi^\nu}{\partial \pi^\sigma} - \frac{\partial \pi^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial A^\mu}{\partial \pi^\sigma} \right), \quad (68)$$

lo que simplifica a

$$\{A^\mu, \pi^\nu\} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (69)$$

y, por antisimetría,

$$\{\pi^\mu, A^\nu\} = -\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (70)$$

El último término se calcula como

$$\{A^\mu, A^\nu\} = \eta^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial A^\nu}{\partial \pi^\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu) \right). \quad (71)$$

Sustituyendo estos resultados en (66), obtenemos

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \{A^\mu, A^\nu\}), \quad (72)$$

donde es natural reconocer la estructura del tensor de campo gauge

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \{A_\mu, A_\nu\}. \quad (73)$$

Sustituyendo esta expresión en (65), resulta

$$m\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\} = \frac{1}{m} F_{\mu\nu} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right). \quad (74)$$

Multiplicando ambos lados por  $m$  y contrayendo con  $\dot{x}^\nu$ , se obtiene

$$m^2\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\}\dot{x}^\nu = F_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu. \quad (75)$$

Lo cual nos permite identificar

$$m\ddot{x}_\mu = F_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu. \quad (76)$$

A partir de la ecuación (59), reconocemos

$$F^\mu = F^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu. \quad (77)$$

Definimos entonces el término adicional como

$$G^\mu(x) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu, \quad (78)$$

lo que nos permite expresar la fuerza total como

$$F^\mu = F^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu + G^\mu(x), \quad (79)$$

una generalización relativista de la fuerza de Lorentz, donde los dos términos satisfacen las siguientes condiciones de consistencia

$$\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu = 0, \quad (80)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad (81)$$

lo que implica la existencia de un campo escalar  $\phi(x)$  y un campo vectorial  $A_\mu(x)$  tales que

$$G_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (82)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (83)$$

Los resultados obtenidos en esta sección revelan de forma explícita cómo se manifiesta una fuerza tipo Lorentz en el contexto relativista, partiendo de la estructura del formalismo hamiltoniano con variables extendidas. En particular, la derivación del tensor de campo  $F_{\mu\nu}$ , que incorpora tanto los derivados del potencial como los corchetes de Poisson entre componentes del mismo, muestra la generalización natural de la fuerza electromagnética en este marco teórico.

La ecuación de movimiento (79), identifica dos contribuciones a la fuerza: una directamente asociada al tensor de campo  $F_{\mu\nu}$  y otra representada por  $G^\mu(x)$ , un término derivado del potencial que puede interpretarse como un gradiente de un campo escalar. Esta forma generalizada de la fuerza de Lorentz permite una descripción unificada de interacciones gauge y campos adicionales en contextos más amplios, como los que aparecen en teorías efectivas o formulaciones no canónicas.

Finalmente, la imposición de condiciones sobre los tensores  $F_{\mu\nu}$  y  $G_\mu$ , dadas por las ecuaciones (80) y (81), garantiza la existencia de funciones potenciales  $A_\mu(x)$  y  $\phi(x)$ , reforzando la consistencia interna del modelo. Este resultado es fundamental, ya que establece un vínculo directo entre la dinámica del sistema y la geometría de los campos que lo gobiernan.

### 3.2. Ecuaciones Homogéneas de Maxwell.

Con base en la sección anterior, podemos escribir la siguiente expresión:

$$F_{\mu\nu} = -m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = \{x_\mu, F_\nu\} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi^\mu} \right). \quad (84)$$

Utilizando la identidad de Jacobi en términos de los momentos, tenemos:

$$\{x_\nu, \{\pi_\mu, \pi_\rho\}\} + \{\pi_\mu, \{\pi_\rho, x_\nu\}\} + \{\pi_\rho, \{x_\nu, \pi_\mu\}\} = 0. \quad (85)$$

Desarrollando y haciendo una relación con las coordenadas:

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = -\{\dot{x}_\mu, A_\nu\} - \{A_\mu, \dot{x}_\nu\} - \frac{1}{m}\{A_\mu, A_\nu\}. \quad (86)$$

Ahora destacamos el siguiente resultado:

$$m\{\dot{x}_\mu, A_\nu\} = -\partial_\mu A_\nu - \{A_\mu, A_\nu\}. \quad (87)$$

Por lo tanto, podemos sustituir:

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{1}{m}\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{m}\{A_\mu, A_\nu\}\partial_\nu A_\mu - \frac{1}{m}\{A_\nu, A_\mu\} - \frac{1}{m}\{A_\mu, A_\nu\}. \quad (88)$$

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{1}{m}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \{A_\mu, A_\nu\}) = \frac{1}{m}F_{\mu\nu}. \quad (89)$$

Y sabemos por las deducciones anteriores cual es la forma del tensor del campo de gauge por (73), de dónde podemos encontrar la expresión:

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \{A_\mu, A_\nu\}). \quad (90)$$

Desarrollando a (90), podemos llegar a lo siguiente:

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = \partial_\alpha \{A_\mu, A_\nu\} + \partial_\mu \{A_\nu, A_\alpha\} + \partial_\nu \{A_\alpha, A_\mu\} \quad (91)$$

Y por lo tanto:

$$\{F_{\alpha\mu}, A_\nu\} + \{F_{\nu\alpha}, A_\mu\} + \{F_{\mu\nu}, A_\alpha\} = \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu}. \quad (92)$$

Reescribiendo:

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} - \{F_{\mu\nu}, A_\alpha\} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} - \{F_{\nu\alpha}, A_\mu\} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} - \{F_{\alpha\mu}, A_\nu\} = 0. \quad (93)$$

Ahora podemos definir la derivada covariante como:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - \{F_{\mu\nu}, A_\alpha\}. \quad (94)$$

Con base en esta definición, podemos encontrar lo siguiente:

$$D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \quad (95)$$

Esta es la expresión para las ecuaciones homogéneas del campo electromagnético.

## 4. Ecuaciones inhomogéneas de Maxwell.

Sin embargo, existen otras dos ecuaciones de Maxwell a tratar en nuestra demostración:

$$\text{div } E = 4\pi\rho, \quad (96)$$

$$-\frac{\partial E}{\partial t} + \text{rot} H = 4\pi J. \quad (97)$$

Las cuales son descartadas de la prueba de Dyson [1], sobre la base de que simplemente definen las densidades de carga y corriente externas  $\rho$  y  $J$ . Sin embargo, se observa que no son simultáneamente invariantes de Lorentz y de Galileo[3], [7], [8]. Para poder llevar a cabo dichas expresiones faltantes, podremos operar de diversas maneras.

### 4.1. El caso no abeliano.

Ahora, todo lo anterior mencionado, sugiere que las ecuaciones clásicas de campo gauge no abeliano podrían obtenerse de la regla de acoplamiento mínimo a través de una condición especial sobre  $\{A_\mu, A_\nu\}$ . Ya que, a diferencia del caso electromagnético, los potenciales no conmutan entre sí.

Podemos empezar considerando una partícula clásica moviéndose bajo la influencia de un campo gauge no abeliano. Su dinámica está determinada por la **regla de acoplamiento mínimo**:

$$\pi^\mu = m\dot{x}^\mu + A^\mu(x, I), \quad (98)$$

donde  $A^\mu$  es el potencial gauge que depende de las coordenadas  $x^\mu$  y de las variables internas  $I^a$ , que codifican el “color”.

Escribimos:

$$A^\mu(x, I) = A_a^\mu(x) I^a. \quad (99)$$

Y asumimos que los  $I^a$  satisfacen el álgebra de Lie:

$$\{I^a, I^b\} = -f^{abc} I^c. \quad (100)$$

Donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura del grupo de simetría. Ahora podemos definir el tensor de campo como:

$$F^{\mu\nu} \equiv -m\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\}. \quad (101)$$

Donde los corchetes de Poisson están definidos sobre el espacio de fases extendido  $(x^\mu, \pi^\mu, I^a)$ . A partir de (94), se tiene:

$$\dot{x}^\mu = \frac{1}{m} (\pi^\mu - A^\mu). \quad (102)$$

Por lo que podemos escribir:

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} \{\pi^\mu - A^\mu, \pi^\nu - A^\nu\} = \frac{1}{m^2} (-\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu + \{A^\mu, A^\nu\}). \quad (103)$$

Y llegamos a expresar lo siguiente:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \{A^\mu, A^\nu\}$$

Que es la expresión que ya conocemos de demostraciones anteriores.

Y ahora, usando la expansión  $A^\mu = A_a^\mu(x) I^a$  y la regla (96):

$$\{A^\mu, A^\nu\} = A_a^\mu A_b^\nu \{I^a, I^b\} = -A_a^\mu A_b^\nu f^{abc} I^c. \quad (104)$$

Gracias a esto podemos escribir lo siguiente:

$$F_c^{\mu\nu} = \partial^\mu A_c^\nu - \partial^\nu A_c^\mu + f^{abc} A_a^\mu A_b^\nu. \quad (105)$$

Ahora, consideramos la identidad de Jacobi clásica para los corchetes de Poisson sobre las trayectorias  $x^\mu(\tau)$ :

$$\{x^\alpha, \{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\}\} + \{\dot{x}^\mu, \{\dot{x}^\nu, x^\alpha\}\} + \{\dot{x}^\nu, \{x^\alpha, \dot{x}^\mu\}\} = 0. \quad (106)$$

Aplicando esta identidad al campo  $F^{\mu\nu}$ , se obtiene la versión no abeliana de la identidad de Bianchi:

$$D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \quad (107)$$

Donde la derivada covariante actúa sobre tensores del álgebra de Lie como:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = \partial_\mu F_a^{\mu\nu} + f^{abc} A_\mu^b F_c^{\mu\nu}. \quad (108)$$

Finalmente, por consistencia del sistema, debe existir una corriente conservada  $j_a^\nu$  tal que:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = j_a^\nu. \quad (109)$$

Esta ecuación es la versión no abeliana inhomogénea de las ecuaciones de Maxwell.

## 5. Conclusiones

Este trabajo ha explorado sistemáticamente el enfoque de Feynman-Dyson para derivar las ecuaciones del electromagnetismo a partir de principios mecánicos fundamentales. Partiendo de la formulación original galileana, hemos extendido y unificado diversas generalizaciones del método, destacando cómo la estructura de los corchetes de Poisson conduce naturalmente a la fuerza de Lorentz y a las ecuaciones homogéneas de Maxwell.

En primer lugar, reconstruimos la derivación clásica en el espacio euclídeo, mostrando cómo las relaciones de conmutación entre posición y velocidad –análogas a las de la mecánica cuántica– permiten deducir la forma de la fuerza electromagnética y las leyes de divergencia magnética nula y Faraday. Este marco revela una profunda conexión entre la dinámica de partículas y la teoría de campos, aunque presenta limitaciones en su covariancia relativista.

Para superar estas restricciones, desarrollamos una formulación covariante en el espacio-tiempo de Minkowski. Aquí, la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  se incorpora explícitamente en la definición de los corchetes de Poisson, preservando la invariancia Lorentz. Esta extensión no solo generaliza la fuerza de Lorentz al caso relativista, sino que también esclarece el papel del tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  y su relación con potenciales que dependen del momento, introduciendo términos no mínimos en el acoplamiento ( $G_\mu$ ).

Adicionalmente, abordamos el caso no abeliano mediante la inclusión de variables internas de *color*  $I^a$  que satisfacen álgebras de Lie. Este enfoque permite derivar ecuaciones tipo Yang-Mills, donde la no conmutatividad de los potenciales conduce naturalmente a la versión inhomogénea de las ecuaciones de Maxwell en presencia de cargas no abelianas. La derivada covariante  $D_\mu$  emerge así como una herramienta geométrica esencial para garantizar la consistencia dinámica.

### ■ Direcciones futuras:

- Extender el formalismo a variedades pseudo-Riemannianas para incorporar gravitación
- Explorar generalizaciones en geometrías no conmutativas ( $\kappa$ -Minkowski)
- Investigar implicaciones en teorías de campo efectivas donde emergen acoplamientos no mínimos

## 6. Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco por proporcionar un entorno de trabajo adecuado durante la realización de esta investigación. J.M.C. también agradece a Secihti por su apoyo a través de una beca para estudios posdoctorales bajo la subvención No. 3873825.

## 7. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

## Referencias

- [1] Freeman J Dyson. “Feynman’s proof of the Maxwell equation”. En: American Journal of Physics (1989).

- [2] Arvind Vaidya y Carlos Farina. “Can Galilean mechanics and full Maxwell equations coexist peacefully?” En: *Physics Letters A* (1991).
- [3] I. E. Farquhar. “Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations” by Freeman J. Dyson [Am. J. Phys. 58, 209-211 (1990)]”. En: *American Journal of Physics* (1991).
- [4] Shogo Tanimura. “Relativistic Generalization and Extension to the Non-Abelian Gauge Theory of Feynman’s Proof of the Maxwell Equations”. En: *Annals of Physics* (1992).
- [5] Martin C. Land, Nissan Shnerb y Lawrence P. Horwitz. “On Feynman’s Approach to the Foundations of Gauge Theory”. En: *Foundations of Physics* (1993).
- [6] Merced Montesinos y Abdel Perez-Lorenzana. “Minimal Coupling and Feynman’s Proof”. En: *J. Theor. Phys.* (1999).
- [7] Norman Dombey. “Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations” by Freeman J. Dyson [Am. J. Phys. 58, 209-211 (1990)]”. En: *American Journal of Physics* (1991).
- [8] Ildeu de Castro Moreira. “Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations” by R. J. Hughes [Am. J. Phys. 60, 301-306 (1992)]”. En: *American Journal of Physics* (1993).
- [9] Paul Bracken. “Poisson Brackets and the Feynman Problem”. En: *International Journal of Theoretical Physics* (1996).

## Apéndice

### A. Conmutadores

Este apéndice recoge las herramientas algebraicas esenciales utilizadas en la derivación de las ecuaciones de Maxwell. Los conmutadores, definidos como operaciones bilineales antisimétricas, juegan un papel central en la conexión entre la dinámica de partículas y la teoría de campos electromagnéticos.

#### A.1. Identidades básicas

Las siguientes identidades son fundamentales para el desarrollo de las demostraciones:

- **Identidad de Jacobi:** Estructura algebraica que garantiza consistencia en álgebras de Lie:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (110)$$

- **Regla de Leibniz I:** Comportamiento del conmutador frente a productos:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (111)$$

- **Regla de Leibniz II:** Derivación temporal de conmutadores:

$$\frac{d}{dt}[A, B] = \left[ \frac{dA}{dt}, B \right] + \left[ A, \frac{dB}{dt} \right] \quad (112)$$

## A.2. Definición y propiedades algebraicas

El conmutador de dos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  actúa sobre funciones prueba  $\psi$  como:

$$[\hat{A}, \hat{B}]\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) - \hat{B}(\hat{A}\psi) \quad (113)$$

De esta definición se derivan propiedades clave:

$$[A, A] = 0 \quad (\text{Nilpotencia}) \quad (114)$$

$$[A, B] = -[B, A] \quad (\text{Antisimetría}) \quad (115)$$

$$[A, F(A)] = 0 \quad (\text{Conmutatividad funcional}) \quad (116)$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \quad (\text{Linealidad}) \quad (117)$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \quad (\text{Regla de derivación}) \quad (118)$$

## A.3. Relaciones de conmutación canónicas

Para operadores de posición ( $\hat{x}_i$ ) y momento ( $\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j$ ), las relaciones fundamentales son:

### ■ Conmutatividad espacial:

$$[x_i, x_j] = 0 \quad (119)$$

### ■ Conmutatividad del momento:

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (120)$$

### ■ Relación canónica:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (121)$$

La derivación de (121) se obtiene directamente de la acción sobre funciones prueba:

$$[x_i, p_j]\psi = i\hbar\delta_{ij}\psi \quad (122)$$

## A.4. Expresión generalizada para funciones

Para funciones  $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  y  $G(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , el conmutador adopta la forma:

$$[F, G] = \sum_{k,l} \left( [x_k, x_l] \frac{\partial G}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial x_l} + [x_k, \dot{x}_l] \frac{\partial G}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_l} + [\dot{x}_k, x_l] \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial F}{\partial x_l} + [\dot{x}_k, \dot{x}_l] \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_l} \right) \quad (123)$$

Esta expresión general es particularmente útil al trabajar con espacios de fases extendidos en las formulaciones relativistas y no abelianas desarrolladas en el artículo.

# Funtores representables, Lema de Yoneda y objetos universales

Javier-Díaz, Isaac<sup>1,\*</sup> , Pompeyo-Gutiérrez, Carlos Ariel<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,

\*isaac.javdi@gmail.com

---

## Resumen

En este trabajo se exploran los conceptos de representabilidad y de objeto universal, así como el Lema de Yoneda, todo esto perteneciente a la teoría de categorías. Se presentan diversos ejemplos para ilustrar los conceptos. Para esto, son considerados objetos de distintas áreas de las matemáticas, como Álgebra Lineal, Topología, Teoría de Anillos, entre otras. Además, se proporcionan demostraciones para los resultados.

**Palabras claves:** *Funtores representables, lema de Yoneda, Teoría de categorías, transformaciones naturales.*

## Abstract

In this work we explore the concepts of representability and universal object, as well as Yoneda's Lemma, which belong to Category Theory. We provide several examples to illustrate the concepts. In order to do this, we consider objects coming from different mathematical fields, such as Linear Algebra, Topology, Ring Theory, among others. Besides, we provide proofs for the results.

**Keywords:** *Representable functors, Yoneda's lemma, Category Theory, Natural Transformations*

---

Recibido: 10 de abril de 2025. Aceptado: 18 de noviembre de 2025. Publicado: 12 de diciembre de 2025.

## 1. Introducción

La teoría de categorías es un lenguaje bastante abstracto pero que, al contextualizarlo de manera adecuada, resulta ser muy expresivo, de tal forma que permite describir hechos, situaciones o comportamientos que tienen algunos objetos matemáticos. Es pertinente mencionar que estudiar por primera vez esta teoría puede ser complicado, y esto es debido a su alto nivel de abstracción; como se verá más adelante, se hablará de “objetos” y “morfismos”, sin decir qué son, mencionando solamente cómo deben comportarse.

En esta teoría, la atención se centra en las relaciones que hay entre los objetos de una categoría (*morfismos*); las relaciones entre categorías (*funtores*) y las que hay entre funtores (*transformaciones naturales*). De hecho, el concepto de categoría es auxiliar; los conceptos básicos son los de funtor y de transformación natural. Esto fue dicho por los mismos autores (Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane) en su artículo seminal “General Theory of Natural Equivalences” [1], publicado en 1945.

La generalidad de la teoría de categorías permite ver similitudes que se encuentran entre dos áreas de las matemáticas que no parecieran tener algo en común. En realidad, es así que nace

la teoría: aunque el primer escrito fue publicado en 1945, sus orígenes pueden rastrearse un poco más atrás, en un encuentro entre MacLane y Eilenberg en 1942. Por una parte, Eilenberg estaba interesado en calcular grupos de homología, cohomología y homotopía. Por otra parte, Mac Lane estaba interesado en extensiones de grupos. Fue en una serie de pláticas dadas por Mac Lane y atendidas por Eilenberg, que este último notó ciertas coincidencias entre los trabajos de ambos. Investigar estas coincidencias fue lo que llevó a la noción de funtor y de transformación natural [6].

Rápidamente se aprecia el poder de las categorías; en 1957, Grothendieck publica el revolucionario artículo “Sur quelques points d’algèbre homologique”, en donde la utiliza de manera extensa, no sólo como un lenguaje en el cual expresarse y organizar de manera sistemática campos de las matemáticas (como la topología algebraica), sino también como una herramienta para probar resultados matemáticos [6].

Naturalmente, el interés por la teoría de categorías persiste. El objetivo de este artículo es hablar acerca de los funtores representables, del Lema de Yoneda y objetos universales; daremos sus definiciones, se presentan ejemplos, se enuncian y demuestran algunos resultados relacionados a ellos. Aunque para poder llegar a dichos conceptos, habremos de pasar por la definición de categoría, funtor y transformaciones naturales.

Las definiciones y resultados (aunque aquí se ofrecen pruebas de éstos) relacionados con la teoría de categorías que se presentan pueden encontrarse tanto en [5] como en [10]; sin embargo, este último tiene un tratamiento un poco más moderno y es el que se prefiere. No obstante, la esencia sigue siendo la misma.

Finalmente, este texto está dirigido a personas que tengan conocimientos básicos de topología (de conjuntos) como en [7], álgebra lineal y álgebra abstracta [4]. No se espera conocimiento alguno de teoría de categorías.

Finalmente, para los lectores con más bagaje matemático: se ha mencionado que la teoría de categorías encuentra conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas. A continuación son mencionados ejemplos más elaborados de su uso:

- Los conjuntos junto con las funciones forman la categoría *Set*; los esquemas junto con sus morfismos forman la categoría de esquemas, que se denota por *Sch* [3]. Los funtores  $\mathcal{F} : Sch \rightarrow Set$  aparecen en la teoría de espacios y problemas moduli (problemas de clasificación) [8].
- El primer grupo de homotopía (o grupo fundamental) induce un funtor entre la categoría de espacios topológicos puntuados (es decir, un par  $(X, x)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $x$  es un elemento fijo de  $X$ ) y la categoría de grupos, *Gr* [12].
- Se tiene una relación entre la topología diferencial y el álgebra lineal dada por un funtor que va de la categoría de las variedades suaves, *Diff* a los espacios vectoriales reales  $Vec_{\mathbb{R}}$ , el cual manda una variedad suave  $M$  al espacio (vectorial) de las funciones suaves  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , denotado por  $C^\infty$ . Por otra parte, un mapeo suave entre variedades  $F : M \rightarrow N$  se convierte en una transformación lineal  $F^*$  bajo la acción de tal funtor [9, 12].

De manera particular, la referencia [12] utiliza de forma extensiva el lenguaje de las categorías (y otras teorías) en el estudio de las variedades topológicas.

## 2. Categorías, funtores y transformaciones naturales.

**Convención:** En los ejemplos relacionados con anillos, se da por hecho que todos tienen unitario, al cual denotaremos por 1, y que los homomorfismos de anillos preservan el unitario. Para mayor información sobre la teoría de anillos (y en general, del álgebra que se utilizará en el texto) una referencia es [4].

### 2.1. Categorías

Las categorías están compuestas de objetos y de morfismos entre ellos. A continuación se mencionan las cosas que debe cumplir una categoría. En primer lugar, los morfismos entre las cosas se pueden componer: siempre que existe un diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow g \\ & & C, \end{array}$$

éste se puede completar con

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & C. \end{array} \quad (1)$$

Además, la composición es asociativa:

$$f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h.$$

Por último, siempre existe un morfismo  $1_A : A \rightarrow A$  de tal forma que se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ & \searrow g = g \circ 1_A & \downarrow g \\ & & B, \end{array} \quad \circ \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow f = 1_B \circ f & \downarrow 1_B \\ & & B. \end{array}$$

De manera más formal, la definición de categoría es la siguiente:

**Definición 2.1.** Una **categoría**  $\mathcal{A}$  consta de

- i) una clase  $\text{ob}(\mathcal{A})$  de objetos en  $\mathcal{A}$ ;
- ii) para cada par de objetos  $A, B$  existe un conjunto  $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$  (también denotado por  $\text{Mor}(A, B)$ , si no hay riesgo de confusión) de morfismos (o flechas o funciones) que van de  $A$  a  $B$ ;
- iii) para objetos  $A, B, C$  en la categoría existe una función

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) & \rightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C) \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f, \end{array}$$

que es llamada **composición**;

iv) para cada objeto  $A$  existe un elemento  $1_A$  en  $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A)$ , que es llamado la **identidad** en  $A$ ,

que satisfacen los siguientes axiomas:

a) **asociatividad de la composición:** para cada  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C)$  y  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(C, D)$  tenemos

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f);$$

b) **ley de identidad:** para cada  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$  tenemos

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

c) Los conjuntos  $\text{Mor}(A, B)$  son disjuntos por pares.

### Algunos ejemplos

Los siguientes son ejemplos de categorías, los cuales pueden consultarse en [10] y [4], principalmente. No obstante, la categoría  $\text{Top}_X$  aparece en [2] y en [3].

**Ejemplo 2.1.** 1) **Categoría Set:** La colección de conjuntos y las funciones entre ellos son una categoría. En efecto: en esta categoría los objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones. La composición de morfismos es la composición usual de funciones, la cual satisface la ley de asociatividad. Por último, para todo conjunto  $X$  existe una función  $f$  que va de  $X$  en  $X$  definida por  $f(x) = x$  (que es llamada función identidad). Esta función cumple con la ley de la identidad de la definición de categoría.

2) **Categoría  $\text{Vec}_K$ :** El conjunto de espacios vectoriales sobre un campo  $K$  con las transformaciones lineales forman una categoría, la composición de morfismos es la composición usual de transformaciones lineales y el morfismo identidad es la transformación lineal identidad.

3) **Categoría Ring:** La colección de anillos con los homomorfismos, la composición de homomorfismos (que es la composición usual de funciones) y el homomorfismo identidad conforman esta categoría.

4) **Categoría Top:** Esta categoría está conformada por la colección de espacios topológicos junto con las funciones continuas, la composición de funciones y la función identidad.

5) **Categoría  $\text{Top}_X$ :** Sea  $X$  un espacio topológico. Los componentes de esta categoría son:

- i) Los abiertos de la topología serán los objetos de la categoría.
- ii) Si  $U_0, U_1$  son abiertos en  $X$  tales que  $U_0 \subset U_1$ , entonces se define la función inclusión  $i : U_0 \rightarrow U_1$  con regla de correspondencia  $i(x) = x$ , para todo  $x \in U_0$ ; las funciones inclusión serán los morfismos de la categoría.
- iii) La composición de los morfismos es la composición usual de funciones.
- iv) El morfismo identidad es la función identidad  $I : U_0 \rightarrow U_0$ .

De hecho, hay muchas más estructuras, como anillos, grupos, espacios vectoriales, o espacios topológicos, las cuales se relacionan o determinan mediante un tipo distinguido de función: los isomorfismos. Esto da lugar a la siguiente definición:

**Definición 2.2.** Un morfismo  $f : A \rightarrow B$  en la categoría  $\mathcal{A}$  es un **isomorfismo** si existe un morfismo  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g \circ f = 1_A$  y  $f \circ g = 1_B$ .

Así, por ejemplo, los morfismos en la categoría de anillos son los isomorfismos de anillos; los isomorfismos en la categoría  $Top_X$  son las funciones identidad, y en la categoría  $Set$  son las funciones biyectivas.

## 2.2. Funtores

Así como los objetos están conectados por morfismos, así también las categorías están conectadas por *funtores*. Un funtor lo se denota con una flecha indicando la categoría de donde parte a la categoría donde llega. Por ejemplo, un funtor de la categoría  $\mathcal{A}$  a la categoría  $\mathcal{B}$  lo escribimos por  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , y si queremos ser más específicos y mencionar el nombre del funtor, hacemos  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Un funtor lo que hace es tomar objetos y morfismos en  $\mathcal{A}$  y mandarlos como objetos y morfismos en  $\mathcal{B}$ . Hay dos tipos de funtores, los covariantes y los contravariantes. En un momento decimos cuál es la diferencia.

Utilicemos nuevamente los diagramas: si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  son morfismos en  $\mathcal{A}$  (naturalmente,  $A$ ,  $B$  y  $C$  son objetos en  $\mathcal{A}$ ), entonces

$$\left( A \xrightarrow{f} B \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left( \mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(B) \right)$$

si el funtor es covariante, y si el funtor es contravariante:

$$\left( A \xrightarrow{f} B \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left( \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(A) \right).$$

A continuación, se presentan dos ejemplos de funtores, primero uno covariante y luego otro contravariante.

**Ejemplo 2.2.** Se define el funtor olvidadizo  $\mathcal{F} : Vec_K \rightarrow Set$ , el cual

- manda un espacio vectorial  $(V, +, *)$  a su conjunto subyacente  $\mathcal{F}((V, +, *)) = V$ ;
- y una transformación lineal  $f : V \rightarrow W$  la convierte en la función de conjuntos  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W)$ , que tiene la misma regla de correspondencia de  $f$ .

Puesto en palabras llanas, este funtor “olvida” la estructura de los objetos en la categoría  $Vec_K$ . De manera similar puede definirse un funtor olvidadizo para las categorías de grupos, anillos, etc.

**Ejemplo 2.3.** Dada una categoría  $\mathcal{A}$ , como los morfismos que van del objeto  $X$  al objeto  $B$  (para cualesquiera  $X$  y  $B$  en  $\mathcal{A}$ ) forman un conjunto, entonces siempre podemos definir el funtor  $\text{Mor}(-, X) : \mathcal{A} \rightarrow Set$  de la siguiente forma:

- a un objeto  $A$  en  $\mathcal{A}$  se le asigna el objeto  $\text{Mor}(A, X)$  en  $Set$ , que es el conjunto de todos los morfismos que van de  $A$  en  $X$ ;
- y dado un morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{A}$ , se tiene un morfismo en  $Set$  (es decir, una función de conjuntos)  $\text{Mor}(f, X) : \text{Mor}(B, X) \rightarrow \text{Mor}(A, X)$  definida por

$$\text{Mor}(f, X)(g) = g \circ f,$$

para todo morfismo  $g \in \text{Mor}(B, X)$ .

Puede explicarse con un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(B, X) & \longrightarrow & \text{Mor}(A, X) \\ \downarrow g & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \text{Mor}(f, X)(g) & \swarrow g & \\ X & & \end{array} \end{array}$$

Para ser más concretos, se considera la categoría de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ . Se definirá el funtor

$$\text{Mor}(-, \mathbb{R}) : \text{Vec}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Set}.$$

Así, si se toma un objeto en  $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ , por decir,  $\mathbb{R}^3$ , entonces se tiene el conjunto

$$\text{Mor}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \{\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ es lineal}\}.$$

Por otra parte, la función lineal  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\alpha(x, y) = (x, y, z_0)$  (donde  $z_0$  es una constante), define una función de conjuntos

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(\alpha, \mathbb{R}) : \text{Mor}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) & \rightarrow & \text{Mor}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ \beta & \mapsto & \beta \circ \alpha. \end{array}$$

Si se considera  $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\beta(x, y, z) = (x, y + z, y - z)$ , entonces  $\text{Mor}(\alpha, \mathbb{R})(\beta) = \beta \circ \alpha$  es una función lineal que va de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  y que está definida por

$$(\beta \circ \alpha)(x, y) = \beta(x, y, z_0) = (x, y + z_0, y - z_0).$$

### 2.3. Transformaciones Naturales

A continuación se definen las transformaciones naturales, que son las relaciones que hay entre funtores. Se comienza con dos funtores contravariantes  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Consideremos un morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{A}$ . Cuando se aplican los funtores obtenemos dos morfismos  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A)$  y  $\mathcal{G}(f) : \mathcal{G}(B) \rightarrow \mathcal{G}(A)$  (y por lo tanto, cuatro objetos) en la categoría  $\mathcal{B}$ . Es posible que hayan morfismos  $\tau_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$  y  $\tau_B : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{G}(B)$  en la categoría  $\mathcal{B}$ , con lo cual se tendrían los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathcal{G}(B) \\ \downarrow \mathcal{G}(f) & & \downarrow \mathcal{F}(f) \\ \mathcal{G}(A) & & \mathcal{F}(A) \xrightarrow{\tau_A} \mathcal{G}(A). \end{array}$$

Como se vio antes, siempre que se tienen diagramas de ese estilo, es posible componerlos (como en el diagrama (1)), teniendo así

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathcal{G}(B) \\ \searrow \mathcal{G}(f) \circ \tau_B & \downarrow \mathcal{G}(f) & \downarrow \mathcal{F}(f) \\ & \mathcal{G}(A) & \mathcal{F}(A) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B) & & \mathcal{F}(B) \\ & \searrow \tau_A \circ \mathcal{F}(f) & \downarrow \mathcal{F}(f) \\ & \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\tau_A} \mathcal{G}(A). \end{array}$$

Se centra la atención solamente en el conjunto de morfismos  $\tau_-$  tales que

$$\tau_A \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \tau_B.$$

Así, la definición de transformación natural es:

**Definición 2.3.** *Considérense dos funtores  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Una transformación natural  $\tau : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  se define como un conjunto de morfismos  $\tau_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$  en  $\mathcal{B}$  que hacen conmutar el diagrama siguiente:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathcal{G}(B) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\tau_A} & \mathcal{G}(A). \end{array}$$

*Si  $\tau_B$  es un isomorfismo para todo objeto  $B$  en  $\mathcal{B}$ , entonces  $\tau$  se dice que es un **isomorfismo natural** y que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son **naturalmente isomorfos**.*

Esta es la forma *correcta* de definir las relaciones entre funtores. En la siguiente sección se presenta un ejemplo de una transformación natural.

### 3. Funtores Representables

Los funtores representables son los que se *parecen* o se comportan como un functor del tipo  $\text{Mor}(-, A)$  (o bien,  $\text{Mor}(A, -)$ ). Las transformaciones naturales serán utilizadas para dar un sentido exacto a esto y se probará que el functor olvidadizo  $\mathcal{F} : \text{Vec}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Set}$  es representable.

**Definición 3.1.** *Un functor  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  contravariante se dice **representable** (por un objeto  $X$  en  $\mathcal{A}$ ) siempre que  $\mathcal{F}$  sea naturalmente isomorfo al functor  $\text{Mor}(-, X) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ .*

Observación inmediata: como  $\mathcal{F}$  y  $\text{Mor}(-, X)$  son naturalmente isomorfos, entonces para cada objeto  $A$  en  $\mathcal{A}$  existe una biyección entre los morfismos que van de  $A$  en  $X$ ,  $\text{Mor}(A, X)$ , y el conjunto  $\mathcal{F}(A)$ .

**Ejemplo 3.1.** *En este ejemplo se demuestra que el functor olvidadizo es representable: para ello se construye una transformación natural entre  $\mathcal{F}$  y  $\text{Mor}(\mathbb{R}, -)$  y se demuestra que, de hecho, es un isomorfismo natural. Obsérvese que toda función lineal  $T : \mathbb{R} \rightarrow V$  cumple  $T(r) = rT(1)$ , basta con decir quién es  $T(1)$  para que la función lineal quede determinada. Así, la transformación natural  $\alpha$  que se propone está definida por*

$$\begin{array}{ccc} \alpha_V : \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \text{Mor}(\mathbb{R}, V) \\ v & \longmapsto & T_v, \end{array}$$

en donde  $T_v$  es una transformación lineal que cumple que  $T(1) = v$ .

Luego, sea

$$\begin{array}{ccc} \beta_V : \text{Mor}(\mathbb{R}, V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ T & \longmapsto & T(1). \end{array}$$

Como  $(\beta_V \circ \alpha_V)(v) = v$  y  $(\alpha_V \circ \beta_V)(T) = T$ , tenemos que  $\alpha_V$  es una función biyectiva para cualquier  $V$ , luego, la transformación natural  $\alpha$  es un isomorfismo natural y por consiguiente  $\mathcal{F}$  es un functor que está representado por  $\mathbb{R}$ .

Se resalta la biyección  $\mathcal{F}(V) \simeq \text{Mor}(\mathbb{R}, V)$  para cada objeto  $V$ : hay tantas transformaciones lineales  $\mathbb{R} \rightarrow V$  como elementos en  $\mathcal{F}(V)$ , o bien, tantas como vectores en  $V$ .

Un hecho por el cual interesan tanto los morfismos como el funtor  $\text{Mor}(-, X)$  es que éstos determinan a un objeto. De forma precisa: si  $\text{Mor}(-, X) \simeq \text{Mor}(-, Y)$ , entonces  $X \simeq Y$ . Más adelante será dada una demostración de esto. Primero, se hablará sobre un resultado central en la teoría de categorías: el Lema de Yoneda.

## 4. Lema de Yoneda

El Lema de Yoneda involucra transformaciones naturales entre funtores con categoría de llegada  $\text{Set}$ ,  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  y  $\text{Mor}(-, X)$ , con  $X$  en  $\mathcal{A}$  y se relaciona con la siguiente pregunta ¿cuántas transformaciones naturales existen entre  $\mathcal{F}$  y  $\text{Mor}(-, X)$ ?

Se enuncia y demuestra la siguiente proposición, que es conocida como la forma débil del Lema de Yoneda:

**Proposición 4.1.** *Para cualquier funtor contravariante  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ , cualquier objeto  $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$  y cualquier elemento  $a \in \mathcal{F}(A)$ , existe una única transformación natural  $\tau : \text{Mor}(-, A) \rightarrow \mathcal{F}$  con  $\tau_A(1_A) = a$ .*

*Demostración.* Para cualquier objeto  $B$  en  $\mathcal{A}$  definimos una función

$$\begin{array}{ccc} \tau_B : \text{Mor}(B, A) & \rightarrow & \mathcal{F}(B) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}(f)(a). \end{array}$$

Nótese que  $f : B \rightarrow A$  y  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B)$  (pues  $\mathcal{F}$  es contravariante), por lo que  $\mathcal{F}(f)(a) \in \mathcal{F}(B)$  y entonces la función  $\tau_B$  está bien definida. Se quiere construir una transformación natural  $\tau$  cuyos morfismos componentes son las funciones  $\tau_B$ . Para ello, debe considerarse el morfismo  $h : C \rightarrow B$  en  $\mathcal{A}$  y se verifica que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(B, A) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathcal{F}(B) \\ \downarrow \text{Mor}(h, A) & & \downarrow \mathcal{F}(h) \\ \text{Mor}(C, A) & \xrightarrow{\tau_C} & \mathcal{F}(C). \end{array} \quad (2)$$

Téngase presente que  $\mathcal{F}(h) \circ \tau_B$  y  $\tau_C \circ \text{Mor}(h, A)$  son funciones entre conjuntos y para mostrar que son iguales, debemos ver que tienen el mismo dominio y contradominio (lo cual es evidente) y regla de correspondencia. Se comprueba esto último. Por una parte

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(h) \circ \tau_B)(f) &= \mathcal{F}(h)(\mathcal{F}(f)(a)) \\ &= (\mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(f))(a) \\ &= \mathcal{F}(f \circ h)(a), \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} (\tau_C \circ \text{Mor}(h, A))(f) &= \tau_C(\text{Mor}(h, A)(f)) \\ &= \tau_C(f \circ h) \\ &= \mathcal{F}(f \circ h)(a). \end{aligned}$$

Así,  $\mathcal{F}(h) \circ \tau_B = \tau_C \circ \text{Mor}(h, A)$  y por consiguiente el diagrama (2) conmuta. En consecuencia,  $\tau$  es una transformación natural.

Obsérvese, también, que  $\tau_A(1_A) = \mathcal{F}(1_A)(a) = 1_A(a) = a$ . Ya se encontró la transformación natural que cumple la condición del enunciado, falta probar que es única. Supóngase que  $\delta : \text{Mor}(-, A) \rightarrow \mathcal{F}$  es otra transformación natural que satisface  $\delta_A(1_A) = a$ . Se probará que  $\delta_B = \tau_B$  para cualquier objeto  $B$  en  $\mathcal{A}$ , concluyendo así que  $\delta = \tau$  y que por lo tanto  $\tau$  es única. Considérese un morfismo  $g : B \rightarrow A$  y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(A, A) & \xrightarrow{\delta_A} & \mathcal{F}(A) \\ \downarrow \text{Mor}(g, A) & & \downarrow \mathcal{F}(g) \\ \text{Mor}(B, A) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathcal{F}(B). \end{array} \quad (3)$$

De la conmutatividad del diagrama se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(a) &= \mathcal{F}(g)(\delta_A(1_A)) = (\mathcal{F}(g) \circ \delta_A)(1_A) \\ &= (\delta_B \circ \text{Mor}(g, A))(1_A) \\ &= \delta_B(1_A \circ g) \\ &= \delta_B(g). \end{aligned}$$

Pero como  $\tau_B(g) = \mathcal{F}(g)(a)$ , entonces  $\tau_B(g) = \delta_B(g)$ , y eso se puede probar para cualesquiera  $g \in \text{Mor}(B, A)$  y objeto  $B$  en  $\mathcal{A}$ , por lo que se concluye que  $\delta = \tau$ . Con esto se termina la demostración.  $\square$

De la proposición anterior se desprende el siguiente corolario, que es conocido como el Lema de Yoneda. Se introduce notación: dado un objeto  $A$  en una categoría  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  un funtor contravariante, se denotará por  $[\text{Mor}(-, A), \mathcal{F}]$  al conjunto de todas las transformaciones naturales de  $\text{Mor}(-, A)$  en  $\mathcal{F}$ .

**Corolario 4.1** (Lema de Yoneda). *Si  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  es un funtor y  $A$  es un objeto de  $\mathcal{A}$ , entonces la función*

$$\begin{array}{ccc} Y & : & [\text{Mor}(-, A), \mathcal{F}] \longrightarrow \mathcal{F}(A) \\ & & \sigma \longmapsto \sigma_A(1_A), \end{array} \quad (4)$$

*es una función biyectiva.*

Con estos resultados es posible probar el siguiente resultado.

**Corolario 4.2.** *Considérese un funtor contravariante  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ . Si  $\text{Mor}(-, X) \simeq \mathcal{F} \simeq \text{Mor}(-, Y)$ , entonces  $X \simeq Y$ .*

*Demostración.* La demostración consistirá en encontrar morfismos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $f \circ g = 1_Y$  y  $g \circ f = 1_X$ , es decir, probar que existe un isomorfismo entre  $X$  y  $Y$ . En principio de cuentas no se sabe cuál es el isomorfismo natural que hay entre  $\text{Mor}(-, X)$  y  $\text{Mor}(-, Y)$ , pero es sabido que para todo objeto  $A$  en  $\mathcal{A}$  existe una biyección  $\text{Mor}(A, X) \simeq \text{Mor}(A, Y)$ . Denótese al isomorfismo natural por  $\tau : \text{Mor}(-, X) \rightarrow \text{Mor}(-, Y)$  y por  $\tau^{-1} : \text{Mor}(-, Y) \rightarrow \text{Mor}(-, X)$  a su inversa. En particular se tienen las biyecciones

$$\tau_Y^{-1} : \text{Mor}(Y, Y) \rightarrow \text{Mor}(Y, X) \quad (5)$$

y

$$\tau_X : \text{Mor}(X, X) \rightarrow \text{Mor}(X, Y). \quad (6)$$

De (5) se sabe que existe un único morfismo  $g \in \text{Mor}(X, Y)$  tal que  $\tau_X(1_X) = g$  y de (6) tenemos un único  $f \in \text{Mor}(Y, X)$  tal que  $\tau_Y^{-1}(1_Y) = f$ .

Por otra parte (se sigue considerando  $g \in \text{Mor}(X, Y)$  y  $f \in \text{Mor}(Y, X)$ ), nótese que la transformación natural  $\text{Mor}(-, g) : \text{Mor}(-, X) \rightarrow \text{Mor}(-, Y)$  definida por

$$\text{Mor}(Z, g)(h) = g \circ h,$$

para todo objeto  $Z$  en  $\mathcal{A}$  y  $h \in \text{Mor}(Z, X)$ , satisface

$$\text{Mor}(X, g)(1_X) = g \circ 1_X = g = \tau_X(1_X).$$

Mientras que la transformación natural  $\text{Mor}(-, f) : \text{Mor}(-, Y) \rightarrow \text{Mor}(-, X)$  definida por

$$\text{Mor}(Z, f)(h) = f \circ h$$

cumple que

$$\text{Mor}(X, f)(1_Y) = f \circ 1_Y = f = \tau_Y^{-1}(1_Y).$$

Luego, por la proposición 4.1,  $\tau = \text{Mor}(-, g)$  y  $\tau^{-1} = \text{Mor}(-, f)$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1_X &= \tau_X^{-1}(\tau_X(1_X)) = \tau_X^{-1}(g) \\ &= \text{Mor}(X, f)(g) \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} 1_Y &= \tau_Y(\tau_Y^{-1}(1_Y)) = \tau_Y(f) \\ &= \text{Mor}(Y, g)(f) \\ &= g \circ f. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $X \simeq Y$ . □

Si  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  es un funtor que está representado por  $X$  a través de la transformación natural  $\tau$ , entonces, por definición de representabilidad y por el lema de Yoneda se tienen las siguientes biyecciones:

$$[\text{Mor}(-, X), \mathcal{F}] \simeq \mathcal{F}(X) \simeq \text{Mor}(X, X).$$

**Ejemplo 4.1.** Se comienza este ejemplo [11]<sup>1</sup> haciendo una diferencia entre forma polinomial y función polinomial: dado un anillo  $R$ , una forma polinomial (o simplemente polinomio)  $P$ , con coeficientes en el anillo  $R$  y con la indeterminada  $X$ , es una expresión formal

$$P(X) = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0,$$

mientras que una función polinomial  $P$  de  $R$  en  $R$  se define como

$$\begin{array}{ccc} P_R & : & R \longrightarrow R \\ r & \longmapsto & a_d r^d + \dots + a_1 r + a_0. \end{array}$$

En la notación de función polinomial se especifica en qué anillo se trabaja, pues debe dejarse en claro que hacer una distinción entre función y forma polinomial no es un exceso de formalidad, por ejemplo:

<sup>1</sup>El ejemplo está inspirado en una entrada de una página de internet hecha por T. Tao [11]

- $P = X$  y  $Q = -X$  son diferentes como formas polinomiales, sin embargo coinciden cuando se interpretan en el anillo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , puesto que  $n = -n$ , para todo elemento  $n$  de dicho anillo.
- el polinomio  $X^2 + 1$  no tiene raíces cuando se interpreta como polinomio en  $\mathbb{R}$ , mientras que sí las tiene cuando se interpreta como polinomio en los números complejos.

De lo anterior podemos observar que si se considera una forma polinomial en un solo anillo es posible que se pierda información. Más adelante se verá que las transformaciones naturales permiten considerar las formas polinomiales en todos los anillos al mismo tiempo.

El conjunto de polinomios con coeficientes en un anillo  $R$  y con indeterminada  $X$ , junto con su producto y suma usual forman un anillo, que se denota por  $R[X]$ . Un anillo de polinomios que será conspicuo en todo este ejemplo es el de polinomios con coeficientes en los enteros,  $\mathbb{Z}[X]$ . Nótese que cualquier polinomio  $P(X) = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$  en  $\mathbb{Z}[X]$  induce una función polinomial en cualquier anillo  $R$  consigo mismo: una función polinomial de la forma  $P_R$ , definida como antes.

Además, si  $\varphi : R \rightarrow S$  es un homomorfismo de anillos, la siguiente igualdad se cumple:

$$P_S \circ \varphi = \varphi \circ P_R. \quad (7)$$

No es difícil convencerse de que esto es cierto. Solamente debe tenerse en cuenta que, si  $n$  es un entero y  $r \in R$ , entonces  $\varphi(nr) = n\varphi(r)$ , y en particular, si  $r = 1_R$  (el elemento unitario de  $R$ ), entonces  $\varphi(n1_R) = n\varphi(1_R) = n1_S$ . Abusando un poco de la notación, se escribirá  $n1_S = n$ . Luego, si  $r \in R$  se sigue que

$$\begin{aligned} (P_S \circ \varphi)(r) &= P_S(\varphi(r)) \\ &= a_d \varphi(r)^d + \dots + a_1 \varphi(r) + a_0 \\ &= \varphi(a_d r^d + \dots + a_1 r + a_0) \\ &= \varphi(P_R(r)) \\ &= (\varphi \circ P_R)(r) \end{aligned}$$

La siguiente parte del ejemplo consiste en utilizar el lenguaje de las categorías. Considérese el funtor olvidadizo

$$\mathcal{F} : \text{Rings} \rightarrow \text{Sets},$$

en donde, si  $\varphi : R \rightarrow S$  es un homomorfismo de anillos, entonces

- $\mathcal{F}(R)$  y  $\mathcal{F}(S)$  son los conjuntos subyacentes del anillo  $R$  y de  $S$ , respectivamente.
- $\mathcal{F}(\varphi) : \mathcal{F}(R) \rightarrow \mathcal{F}(S)$  es una función de conjuntos con misma regla de correspondencia que  $\varphi$ .

En este punto se aplica el Lema de Yoneda, el cual asevera que hay tantas transformaciones naturales entre  $\text{Mor}(R, -)$  y  $\mathcal{F}$  como elementos en  $\mathcal{F}(R)$ , para todo anillo  $R$ . En símbolos:

$$[\text{Mor}(R, -), \mathcal{F}] \simeq \mathcal{F}(R) \quad (8)$$

Ahora se construye una transformación natural  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . Se retoma lo dicho al inicio del ejemplo: La forma polinomial  $P = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$  en  $\mathbb{Z}[X]$  será la transformación natural, y las

funciones polinomiales  $P_R$  serán los morfismos componentes, para cada anillo  $R$ . En efecto, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(R) & \xrightarrow{P_R} & \mathcal{F}(R) \\ \mathcal{F}(\varphi) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\varphi) \\ \mathcal{F}(S) & \xrightarrow{P_S} & \mathcal{F}(S), \end{array}$$

conmuta gracias a la ecuación (7).

Es momento de hablar de los morfismos de evaluación. Dado cualquier anillo  $R$ , siempre puede definirse un homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{R,r} : \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & R \\ P & \longmapsto & P(r). \end{array}$$

Nótese que basta con especificar cuál es el elemento de  $R$  que se corresponde con el polinomio  $X$  para definir por completo al homomorfismo de evaluación.

Ahora se define  $\Phi : \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], -) \rightarrow \mathcal{F}$ . Para cada anillo  $R$ , se tiene la función

$$\begin{array}{ccc} \Phi_R : \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], R) & \longrightarrow & \mathcal{F}(R) \\ f & \longmapsto & f(X). \end{array}$$

Sea  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorfismo de anillos. Se demostrará que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], R) & \xrightarrow{\Phi_R} & \mathcal{F}(R) \\ \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], \varphi) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\varphi) \\ \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], S) & \xrightarrow{\Phi_S} & \mathcal{F}(S) \end{array}$$

conmuta. Sea  $f \in \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], R)$ . Luego,

$$(\mathcal{F}(\varphi) \circ \Phi_R)(f) = \mathcal{F}(\varphi)(f(X)) = \phi(f(X)).$$

Por otro lado,

$$(\Phi_S \circ \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], \varphi))(f) = \Phi_S(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(X) = \varphi(f(X)),$$

por lo que

$$\mathcal{F}(\varphi) \circ \Phi_R = \Phi_S \circ \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], \varphi),$$

y entonces  $\Phi$  es una transformación natural.

Una sencilla observación es que todo homomorfismo de anillos  $f : \mathbb{Z}[X] \rightarrow R$  es un homomorfismo de evaluación:  $f = \Phi_{R,f(X)}$ . Recuérdese, además, que basta decir cuál es la imagen de  $X$  para que el morfismo de evaluación quede completamente definido. Por otra parte, para cada  $r \in R$  existe un morfismo de evaluación:  $\Phi_{R,r}$ . Con lo cual, lo que se está probando es que  $\Phi_R : \text{Mor}(\mathbb{Z}[X], R) \rightarrow \mathcal{F}(R)$  es una biyección, para todo anillo  $R$ . Por lo tanto,  $\Phi$  es un isomorfismo natural y entonces  $\mathcal{F}$  está representado por  $\mathbb{Z}[X]$ .

Así,

$$\mathcal{F} \simeq \text{Mor}(\mathbb{Z}[S], -)$$

y la ecuación (8) se convierte en

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}[X]) \simeq [\text{Mor}(\mathbb{Z}[X], -), \mathcal{F}],$$

y entonces las formas polinomiales  $P$  están en biyección con las familias de funciones polinomiales  $F_R$  que satisfacen la ecuación 7.

## 5. Objetos Universales

El Lema de Yoneda y la representabilidad de un funtor  $\mathcal{F}$  llevan a un objeto de interés. Por el lema débil de Yoneda se tiene que para cualquier objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$  y  $x \in \mathcal{F}(X)$  existe un única transformación natural  $\tau : \text{Mor}(-, X) \rightarrow \mathcal{F}$  que cumple

$$\begin{array}{ccc} \tau_X & : & \text{Mor}(X, X) \rightarrow \mathcal{F}(X) \\ & & 1_X \mapsto x \end{array}$$

Ahora supóngase que  $\mathcal{F}$  está representado por  $A$ . Si eso ocurre, entonces

$$\mathcal{F}(A) \rightarrow \text{Mor}(A, A)$$

es una biyección, por lo tanto existe un único  $a \in \mathcal{F}(A)$  tal que  $a \mapsto 1_A$ . Considérese un objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$  y  $x \in \mathcal{F}(X)$ . Nuevamente, por la representabilidad de  $\mathcal{F}$  es sabido que existe un (único) morfismo  $f$  tal que  $x \mapsto f \in \text{Mor}(X, A)$ . Esto último se puede comprobar gracias al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) \ni a & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & x \in \mathcal{F}(X) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{Mor}(A, A) \ni 1_A & \xrightarrow{\text{Mor}(f, A)} & f \in \text{Mor}(X, A) \end{array}$$

Obsérvese que  $\mathcal{F}(f)(a) = x$ ; aún más, el morfismo  $f$  es el único morfismo que lo cumple.

**Definición 5.1.** Sea  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  un funtor contravariante. Un **objeto universal** para  $\mathcal{F}$  es un par  $(X, x)$ , donde  $X$  es un objeto en  $\mathcal{C}$  y  $x \in \mathcal{F}(X)$ , el cual tiene la propiedad de que para cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  y cada  $a \in \mathcal{F}(A)$ , existe un único morfismo  $f : A \rightarrow X$  tal que  $(\mathcal{F}(f))(x) = a \in \mathcal{F}(A)$ .

Para llegar al objeto universal fue necesario suponer que el funtor estaba representado. Sin embargo, la relación entre objeto universal y representabilidad es más estrecha, puesto que no existe el uno sin el otro, como se establece en la siguiente proposición.

**Proposición 5.1.** Un funtor  $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  es representable si y solo si tiene un objeto universal.

*Demostración.* Ya se ha probado que representable implica la existencia de familia universal, ahora se demuestra que la familia universal implica representabilidad. Supóngase que  $(A, a)$  es un objeto universal para  $\mathcal{F}$ . Se define una transformación natural  $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Mor}(-, A)$ , en donde, para cada objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$  se tiene

$$\begin{array}{ccc} \Phi(X) & : & \mathcal{F}(X) \rightarrow \text{Mor}(X, A) \\ & & x \mapsto f_x, \end{array}$$

en donde  $f_x$  es tal que  $\mathcal{F}(f_x)(a) = x$ .

Se toman  $X, Y$  objetos y  $h : Y \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  y se demuestra que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & \text{Mor}(X, A) \\ \downarrow \mathcal{F}(h) & & \downarrow \text{Mor}(h, A) \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & \text{Mor}(Y, A) \end{array}$$

es conmutativo. Sea  $x \in \mathcal{F}(X)$ . Entonces

$$(\Phi(Y) \circ \mathcal{F}(h))(x) = f_{\mathcal{F}(h)(x)},$$

en donde  $\mathcal{F}(f_{\mathcal{F}(h)(x)})(a) = \mathcal{F}(h)(x)$ . Por otra parte,

$$(\text{Mor}(h, A) \circ \Phi(X))(x) = f_x \circ h.$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_x \circ h)(a) &= \mathcal{F}(h)(\mathcal{F}(f_x)(a)) \\ &= \mathcal{F}(h)(x), \end{aligned}$$

y por la unicidad de  $f_{\mathcal{F}(h)(x)}$ , se sigue que  $f_x \circ h = f_{\mathcal{F}(h)(x)}$ . En consecuencia el diagrama es conmutativo y  $\Phi$  es una transformación natural.

Finalmente se prueba que  $\Phi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \text{Mor}(X, A)$  es una biyección. Considerar  $x, y \in \mathcal{F}(X)$ . Si  $\Phi_X(x) = \Phi_X(y)$ , entonces  $x = f_x(a) = f_y(a) = y$ , por lo tanto  $\Phi_X$  es inyectiva. Por otro lado, si  $g \in \text{Mor}(X, A)$ , entonces  $\mathcal{F}(g) \in \text{Mor}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(X))$  y como  $a \in \mathcal{F}(A)$ , se sigue que  $\mathcal{F}(g)(a) \in \mathcal{F}(X)$ . Luego,  $\Phi_X(\mathcal{F}(g(a))) = g_{\mathcal{F}(g)(a)}$  y  $g$  cumple con  $\mathcal{F}(g_{\mathcal{F}(g)(a)})(a) = \mathcal{F}(g)(a)$ , lo cual prueba que  $\Phi_X$  es biyectiva.

Así, se concluye que  $\Phi$  es un isomorfismo natural y por consiguiente  $\mathcal{F} \simeq \text{Mor}(-, A)$ . □

¿Cuál es el interés en el objeto universal? Ocurre que el objeto universal funciona como una especie de *espacio de parámetros*: cualquier elemento  $a \in \mathcal{F}(A)$ , para cualquier  $A$ , puede rastrearse a través de  $X$  y  $x$ . En el siguiente ejemplo, se muestra la relevancia de dicho objeto.

**Ejemplo 5.1.** *Este ejemplo puede encontrarse en [2], aquí lo es desarrollado un poco más. Además, se hace uso de algunos hechos topológicos elementales, los cuales pueden consultarse en cualquier libro de topología general, por ejemplo, en [7].*

Considerar la categoría  $\text{Top}$ . Se define un funtor contravariante  $\mathcal{F} : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$  que manda cada espacio topológico  $S$  a la colección  $\mathcal{F}(S)$  de todos sus subespacios abiertos, y dado un morfismo (i.e. una función continua)  $f : X \rightarrow Y$ , se tiene la función de conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) &\rightarrow \mathcal{F}(X) \\ U &\mapsto f^{-1}(U). \end{aligned}$$

Se equipa con la topología mas gruesa al conjunto  $\{0, 1\}$  en la cual el subconjunto  $\{0\} \subset \{0, 1\}$  sea cerrado (este espacio topológico es llamado espacio de Sierpinski); los subconjuntos abiertos en esta topología son  $\emptyset$ ,  $\{1\}$  y  $\{0, 1\}$ . Obsérvese que si  $f : S \rightarrow \{0, 1\}$  es continua, entonces  $f^{-1}(\{1\})$  es abierto. Recíprocamente, si se supone que  $f^{-1}(\{1\})$  es abierto en  $S$ , entonces  $f^{-1}(\{0, 1\}), f^{-1}(\{1\})$

y  $f^{-1}(\{\emptyset\})$  son abiertos en  $S$ , por lo tanto  $f$  es continua. Luego, tenemos la equivalencia: una función  $S \rightarrow \{0, 1\}$  es continua si y solo si  $f^{-1}(\{1\})$  es abierto en  $S$ .

Se demuestra que el par  $(\{0, 1\}, \{1\})$  es un objeto universal para este funtor. Considérese un objeto  $A$  en  $\text{Top}$  y  $U \in F(A)$  un abierto de  $A$ . Se desea probar que existe una única función continua  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$  con la propiedad de que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(f) & : F(\{0, 1\}) & \rightarrow \mathcal{F}(A) \\ & \{1\} & \mapsto U. \end{array} \quad (9)$$

Se define

$$\begin{array}{ccc} f & : X & \rightarrow \{0, 1\} \\ x & \mapsto & 1 \quad \text{si } x \in U \\ x & \mapsto & 0 \quad \text{si } x \notin U, \end{array}$$

y se observa que esta función cumple 9. ¿Es la única? Si se supone que existe otra función  $\bar{f}$  que satisface 9. Entonces  $\mathcal{F}(\bar{f})(\{1\}) = \bar{f}^{-1}(\{1\}) = U$ , que implica  $\bar{f}(x) = 1$  si  $x \in U$  y  $\bar{f}(x) = 0$  si  $x \notin U$ . Por consiguiente,  $f = \bar{f}$ .

Por la proposición 5.1 (y su demostración), es sabido que el funtor  $\mathcal{F}$  está representado por  $\{0, 1\}$ , con ello se sabe que para todo espacio topológico  $X$  se tiene la biyección  $\mathcal{F}(X) \simeq \text{Mor}(X, \{0, 1\})$ , y es posible concluir que hay tantas funciones continuas  $X \rightarrow \{0, 1\}$  como abiertos en  $X$ . La idea que debe resaltarse es que  $\text{Mor}(X, \{0, 1\})$  está “parametrizando” a los abiertos de  $X$ : en primer lugar, se tiene la biyección  $\mathcal{F}(X) \simeq \text{Mor}(X, \{0, 1\})$  y además, dado un morfismo  $f \in \text{Mor}(X, \{0, 1\})$  se puede conocer cuál es su abierto correspondiente.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se abordó el Lema de Yoneda. Para ilustrar su inserción y aplicación en el contexto de la teoría de categorías, se abordaron varios ejemplos interesantes, que permitieron ilustrar los conceptos y resultados. De forma precisa se tiene lo siguiente:

- La teoría de categorías se define en términos muy generales, lo cual hace que existan ejemplos muy variados de éstas.
- Se obtuvieron resultados muy concretos; para lograrlo tuvimos que considerar categorías y funtores específicos: primero se puso atención en los funtores que tuvieran como categoría de llegada a *Set*. Luego, el interés cambió a aquellos que fueran naturalmente isomorfos a  $\text{Mor}(-, -)$ .
- Se obtuvieron resultados específicos: que  $\text{Mor}(-, A) \simeq \text{Mor}(-, B)$  implica que  $A \simeq B$ , o que un funtor es representable si y solo si, tiene un objeto universal. Se debe de mencionar que para demostrar estos dos resultados mencionados, se empleó el Lema de Yoneda (o bien, su versión débil).
- En la demostración de los resultados, fue posible notar que habían ciertos objetos que jugaban un papel importante en la demostración (especialmente, en la demostración del Lema (débil) de Yoneda); en los casos particulares se investigó qué información era posible obtenerse a partir de ellos:

1. En el ejemplo 3.1, el objeto de interés fue  $\mathbb{R}$ , el cual representa al funtor olvidadizo, y se observó que hay tantas funciones lineales  $\mathbb{R} \rightarrow V$  como vectores hay en  $V$  (donde  $V$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial).
2. Posteriormente, en el ejemplo 4.1 la transformación natural  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  permitía distinguir entre forma y función polinomial. Además, se vio que siempre es posible definir una función de  $\mathbb{Z}[X]$  en cualquier anillo  $R$ , y gracias a esto fue demostrado que el funtor olvidadizo  $\mathcal{F}$  está representado por  $\mathbb{Z}[X]$ .
3. Por último, en el ejemplo 5.1 se encontró un objeto universal y se vio de qué manera (utilizando el funtor de puntos) permitía parametrizar los abiertos de un espacio topológico.

A lo largo de este escrito se ejemplificó cómo la teoría de categorías proporciona un lenguaje bastante general pero que permite llegar a lo particular. Uno en el cual se puede expresar hechos matemáticos, resaltar objetos de interés y que permite, a través de resultados propios de la teoría, obtener información de otras áreas de las matemáticas.

## 7. Agradecimientos

El autor 1 agradece al SECIHTI (antes CONAHCYT) por el apoyo otorgado a través de la Beca para Estudios de Maestría No. 845470, y aún más a los contribuyentes que permiten que se sigan otorgando estos recursos.

## 8. Conflictos de interés

Los autores declaran no tener ningún conflicto de interés.

## 9. Declaratoria de uso de inteligencia artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

## Referencias

- [1] S. Eilenberg and S. Mac Lane, “General Theory of Natural Equivalences,” Transactions of the American Mathematical Society, 1945.
- [2] B. Fantechi et al., Grothendieck’s FGA Explained. In *Amer. Math. Soc.*, 2005
- [3] R. Hartshorne, Algebraic Geometry. Springer Science & Business Media.
- [4] T. Hungerford, Algebra. Springer
- [5] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] J.P. Marquis, “What is Category Theory?”. Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy, 2006.

- [7] J. Munkres, Topology. Prentice Hall, 2009.
- [8] P. Newstead, Introduction to moduli problems and orbit spaces, 2013.
- [9] J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds. Springer, 2013.
- [10] T. Leinster, Basic category theory. Cambridge University Press, 2014.
- [11] T. Tao, “Yoneda’s lemma as an identification of form and function: the case study of polynomials,” *What’s new*, Aug. 25, 2023. <https://terrytao.wordpress.com/2023/08/25/yonedas-lemma-as-an-identification-of-form-and-function-the-case-study-of-polynomials/>
- [12] T. Wedhorn, Manifolds, sheaves, and cohomology. Springer Spektrum, 2016.