



UJAT

UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

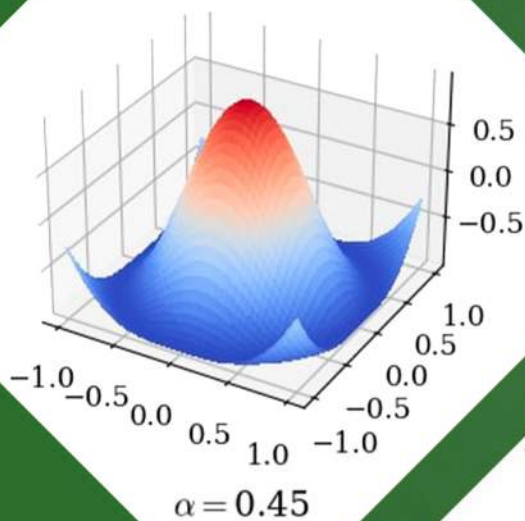
JOBS

Journal of Basic Sciences

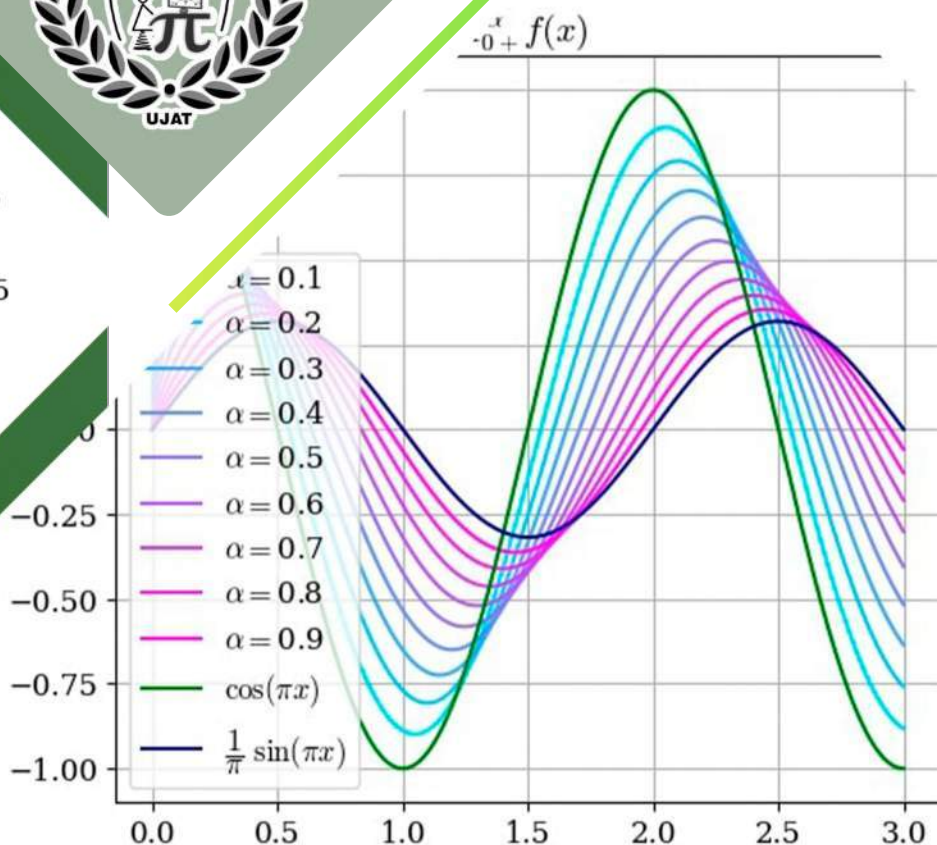
DACB • UJAT



$f(x, y) (\alpha = c)$



$-0^x + f(x)$



Con el número 30 del Journal of Basic Sciences, se inicia el volumen 11 de esta revista correspondiente al año 2025. El carácter multidisciplinario de esta revista, permite enriquecer su contenido con perspectivas variadas que abordan diversas problemáticas en el área de las ciencias básicas y disciplinas afines.

De esta forma, se presenta una contribución que desarrolló generalizaciones en cálculo multivariable para llegar a nuevas diferenciales totales fraccionarias, las cuales juegan un papel importante en la modelación de gran número de fenómenos. Por otro lado, se incluye también una aportación que trata sobre el desarrollo de un método para resolver la ecuación de transporte conservativa en dominios específicos, incluyendo su validación y prueba para demostrar sus capacidades.

Se incluye además, un reporte encaminado a mejorar la calidad de imágenes, mediante técnicas de discretización numérica presentando una evaluación cualitativa y cuantitativa de los resultados obtenidos. En otro orden de ideas, se centra la atención hacia el estudio de sistemas aleatorios y la complejidad en su modelación, mostrando un estudio inferencial para un proceso de Poisson mixto, que lleva a la obtención de expresiones para densidad predictiva.

Es innegable que el aprendizaje de las matemáticas representa un reto actual que no debe soslayarse. En este sentido, se incluye un estudio que muestra la relación entre el desarrollo de la memoria de trabajo y el aprendizaje de identidades trigonométricas por parte de jóvenes del nivel medio superior, mostrando los subcomponentes necesarios en el razonamiento para el aprendizaje de este tema. En otra contribución relativa a la matemática educativa, se presenta una propuesta para atender el aprendizaje de los polígonos por estudiantes de bachillerato, mediante una serie de actividades diseñadas ex profeso que permiten una mejora en la comprensión de la temática.

En un contexto diferente, está el estudio dirigido a evaluar la actividad antibacteriana de extractos de plantas del género *Cecropia*, de uso tradicional en el sureste mexicano, correlacionando esta propiedad con el perfil fitoquímico analizado. Se presenta además, una contribución encaminada a analizar el impacto, que en los últimos años, han ocasionado derrames petroleros en el sureste mexicano, con especial énfasis en la afectación a cultivos agrícolas.

La atención de problemas de salud está dada a través de dos artículos que forman parte de este número. Por un lado, se comparó la resistencia a la insulina a través de índices específicos en momentos anteriores y durante la pandemia de COVID-19; en otro aporte, se analiza la relación entre diversos factores de riesgo asociados a la población joven y la enfermedad de Chagas. Mientras que en el área de la ciencia de los materiales, se incluye una propuesta para la obtención de derivados de poliuretano, con un método eficiente y compacto.

De esta forma el Journal of Basic Sciences acerca a sus lectores al amplio panorama del quehacer científico.

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

CONSEJO EDITORIAL

- **Dr. Carlos Ernesto Lobato García.** Editor en Jefe. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7780>
- **Dr. Adib Abiu Silahua Pavón.** Gestor Editorial. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-5344-1430>

COMITÉ EDITORIAL

- **Mtra. Claudia Gisela Vázquez Cruz.** Editora Asociada. Actuaría. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0002-1791-5621>
- **Mtra. María Hortensia Almaguer Cantú.** Editora Asociada. Ciencias de la Computación. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0007-7839-9014>
- **Dr. José Arnold González Garrido.** Editor Asociado. Ciencias Farmacéuticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-1135-4050>
- **Dr. José Luis Benítez Benítez.** Editor Asociado. Física. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0009-0000-0561-5029>
- **Mtro. Guillermo Chávez Hernández.** Editor Asociado. Geofísica. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-3555-9678>
- **Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé.** Editora Asociada. Matemáticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-7342-0888>
- **Dra. Nancy Romero Ceronio.** Editora Asociada. Química. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-8169-3811>

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 30, abril de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. <https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs>. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación y de esta Casa Editora.

Las publicaciones respaldadas con el sello editorial de la UJAT no podrán utilizarse para entrenar modelos de IA generativa, a menos de que haya una declaración expresa, tanto de la Universidad como de los autores y/o herederos.

CONTENIDO

	Pag.
On Riemann-Liouville Operators for Functions of One and Several Variables	1-15
An unstructured finite-volume method for the two-dimensional conservative transport equation	16-31
Impacto de la discretización numérica del modelo de variación total de eliminación de ruido	32-44
Inferencia bayesiana sobre el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto-gamma	45-59
Memoria de trabajo y desempeño en demostración de identidades trigonométricas: Un modelo de ecuaciones estructurales	60-68
La visualización en la construcción de polígonos regulares por estudiantes de educación Media Superior	69-83
Perfil químico del extracto hidroalcohólico de <i>Cecropia</i> spp y su actividad antimicrobiana	84-92
Afectaciones en cultivos de Veracruz y Tabasco por derrame de petróleo en los últimos seis años	93-105

Evaluación de la resistencia a la insulina mediante el índice TyG: comparación prepandemia y pandemia de COVID-19	106-114
Relationship between risk factors and prevalence of Chagas disease in young people in Tabasco, Mexico	115-125
Metodología eficiente y compacta para la síntesis de Poliuretanos y Poliuretano-ureas Segmentados	126-135

On Riemann-Liouville Operators for Functions of One and Several Variables

Balcázar-Araiza, Roberto C.^{1,*}, Navarro-Soza, José M.¹

¹Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México

*a20216411@alumnos.uady.mx

Resumen

En esta contribución, presentamos generalizaciones de las integrales de trayectorias del Cálculo Multivariable para desarrollar nuevas diferenciales totales fraccionarias, extendiendo así las diferenciales clásicas para funciones definidas en espacios Euclidianos. Exploramos y discutimos varios ejemplos y propiedades básicas para los nuevos operadores. Además, concluimos con un análisis comparativo de los operadores propuestos de cara a los ya existentes en la literatura.

Keywords: *Integral fraccional, derivada fraccional, operadores, trayectoria, diferencial de camino, parcial, generalización.*

Abstract

In this contribution, we present generalizations of path integrals from Multivariable Calculus to develop new fractional total differentials, extending the classical differentials for functions defined on Euclidean spaces. We explore and discuss several examples and key properties of these novel operators. Additionally, we conclude with a comparative analysis of our proposed operators alongside existing ones found in the literature.

Keywords: *Fractional Integral, Fractional Derivative, Operators, Trajectory, Path, Differential, Partial, Generalization.*

Recibido: 24 de octubre de 2024. Aceptado: 17 de marzo de 2025. Publicado: 30 de abril de 2025.

1 Introduction

Fractional Calculus involves the analysis and application of differential and integral operators of arbitrary real or complex orders. Its origins trace back to mathematicians such as L'Hôpital and Leibniz. Since then, the field has experienced gradual yet steady growth (for a historical overview, see the introduction of [1], and additional data in Chapter 1 of [2]). Nowadays, Fractional Calculus plays a significant role in modeling a wide range of phenomena, including population dynamics [3, 4], electrical circuits [5, 6], epidemics [7, 8], and classical mechanics [9, 10], among others. The memory and non-locality properties of certain fractional operators [11], along with their potential to enhance the precision of models that traditionally rely on ordinary derivatives (e.g., [12, 13]), have driven the rapid expansion of both their study and application.

On the theoretical front, while substantial work has been done to demonstrate the potential of fractional operators across various fields (e.g., [1, 14, 15, 16]), much remains to be explored. For

instance, a comprehensive and unified theory of Fractional Differential Geometry has yet to be developed. Although several contributions have been made in this area (e.g., [17, 18, 19, 20, 21, 22]), we agree that the development of such a theory may require the identification of more suitable fractional operators tailored to Euclidean spaces and, by extension, to differentiable manifolds.

The literature presents a vast array of ways to define fractional differential operators, and over the past 30 years, the diversity of such operators has expanded almost daily (see [23] for a compilation of various fractional operators). In this paper, we focus exclusively on **Riemann-Liouville-type fractional operators**, which were first introduced in J. Liouville's work [24] and Riemann's posthumous contributions [25]. Since then, these operators have become a foundational paradigm for the development of many other fractional derivatives.

In this study, we begin by reviewing the fundamental definitions and properties of Riemann-Liouville fractional integrals and derivatives. Building upon the classical concept of trajectory integrals for scalar functions, we introduce and investigate new Riemann-Liouville fractional operators that generalize both the trajectory integral and the Riemann-Liouville operators for single-variable functions. Lastly, after analyzing some key properties, we recover fractional operators for multivalued functions that have been previously proposed in the literature.

2 Riemann-Liouville Fractional Calculus

2.1 Fractional Calculus of One Variable

The definition of Riemann-Liouville fractional derivatives requires a preliminar notion of fractional integration.

Definition 2.1 ([1], p. 33). *Let $f \in L^1([a, b])$ and $\alpha > 0$. The **Riemann-Liouville left fractional integral of f of order α at $x \in [a, b]$** is defined as the function*

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (1)$$

*Similarly, the **Riemann-Liouville right fractional integral of f of order α at $x \in [a, b]$** is given as*

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2)$$

A relationship between left and right fractional integrals can be obtained. For such purpose, let us define the *reflection operator* $Q : L^1([a, b]) \rightarrow L^1([a, b])$ as

$$Q(f(x)) = f(a+b-x).$$

Proposition 2.1. *For $f \in L^1([a, b])$, it is true that*

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = Q I_{a+}^{\alpha} Q f(x). \quad (3)$$

Proof. First, we see that

$$I_{a+}^{\alpha} Q f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} Q f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(a+b-t) dt.$$

If we let $u = a + b - t$, this change of variable transforms the integral into

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(a+b-t) dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+b-x}^b (x-a-b+u)^{\alpha-1} f(u) du \\ &= I_{b-}^{\alpha} f(a+b-x) \\ &= Q I_{b-}^{\alpha} f(x) \end{aligned}$$

and because $Q^2 f(x) = f(x)$, it follows that $I_{b-}^{\alpha} f(x) = Q I_{a+}^{\alpha} Q f(x)$. $\square$

Remark 2.1. In [1], Theorem 2.7, it is proved that for $f \in L^1([a, b])$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x)$$

almost everywhere (a.e.) in $[a, b]$ and considering Proposition 2.1,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$$

a.e. on $[a, b]$ too. For continuous functions on $[a, b]$, the foregoing limits hold everywhere on $[a, b]$ ([26], p. 66). In addition, it is known ([1], Theorem 2.6) that the (left and right) fractional integral of order α of $f \in L^1([a, b])$ (or $C([a, b])$) remains in $L^1([a, b])$ (resp. $C([a, b])$).

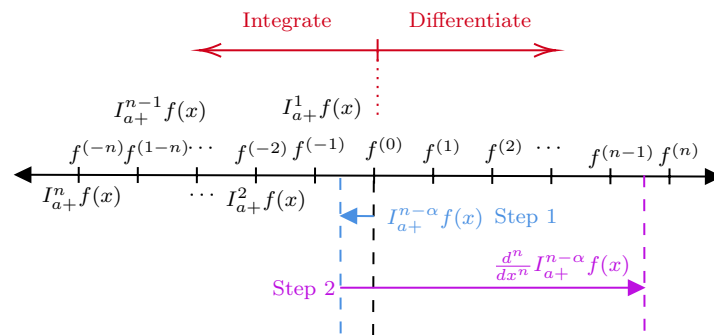


Figure 1: Graphical meaning behind Riemann-Liouville fractional derivatives' construction; forward steps correspond to differentiation and backward steps represent integration.

From Riemann-Liouville integration it is possible to construct a related fractional derivative: the intuitive idea is illustrated in Figure 1 and the corresponding definitions are given below. For the rest of the section, for any $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ is such that $n - 1 < \alpha \leq n$.

Definition 2.2 ([1], p. 37). Consider $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ and $f \in C^n([a, b])$. Define the **Riemann-Liouville left fractional derivative of f of order α at x** as

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) := \frac{d^n}{dx^n} I_{a+}^{n-\alpha} f(x). \quad (4)$$

and **Riemann-Liouville right fractional derivative of f of order α at x** is

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) := (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} I_{b-}^{n-\alpha} f(x). \quad (5)$$

As expected, an analogous result to Proposition 2.1 holds between the left and right pair of Riemann-Liouville differential operators.

Proposition 2.2. *The following relationships between left and right Riemann-Liouville fractional derivatives holds:*

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = Q D_{a+}^{\alpha} Q f(x) \quad (6)$$

Proof. It is easy to see that $(Qf)^{(n)}(x) = (-1)^n Qf^{(n)}(x)$. Hence, by definition and Proposition 2.1,

$$Q D_{a+}^{\alpha} Q f(x) = Q (I_{a+}^{n-\alpha} Q f(x))^{(n)} = (-1)^n (Q I_{a+}^{n-\alpha} Q f(x))^{(n)} = (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(x))^{(n)}.$$

□

A main property that distinguishes Riemann-Liouville integration from Riemann-Liouville differentiation ([27], Property 2.4) is the classical **semigroup property**, whose proof can be found in [28], Theorem 2.2.

Theorem 2.1. *Let $f \in L^1([a, b])$ and $\alpha, \beta > 0$. Then it follows that*

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) \quad \text{and} \\ I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) \end{aligned} \quad (7)$$

a.e. on $[a, b]$. Furthermore, if $\alpha + \beta \geq 1$ or $f \in C([a, b])$, the identities (7) hold everywhere on $[a, b]$.

Remark 2.2. *From Remark 2.1 it follows that*

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^-} D_{a+}^{\alpha} f(x) = D^n f(x) \quad (8)$$

and

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^-} D_{a+}^{\alpha} f(x) = (-1)^n D^n f(x). \quad (9)$$

As a consequence, it is custom to define $D_{a+}^n f(x) := D^n f(x)$ and $D_{b-}^n f(x) := (-1)^n D^n f(x)$.

The Riemann-Liouville fractional operators are clearly linear and reduce to the classical differential and integral operators when the order is an integer. However, these operators possess additional noteworthy properties. Among the many interesting characteristics they exhibit, we highlight a key result, proved in Lemmas 2.5, 2.21a, and 2.22 of [27], which extends the classical Fundamental Theorem of Calculus to the realm of Riemann-Liouville fractional derivatives.

Theorem 2.2. *Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ and $\alpha > 0$.*

1. If $f \in C([a, b])$, then

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) \quad \text{and} \quad D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x). \quad (10)$$

2. For $f \in C^n([a, b])$, the following identities hold for any $x \in [a, b]$:

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{a+}^{\alpha-k} f(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x - a)^{\alpha-k}, \quad (11)$$

$$I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k D_{b-}^{\alpha-k} f(b)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (b - x)^{\alpha-k}. \quad (12)$$

Example 2.1. Let us consider $f(x) = \cos(\omega x)$ with $\omega \neq 0$. Using Theorems 2.7 and 2.15 from [28] with the Taylor series of $f(x)$ around zero, it can be proved that

$$I_{0+}^{\alpha} f(x) = x^{\alpha} E_{2,1+\alpha}(-\omega^2 x^2) \text{ and } D_{0+}^{\beta} f(x) = x^{-\beta} E_{2,1-\beta}(-\omega^2 x^2) \quad (13)$$

for $x > 0$, $\alpha > 0$ and $0 < \beta < 1$, where the expression $E_{r,s}(x)$ stands for the so-called **two-parameter Mittag-Leffler function**

$$E_{r,s}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(rn + s)}.$$

It is known (Theorem 4.1 from [28]) that a sufficient condition for the uniform convergence of such function for any $x > 0$ is $r, s > 0$ (this is a reason why we considered $\beta \in (0, 1)$). Some particular cases are shown in Figure 2.

2.2 Fractional Calculus of Several Variables

Similar to the univariate case, there is no single, widely accepted convention in the literature regarding the definition of fractional integrals and derivatives for real functions defined on subsets of $\mathbb{R}^m$ (for example, see [1], Chapter 5, which discusses several different approaches). To address this, and to properly recover the classical integer-order differentials from Multivariable Calculus, we introduce new multivariable fractional operators inspired by those proposed in [29].

From [30, p. 401] we remember that the path integral of $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ over a continuously differentiable curve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ (also known as the line integral of f with respect to the arc length of γ) is defined as

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Notice that when we reduce the dimension of the ambient space to $m = 1$, we recover the classical integral over some interval $[a, b]$, where the line segment connecting the values a and b plays the role of the curve γ . We would like to work with an analogous fractional integral, depending on the path γ . In this sense, let

$$I^1(f \circ \gamma)(t^*) := \int_{t_0}^{t^*} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

for some $t^* \in [t_0, t_1]$ and let $I^n(f \circ \gamma)(t^*)$ for $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ be defined recursively as $I^n(f \circ \gamma)(t^*) := I^{n-1}(I^1(f \circ \gamma))(t^*)$.

Theorem 2.3. For $f \in C(U)$ with $U \subseteq \mathbb{R}^m$ open and path-connected, $\gamma \in C^1([t_0, t_1], U)$ and $t^* \in [t_0, t_1]$, the following Cauchy-type iterated integration formula holds:

$$I^n(f \circ \gamma)(t^*) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{n-1} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt, \quad (14)$$

where $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt$ stands for the arc length of γ at t .

Proof. It follows by induction: it is true for $n = 1$ by definition and we suppose that it is true for $n - 1$. Thus,

$$\begin{aligned}
 I^n(f \circ \gamma)(t^*) &= I^{n-1}(I^1(f \circ \gamma))(t^*) \\
 &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{t_0}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{n-2} I^1(f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt \\
 &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{t_0}^{t^*} \int_{t_0}^t [s(t^*) - s(t)]^{n-2} f \circ \gamma(\tau) \|\gamma'(\tau)\| \|\gamma'(t)\| d\tau dt \\
 &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{t_0}^{t^*} \int_{\tau}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{n-2} f \circ \gamma(\tau) \|\gamma'(\tau)\| \|\gamma'(t)\| dt d\tau \\
 &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{t_0}^{t^*} f \circ \gamma(\tau) \|\gamma'(\tau)\| \left(\int_{\tau}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{n-2} \|\gamma'(t)\| dt \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{t_0}^{t^*} f \circ \gamma(\tau) \|\gamma'(\tau)\| \left(\int_{t^*}^{\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{[s(t^*) - s(t)]^{n-1}}{n-1} \right) dt \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t^*} [s(t^*) - s(\tau)]^{n-1} f \circ \gamma(\tau) \|\gamma'(\tau)\| d\tau
 \end{aligned}$$

and the theorem follows. $\square$

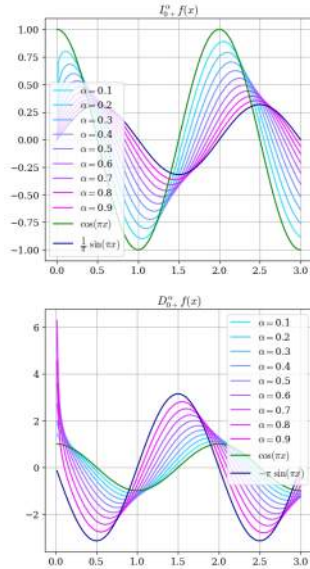


Figure 2: Some left Riemann-Liouville integrals and derivatives for Example 2.1.

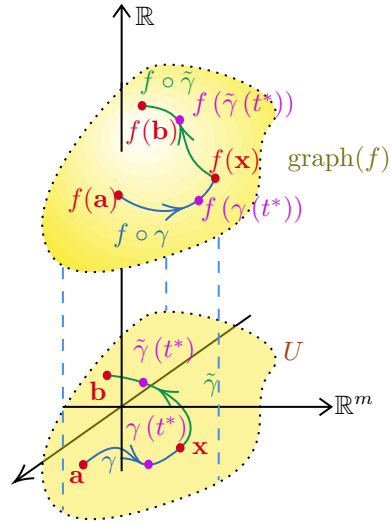


Figure 3: Geometrical motivation for a definition of Riemann-Liouville fractional integration on $\mathbb{R}^m$.

For the rest of the section, let $U \subseteq \mathbb{R}^m$ be some open and path-connected set and let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ be fixed points. In addition, for each $\mathbf{x} \in U$ let $\gamma, \tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow U$ be regular ($\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ and $\tilde{\gamma}'(t) \neq \mathbf{0}$) and continuously differentiable curves with $\gamma(t_0) = \mathbf{a}$, $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_0) = \mathbf{x}$ and $\tilde{\gamma}(t_1) = \mathbf{b}$ (Figure 3). Also, when it may be convenient, we will drop the tilde from the curve $\tilde{\gamma}$, in order to distinguish future definitions and results by the signs $+$ and $-$. In this way, based on equation (14), we propose the following definition.

Definition 2.3. Let $\alpha > 0$ and $f \in C(U)$. For $t^* \in [t_0, t_1]$, the **Riemann-Liouville left fractional integral of f of order α at $\gamma(t^*)$ along γ** is defined as

$$I_+^\alpha(f \circ \gamma)(t^*) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{\alpha-1} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \quad (15)$$

and the **Riemann-Liouville right fractional integral of f of order α at $\tilde{\gamma}(t^*)$ along $\tilde{\gamma}$** is given by

$$I_-^\alpha(f \circ \tilde{\gamma})(t^*) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t^*}^{t_1} [\tilde{s}(t) - \tilde{s}(t^*)]^{\alpha-1} f(\tilde{\gamma}(t)) \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt. \quad (16)$$

Here, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ and $\tilde{s}(t) = \int_{t_0}^t \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau$ are the arc-lengths of γ and $\tilde{\gamma}$ at the parameter t , respectively. In particular, we denote

$$I_{\gamma+}^\alpha f(\mathbf{x}) := I_+^\alpha(f \circ \gamma)(t_1) \quad (17)$$

and

$$I_{\tilde{\gamma}-}^\alpha f(\mathbf{x}) := I_-^\alpha(f \circ \tilde{\gamma})(t_0). \quad (18)$$

Proposition 2.3. Under the hypotheses of Definition 2.3, we can express (17,18) as

$$I_{\gamma+}^\alpha f(\mathbf{x}) = [s(t_1)]^\alpha I_{0+}^\alpha \varphi(1) \quad (19)$$

and

$$I_{\tilde{\gamma}-}^\alpha f(\mathbf{x}) = [\tilde{s}(t_1)]^\alpha I_{1-}^\alpha \tilde{\varphi}(0), \quad (20)$$

respectively, where $\varphi, \tilde{\varphi} \in C([0, 1])$ are defined as

$$\varphi(t) := f[\gamma(s^{-1}(s(t_1)t))] \quad \text{and} \quad \tilde{\varphi}(t) := f[\tilde{\gamma}(\tilde{s}^{-1}(\tilde{s}(t_1)t))],$$

respectively.

Proof. Because γ and $\tilde{\gamma}$ are assumed to be regular on $[t_0, t_1]$, both $\frac{ds}{dt}$ and $\frac{d\tilde{s}}{dt}$ are nonzero, whence s and $\tilde{s}$ are invertible on (t_0, t_1) by the classical inverse function theorem (e.g. p. 197 from [31]). Hence, we can apply the respective variable changes $w = \frac{s(t)}{s(t^*)}$ and $w = \frac{\tilde{s}(t) - \tilde{s}(t^*)}{\tilde{s}(t_1) - \tilde{s}(t^*)}$ to the integrals (15,16) and it is true that

$$I_+^\alpha(f \circ \gamma)(t^*) = s(t^*)^\alpha I_{0+}^\alpha \varphi(1) \quad (21)$$

and

$$I_-^\alpha(f \circ \tilde{\gamma})(t^*) = [\tilde{s}(t_1) - \tilde{s}(t^*)]^\alpha I_{1-}^\alpha \tilde{\varphi}(0), \quad (22)$$

with $\varphi(t) = f[\gamma(s^{-1}(s(t^*)t))]$ and $\tilde{\varphi}(t) = f[\tilde{\gamma}(\tilde{s}^{-1}((1-t)\tilde{s}(t^*) + \tilde{s}(t_1)t))]$. Finally, by considering $t^* = t_1$ and $t^* = t_0$, respectively, we get (19, 20). $\square$

The extension proposed in Definition 2.3 also satisfies a semigroup-like property, which simultaneously extends Theorem 2.1.

Theorem 2.4. Set $f \in C(U)$. Under the assumptions of Definition 2.3, it is true that

$$I_{\gamma\pm}^\alpha I_{\gamma\pm}^\beta f(\mathbf{x}) = I_{\gamma\pm}^{\alpha+\beta} f(\mathbf{x}). \quad (23)$$

Proof. In order to prove this result, we follow the same approach as the one used for Theorem 2.2 from [28]. Let us start with the left case. By a direct computation and the use of Fubini's theorem (c.f. [32, Corollary 7]), we have that

$$\begin{aligned} I_{\gamma+}^{\alpha}(I_{\gamma+}^{\beta}f \circ \gamma)(t^*) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{\alpha-1} I_{\gamma+}^{\beta}f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^{t^*} \int_{t_0}^t [s(t^*) - s(t)]^{\alpha-1} [s(t) - s(\tau)]^{\beta-1} f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| \|\gamma'(t)\| d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^{t^*} \int_{\tau}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{\alpha-1} [s(t) - s(\tau)]^{\beta-1} f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| \|\gamma'(t)\| dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^{t^*} f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| \left(\int_{\tau}^{t^*} [s(t^*) - s(t)]^{\alpha-1} [s(t) - s(\tau)]^{\beta-1} \|\gamma'(t)\| dt \right) d\tau. \end{aligned}$$

The variable change $w := \frac{s(t^*)-s(t)}{s(t^*)-s(\tau)}$ turns the inner integral of the last line into

$$[s(t^*) - s(\tau)]^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta),$$

where $B(\alpha, \beta)$ is the beta function

$$B(a, b) = \int_0^1 w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw$$

and by the multiplicative identity

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

(c.f. [33, p. 521]) we obtain $I_{\gamma+}^{\alpha+\beta}(f \circ \gamma)(t^*)$. Finally, letting $t^* = t_1$ we find (23) for the left case. The proof for the right identity can be carried out similarly, by considering the variable change $w := \frac{\tilde{s}(t)-\tilde{s}(t^*)}{\tilde{s}(\tau)-\tilde{s}(t^*)}$. $\square$

The following result generalizes Remark 2.1.

Theorem 2.5. *Let $f \in C(U)$ and $\alpha > 0$. We have that*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{\gamma\pm}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (24)$$

Proof. It is a direct consequence of Remark 2.1 and Definition 2.3, because

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{\gamma+}^{\alpha} f(\mathbf{x}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [s(t_1)]^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} \varphi(1) = 1 \cdot \varphi(1) = f(\mathbf{x}), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{\tilde{\gamma}-}^{\alpha} f(\mathbf{x}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\tilde{s}(t_1)]^{\alpha} I_{1-}^{\alpha} \tilde{\varphi}(0) = 1 \cdot \tilde{\varphi}(0) = f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

$\square$

Remark 2.3. *Analogously to Remark 2.1, the previous result allows us to adopt the conventions $I_{\gamma\pm}^0 f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})$.*

Example 2.2. *Let us consider $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $f(\mathbf{x}) = \cos(\omega \|\mathbf{x}\|)$ and let $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ be the straight line $\gamma(t) = \|\mathbf{x}\|t$. Given that $s(t) = \|\mathbf{x}\|t$, $\|\gamma'(t)\| = \|\mathbf{x}\|$ and $f(\gamma(s^{-1}(s(1)t))) = f(t\mathbf{x})$, the computation of $I_{\gamma+}^{\alpha} f(\mathbf{x})$ for $\alpha > 0$ yields the following, using Proposition 2.3 and Example 2.1:*

$$I_{\gamma+}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{\alpha} E_{2,1+\alpha}(-\omega^2 \|\mathbf{x}\|^2). \quad (25)$$

Some plots are shown in Figure 4 for $m = 2$ and $\omega = \pi$.

From Multivariable Calculus it is known (e.g. [34, p. 192]) that for $f \in C^k(U)$ with $U \subseteq \mathbb{R}^m$ open, the total differential of f of order k at $\mathbf{x} \in U$ constitutes a symmetric¹ k -tensor $D^k f(\mathbf{x}) : \prod_{i=1}^k T_{\mathbf{x}}U \rightarrow \mathbb{R}$ with explicit expression²

$$D^k f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m v_{1,i_1} \cdots v_{k,i_k} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

We can use this fact and the Riemann-Liouville multivariable integrals from Definition 2.3 to introduce a multivariable generalization of Riemann-Liouville fractional derivatives (4,5), which simultaneously generalizes the total differential of k -th order to real positive orders.

Definition 2.4. Take $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ such that $k - 1 < \alpha < k$ and f such that $I_+^{k-\alpha} f \circ \gamma$ and $I_-^{k-\alpha} f \circ \gamma$ belong to $C^k(U)$. For $t^* \in [t_0, t_1]$, the **Riemann-Liouville left differential of order α of f at $\gamma(t^*)$ along γ** is

$$D_+^\alpha (f \circ \gamma)(t^*)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := D^k I_+^{k-\alpha} (f \circ \gamma)(t^*)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k). \quad (26)$$

and the **Riemann-Liouville right differential of f of order α at $\tilde{\gamma}(t^*)$ along $\tilde{\gamma}$** is given by

$$D_-^\alpha (f \circ \tilde{\gamma})(t^*)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := (-1)^k D^k I_-^{k-\alpha} (f \circ \tilde{\gamma})(t^*)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k). \quad (27)$$

In particular, for $t^* = t_1$ and $t^* = t_0$, we respectively denote

$$D_{\gamma+}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := D_+^\alpha (f \circ \gamma)(t_1)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \quad (28)$$

and

$$D_{\tilde{\gamma}-}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := D_-^\alpha (f \circ \tilde{\gamma})(t_0)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k). \quad (29)$$

As a special case $\alpha \in (0, 1]$ (also known among the literature as the *regime of low orders*), our definition of the total differential reduces to the computation of a usual gradient:

$$D_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) := \langle \nabla I_{\gamma\pm}^{1-\alpha} f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle. \quad (30)$$

Remark 2.4. The notions we proposed in Definition 2.4 could allow us to provide a nice approach that extends the classical Taylor expansion for (sufficiently) smooth functions on open sets around points in Euclidean spaces. In fact, from Theorem 2.5, it follows that

$$\lim_{\alpha \rightarrow k^-} D_{\gamma+}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = D^k f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \quad (31)$$

and

$$\lim_{\alpha \rightarrow k^-} D_{\tilde{\gamma}-}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = (-1)^k D^k f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k). \quad (32)$$

Hence, for $n \in \mathbb{N}$ we define

$$D_{\gamma+}^n f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := D^n f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

and

$$D_{\tilde{\gamma}-}^n f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := (-1)^n D^n f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

¹Due to the commutativity of mixed partial derivatives when $k \geq 2$.

² $T_{\mathbf{x}}U$ is the so-called **tangent space to U at $\mathbf{x}$** and geometrically, it can be thought as the product space $\{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}^m$.

As a generalization of equations (10) in Theorem 2.2, we have the following result for low orders.

Theorem 2.6. For $f \in C(U)$ and $\alpha \in (0, 1]$, if $\mathbf{v} := \gamma'(t_1)$, then

$$D_{\gamma\pm}^\alpha I_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right) = f(\mathbf{x}). \quad (33)$$

Proof. By definitions (26) and (27), Theorem 2.1 and the classical multivariable chain rule (e.g. [30, Theorem 8.8]),

$$D_{\pm}^\alpha I_{\pm}^\alpha (f \circ \gamma)(t^*) (\gamma'(t^*)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial (I_{\pm}^1(f \circ \gamma)(t^*))}{\partial x_i} \gamma'_i(t^*) = \frac{d}{dt} (I_{\pm}^1(f \circ \gamma)(t)) \Big|_{t=t^*} = \|\gamma'(t^*)\| f(\gamma(t^*)).$$

If we set $t^* = t_1$ for the left case and $t^* = t_0$ in the right case, the theorem follows. $\square$

We must mention that, due to Theorems 2.5, 2.1, 2.6 and Remark 2.4, the family of operators $\{D_{\gamma\pm}^\alpha, I_{\gamma\pm}^\alpha\}$ for $\alpha \in (0, 1]$ satisfies the desiderata for fractional integrals and derivatives proposed by Hilfer and Luchko in [35], which supports the validity of Definitions 2.3 and 2.4.

A definition for Riemann-Liouville (left and right) partial derivatives results immediately from equations (30):

$$\frac{\partial_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} := D_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{e}}_{i_1}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{i_m}) = (\pm 1)^k \frac{\partial^k (I_{\gamma\pm}^{k-\alpha} f(\mathbf{x}))}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} \quad (34)$$

As a consequence, by linearity of the ordinary partial derivatives and the fractional integrals from Definition 2.3, we can express the left and right differentials of order α explicitly as

$$D_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m v_{1,i_1} \cdots v_{k,i_k} \frac{\partial_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} \quad (35)$$

In particular, for $0 < \alpha \leq 1$,

$$D_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \langle \nabla_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle \quad (36)$$

where we have naturally defined the **left and right Riemann-Liouville gradient vectors of order α at $\mathbf{x}$ along γ** as

$$\nabla_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right). \quad (37)$$

Definition (37) motivates a generalization of the classical Jacobian matrix for continuously differentiable functions $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Definition 2.5. Let $\alpha_i \in (0, 1]$ for $i = 1, \dots, p$ and $f \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$. The **left and right Riemann-Liouville Jacobian matrices of order $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$** are defined as

$$J_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial_{\gamma\pm}^{\alpha_i} f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{p,m} \quad (38)$$

If we define the Riemann-Liouville fractional differential of $f \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ of order α as the vector function

$$D_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x}) := (D_{\gamma\pm}^{\alpha_1} f_1(\mathbf{x}), \dots, D_{\gamma\pm}^{\alpha_p} f_p(\mathbf{x})), \quad (39)$$

then for $\alpha_i \in (0, 1]$, the Riemann-Liouville Jacobian matrices (39) of order α are the associated matrices of the linear transformations defined by $D_{\gamma\pm}^\alpha f(\mathbf{x})(\mathbf{v})$ with respect to the canonical basis.

Example 2.3. Let $f(\mathbf{x}) = \cos(\omega\|\mathbf{x}\|)$, $\alpha \in (0, 1)$ and assume the rest of hypotheses from Example 2.2. Then it follows that

$$I_{\gamma+}^{1-\alpha} f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-\omega^2\|\mathbf{x}\|^2).$$

By Theorem 2.15 from [28], we can differentiate the foregoing series termwise. For such purpose, it is important to know that for any $\beta \in \mathbb{R}$ and $i = 1, \dots, m$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|\mathbf{x}\|^\beta = \beta \|\mathbf{x}\|^{\beta-2} x_i.$$

Hence, it results that for each $i = 1, \dots, n$ and $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\frac{\partial_{\gamma+}^\alpha f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|^{1+\alpha}} E_{2,1-\alpha}(-\omega^2\|\mathbf{x}\|^2). \quad (40)$$

Therefore,

$$\nabla_{\gamma+}^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{1+\alpha}} E_{2,1-\alpha}(-\omega^2\|\mathbf{x}\|^2) \mathbf{x}. \quad (41)$$

Some plots of the Riemann-Liouville partial derivatives of f along γ are shown in Figure 5, for $m = 2$ and $\omega = \pi$ as in Example 2.2.

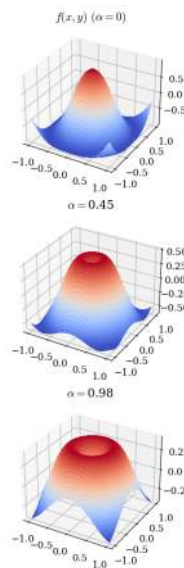


Figure 4: Example for the Riemann-Liouville path integral of some orders α for the function of Example 2.2.

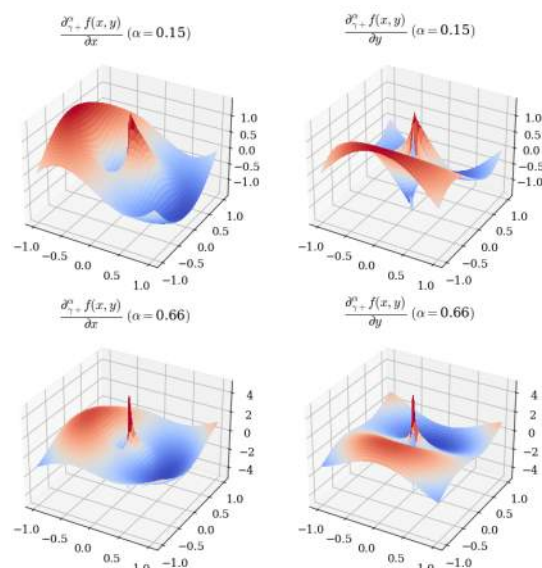


Figure 5: Graphs of some fractional partial derivatives of the function chosen in Example 2.3.

Remark 2.5. To conclude this section, we point out that our definitions recover some already proposed throughout the literature: for example, the Cheng-Dai fractional integrals proposed in [29] result as a particular case of ours; such operators are defined over straight lines analogously to our Examples 2.2 and 2.3: specifically, let $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ be defined as $\gamma(t) = \mathbf{a} + (\mathbf{x} - \mathbf{a})t$ for some $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ in the convex domain $U \subseteq \mathbb{R}^m$ of some $f \in C(U)$. Then the **Cheng-Dai fractional integral of f at $\mathbf{x}$ of order $\alpha > 0$ along the directed segment γ** is given as

$$\mathcal{I}_{\mathbf{a}}^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(\gamma(t)) dt. \quad (42)$$

It is easy to see that for such choice of γ for each $\mathbf{x}$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{a}}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{-\alpha} I_{\gamma+}^{\alpha} f(\mathbf{x}), \quad (43)$$

which can be verified using Proposition 2.3. On the other hand, more commonly, an accepted definition for the Riemann-Liouville partial fractional operators can be found in various sources, such as section 2.9 from [27], [14, p. 251], section 24.2 from [1] or the article [17]:

$$\mathbb{I}_{a_i+}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_i}^{x_i} \frac{f(x_1, \dots, \overbrace{t}^i, \dots, x_m)}{(x_i - t)^{1-\alpha}} dt, \quad (44)$$

whence a Riemann-Liouville partial fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$ can be constructed:

$$\mathbb{D}_{a_i+}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbb{I}_{a_i+}^{1-\alpha} f(\mathbf{x})}{\partial x_i}. \quad (45)$$

For the previous notions to be defined, it is custom to have $U \supseteq \prod_{i=1}^m [a_i, x_i]$. Now it is easy to see that if $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the line segment $\gamma(t) = (a_i + (x_i - a_i)t)\hat{\mathbf{e}}_i$, $\mathbb{I}_{a_i+}^{\alpha} f(\mathbf{x})$ and $\mathbb{D}_{a_i+}^{\alpha} f(\mathbf{x})$ can be expressed as

$$\mathbb{I}_{a_i+}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = I_{\gamma+}^{\alpha} f(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \mathbb{D}_{a_i+}^{\alpha} f(\mathbf{x}) = D_{\gamma+}^{\alpha} f(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{e}}_i). \quad (46)$$

3 Conclusions

Although Fractional Calculus has undergone an extensive study and development since its beginning, the formulation of a comprehensive theory of Fractional Differential Geometry remains as an open challenge, crucial for enhancing our understanding of Fractional Calculus. With this goal in mind, we revisited fundamental concepts related to Riemann-Liouville fractional operators and, drawing from the classical idea of path integration for scalar fields, we extended the Riemann-Liouville fractional integration and differentiation to multivariable scalar functions. As a fruitful result, a fractional generalization of a total differential was obtained. Additionally, we explored the core properties of these generalized operators and recovered various Riemann-Liouville-type definitions from existing literature, thereby contributing to the broader understanding and potential application of Fractional Calculus in multivariable contexts. A deeper analysis of the proposed operators is to be done in future contributions.

4 Acknowledgements

The authors appreciate the valuable suggestions from the referees and the constant follow-up from the JOBS editors. Last but not least, the first author would like to express his acknowledgements to SECIHTI (No. of CVU 1312206) for the financial support throughout his master degree program.

5 Conflict of Interest

The authors declare no conflicts of interest.

6 Artificial Intelligence Usage Statement

The authors declare that they have not used any generative artificial intelligence applications, software or websites for the writing of the present paper, the design of tables and figures or the analysis and interpretation of the data.

7 Graphical Abstract

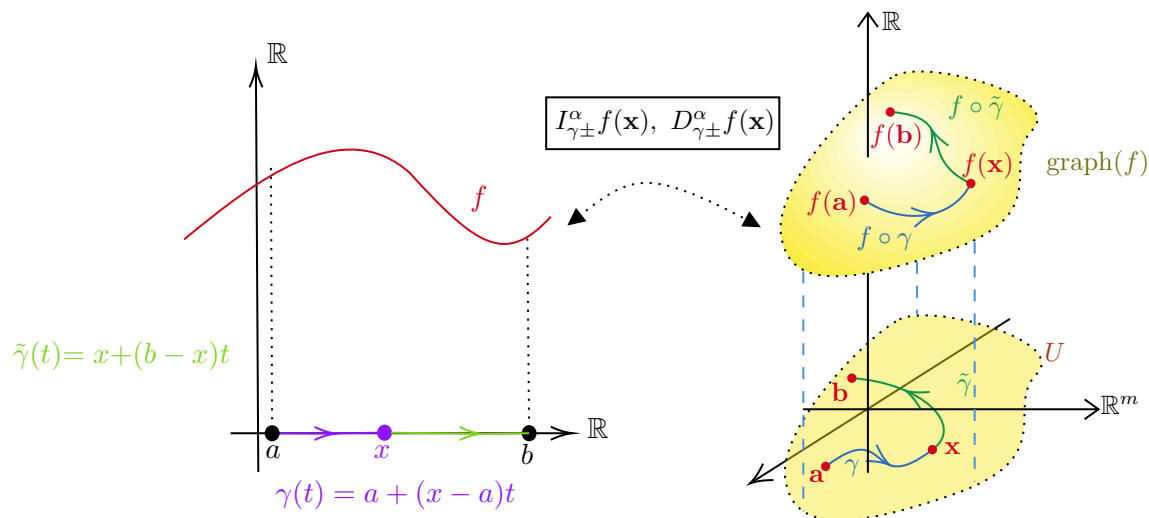


Figure 6: Graphical abstract for the present work.

References

- [1] Stefan G. Samko, Anatoly A. Kilbas, and Oleg I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon & Breach Science Publishers, 1993.
- [2] Anatoly Kochubei and Y. Luchko, Eds., *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, vol. 1, 8 vols. Berlin/Boston: De Gruyter, 2019.
- [3] M. A. Aziz-Alaoui, "Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 14, no. 8, pp. 1275-1293, Nov. 2002, doi: 10.1016/S0960-0779(02)00079-6.
- [4] H.-L. Li, L. Zhang, C. Hu, Y.-L. Jiang, and Z. Teng, "Dynamical analysis of a fractional-order predator-prey model incorporating a prey refuge", *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 54, no. 1?2, pp. 435-449, Jun. 2017, doi: 10.1007/s12190-016-1017-8.
- [5] F. Gómez, J. Rosales, and M. Guía, "RLC electrical circuit of non-integer order", *Open Physics*, vol. 11, no. 10, pp. 1361-1365, Oct. 2013, doi: 10.2478/s11534-013-0265-6.
- [6] J. F. Gomez-Aguilar, T. Cordova-Fraga, J. E. Escalante-Martínez, C. Calderon-Ramon, and R. F. Escobar-Jimenez, "Electrical circuits described by a fractional derivative with regular Kernel", *Rev. Mex. Fis.*, 2016.

- [7] S. Soulaïmani and A. Kaddar, "Analysis and Optimal Control of a Fractional Order SEIR Epidemic Model With General Incidence and Vaccination", *IEEE Access*, vol. 11, pp. 81995-82002, 2023, doi: 10.1109/ACCESS.2023.3300456.
- [8] S. Mangal, O. P. Misra, and J. Dhar, "Modeling infectious respiratory diseases considering fear effect and latent period", *Results in Control and Optimization*, vol. 16, p. 100439, Sep. 2024, doi: 10.1016/j.rico.2024.100439.
- [9] S. Borjon-Espejel, J. E. Escalante-Martinez, and P. Padilla-Longoria, "Newtonian gravity and MOND: a fractional Fourier approach", *Indian J Phys*, vol. 96, no. 12, pp. 3405-3411, Oct. 2022, doi: 10.1007/s12648-022-02296-1.
- [10] J. Mendiola-Fuentes, E. Guerrero-Ruiz, and J. Rosales-García, "Multivariate Mittag-Leffler Solution for a Forced Fractional-Order Harmonic Oscillator", *Mathematics*, vol. 12, no. 10, p. 1502, May 2024, doi: 10.3390/math12101502.
- [11] V. E. Tarasov and S. S. Tarasova, "Fractional Derivatives and Integrals: What Are They Needed For?", *Mathematics*, vol. 8, no. 2, p. 164, Jan. 2020, doi: 10.3390/math8020164.
- [12] S. T. Mohyud-Din, A. Ali, and B. Bin-Mohsin, "On biological population model of fractional order", *Int. J. Biomath.*, vol. 09, no. 05, p. 1650070, Sep. 2016, doi: 10.1142/S1793524516500704.
- [13] X. Zhou, Y. Mao, C. Zhang, and Q. He, "A Comprehensive Performance Improvement Control Method by Fractional Order Control", *IEEE Photonics J.*, vol. 10, no. 5, pp. 1-11, Oct. 2018, doi: 10.1109/JPHOT.2018.2865032.
- [14] V. E. Tarasov, *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*. in *Nonlinear physical science*. Beijing: Higher Education Press, 2010.
- [15] V. E. Tarasov, "General Fractional Calculus in Multi-Dimensional Space: Riesz Form", *Mathematics*, vol. 11, no. 7, p. 1651, Mar. 2023, doi: 10.3390/math11071651.
- [16] M. Al-Refai and Y. Luchko, "The General Fractional Integrals and Derivatives on a Finite Interval", *Mathematics*, vol. 11, no. 4, p. 1031, Feb. 2023, doi: 10.3390/math11041031.
- [17] T. Yajima and H. Nagahama, "Differential geometry of viscoelastic models with fractional-order derivatives", *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 43, no. 38, p. 385207, Sep. 2010, doi: 10.1088/1751-8113/43/38/385207.
- [18] T. Yajima and K. Yamasaki, "Geometry of surfaces with Caputo fractional derivatives and applications to incompressible two-dimensional flows", *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 45, no. 6, p. 065201, Feb. 2012, doi: 10.1088/1751-8113/45/6/065201.
- [19] G. Calcagni, "Geometry of fractional spaces", *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 16, no. 2, pp. 549-644, 2012, doi: 10.4310/ATMP.2012.v16.n2.a5.
- [20] W. Saleh, "Fractional Order Riemann Curvature Tensor in Differential Geometry", *Int. J. Anal. Appl.*, vol. 20, p. 26, May 2022, doi: 10.28924/2291-8639-20-2022-26.
- [21] M. Ögrenmis, "Geometry of Curves with Fractional Derivatives in Lorentz Plane", *Journal of New Theory*, no. 38, pp. 88-98, Mar. 2022, doi: 10.53570/jnt.1087800.

- [22] F. R. Lopez and O. Rubio, "A New Fractional Curvature Of Curves Using The Caputo's Fractional Derivative", *Advanced Mathematical Models & Applications*, vol. 8, no. 2, pp. 157-175, 2023.
- [23] G. Sales Teodoro, J. A. Tenreiro Machado, and E. Capelas De Oliveira, "A review of definitions of fractional derivatives and other operators", *Journal of Computational Physics*, vol. 388, pp. 195-208, Jul. 2019, doi: 10.1016/j.jcp.2019.03.008.
- [24] J. Liouville, "Mémoire sur quelques questions de géometrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions", *J. l'Ecole Roy. Polytechn.*, vol. 13, pp. 1-69, 1832.
- [25] B. Riemann, "Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation", *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher*, pp. 331-344, 1876.
- [26] Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications*, vol. 198. in *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 198. United States of America: Academic Press, 1999.
- [27] Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory And Applications of Fractional Differential Equations*. in *North-Holland Mathematical Studies*, no. 204. Elsevier, 2006.
- [28] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, vol. 2004. in *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2004. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2.
- [29] J. Cheng and W. Dai, "Fractional Vector Taylor and Cauchy Mean Value Formulas", *Journal of Fractional Calculus and Applications*, vol. 11, no. 2, pp. 130-147, Jul. 2020.
- [30] Tom M. Apostol, *Calculus II: Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y las probabilidades*, 2nd ed., vol. 2, 2 vols. España: Editorial Reverté, 1976.
- [31] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*. in *Universitext*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015. doi: 10.1007/978-3-662-48792-1.
- [32] Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4th ed. China Machine Press, 2010.
- [33] G. B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th ed. Boston: Elsevier, 2005.
- [34] Lynn H. Loomis and Shlomo Sternberg, *Advanced Calculus*. Jones and Bartlett Publishers, 1990.
- [35] R. Hilfer and Y. Luchko, "Desiderata for Fractional Derivatives and Integrals", *Mathematics*, vol. 7, no. 2, p. 149, Feb. 2019, doi: 10.3390/math7020149.

An unstructured finite-volume method for the two-dimensional conservative transport equation

Itzá Balam, Reymundo^{1,2*} , Uh Zapata, Miguel^{1,2} 

¹Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), México.

²Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT), Unidad Mérida, PCTY, Sierra Papacal,
C.P. 97302, Mérida, Yucatán, México

*reymundo.itza@cimat.mx

Resumen

En este artículo presentamos un método de segundo orden de precisión tanto temporal como espacial, para resolver la ecuación de transporte conservativa en dominios bidimensionales. La discretización espacial se basa en un enfoque de volumen finito que utiliza celdas triangulares arbitrarias. Se emplea el método θ para la integración temporal. Se propone un esquema de segundo orden del tipo *upwind* con una formulación de limitador de flujo para la disminución de extremos locales para aproximar los términos advectivos. El método numérico se valida con casos de prueba clásicos de advección, que incluyen diferentes funciones características y tipos de mallas. Finalmente, se realizan varias pruebas para demostrar las capacidades del esquema propuesto.

Palabras claves: Método de volúmenes finitos, ecuación de transporte conservativa, malla no estructurada, esquema *upwind*, segundo orden de precisión, limitador de flujo.

Abstract

In this paper, we present a second-order, time- and space-accurate method for solving conservative transport equation in two-dimensional domains. The spatial discretization is based on a finite volume approach using triangular cells of arbitrary shape. A θ -method is employed for the time integration. A second-order upwind scheme with a Local Extremum Diminishing flux limiter formulation is proposed to approximate the advective terms. The numerical method is validated against classical advection test cases, including different characteristic functions and type of grids. Finally, several tests are conducted to demonstrate the capabilities of the proposed scheme.

Keywords: Finite-volume method, conservative transport equation, unstructured grid, upwind scheme, second order of accuracy, flux limiter.

Recibido: 7 de noviembre de 2024. Aceptado: 29 de enero de 2025. Publicado: 30 de abril de 2025.

1 Introduction

A wide range of natural and industrial applications involve the conservative transport equation [1]. In fluid mechanics, for example, it plays a crucial role in solving the Navier-Stokes equations. Additionally, it is essential for modeling multi-phase flows employing interface-capturing methods such as the level set method [2, 3, 4, 5]. In general, interface-capturing methods are based on the spatial discretization of a characteristic function to distinguish between two regions, and the position of the interface is computed at each time step by solving an advection equation.

On the other hand, unstructured grids allow applications to geophysical flows of arbitrary two-dimensional (2D) geometries with the presence of many obstacles, which is in general hard to achieve on structured grids. Most of the methods used for the transport equation with unstructured grids have been developed in the framework of finite-element method. However, the finite-volume method (FVM) is attractive due to its local conservation property, which is not the case for standard finite-difference or finite-element methods.

The literature that involve numerical interface-capturing methods applying a finite-volume approach is limited on unstructured grids [6, 7, 8, 9]. Motivated by this gap, the present work aims to investigate a FVM on arbitrarily triangular shaped cells for solving the conservative transport equation on Ω :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = 0, \quad (1)$$

where ϕ is the unknown variable, t is the time, and $\mathbf{u}$ is the known velocity field.

In general, accurate approximations of equation (1) are not simple to obtain due to different difficulties such as false diffusion, non-conservative, overshoot/undershoot and phase error [10]. In order to mitigate the diffusion effect, second-order schemes must be employed. Central schemes performs well in smooth scenarios; however, they produce numerical solutions with oscillations around sharp regions. On the other hand, second-order upwind schemes work well near discontinuities but oscillations still exist which can be reduce or eliminate by the introduction of a flux-limiter technique [10].

In this paper, we present a second-order accurate and robust numerical method for equation (1). The time integration is based on a θ -method which allow us to select between an explicit, implicit or Crank-Nicolson (semi-implicit) formulation. The space discretization is based on a finite-volume method on unstructured triangular grids. In contrast with other formulations [8], the proposed advective approximation is based on a second-order upwind interpolation scheme. The corresponding gradients are calculated using a least square technique [11]. In order to eliminate non-desirable oscillations, the approximations also incorporate a flux limiter which is determined by the Local Extremum Diminishing (LED) technique [12].

This paper is organized as follows. The second section introduces the time integration. The third section presents the finite-volume discretization on triangular grids. The fourth section discuss the final approximation and the linear solver employed to its solution. Next, the numerical techniques are tested over different benchmark problems. Finally, last section includes the conclusions and ideas to be pursued in future work.

2 Time integration: θ -method

Depending on how the advective term is approximated, either explicit or implicit numerical methods can be employed. If the advective term is evaluated at time t^n , a simple forward approximation for

the time derivative yields a first-order time-accurate explicit scheme for equation (1) given by:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\phi^n \mathbf{u}^n) = 0, \quad (2)$$

where Δt is the computational time step, and n denotes the time level. However, the time step, and thus the stability region, of the explicit scheme is constrained by the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition. To avoid this time-step restriction, an implicit formulation can be used by evaluating the advective term at time t^{n+1} , as follows:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\phi^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}) = 0, \quad (3)$$

While this implicit approach eliminates the stability constraint, it still results in a first-order time-accurate approximation. In this study, we also introduce a second-order semi-implicit time-advancement scheme based on the Crank-Nicolson (C-N) method:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \phi^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \phi^n \mathbf{u}^n \right) = 0. \quad (4)$$

Thus, the time-advancement schemes (2), (3), and (4) for the advection equation can be summarized as follows:

$$\phi^{n+1} + \theta \Delta t \nabla \cdot (\phi^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}) = \phi^n - (1 - \theta) \Delta t \nabla \cdot (\phi^n \mathbf{u}^n), \quad (5)$$

where θ is equal to 0, 1 or 1/2 if the method is explicit, implicit or Crank-Nicolson, respectively. We remark that $\mathbf{u}$ is always known at any time step.

3 Space discretization: finite volume method

The 2D computational domain is discretized into N_V triangular cells. For each triangle control volume V_i , we denote as L_j ($j = 1, 2, 3$) to its three edges. We use a staggered grid and then the face-normal velocity $U = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ and variable ϕ are located at the centers of the cell edges, $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, and the cell-centered point $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ of the cell, respectively. Here, $\mathbf{n}$ denotes the outward normal unit vector at each edge. A schematic plot of the triangular element and its components is shown in Fig. 1.

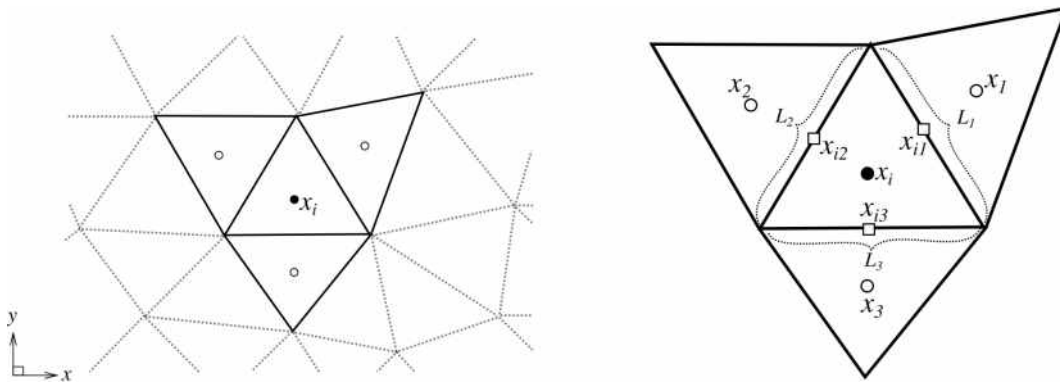


Figure 1: Sketch of the two-dimensional control volume V_i and its three edges L_j ($j = 1, 2, 3$) used for the finite volume discretization.

Following the standard finite-volume formulation, equation (5) is integrated over each control volume V_i , which formally gives (assuming sufficient regularity) the following balance equation:

$$\iint_{V_i} \phi^{n+1} dV + \theta \Delta t \iint_{V_i} \nabla \cdot (\phi^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}) dV = \iint_{V_i} \phi^n dV - (1 - \theta) \Delta t \iint_{V_i} \nabla \cdot (\phi^n \mathbf{u}^n) dV.$$

After application of the Green's Theorem, one obtains

$$\iint_{V_i} \phi^{n+1} dV + \theta \Delta t \sum_{j=1}^3 \oint_{L_j} (\phi^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} dl = \iint_{V_i} \phi^n dV - (1 - \theta) \Delta t \sum_{j=1}^3 \oint_{L_j} (\phi^n \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{n} dl. \quad (6)$$

Here, the index j refers to the edge L_j of the control volume V_j , which shares this side with V_i . It should be noted that up to this point we haven't introduced any spacial approximation.

3.1 Integral approximations

A second-order scheme is obtained from (6) by applying the midpoint rule integral approximation for the triangular element and its corresponding edges. Thus, we get

$$m_{V_i} \phi_i^{n+1} + \theta \Delta t \sum_{j=1}^3 m_{L_j} (\phi^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_{ij} \cdot \mathbf{n}_j = m_{V_i} \phi_i^n - (1 - \theta) \Delta t \sum_{j=1}^3 m_{L_j} (\phi^n \mathbf{u}^n)_{ij} \cdot \mathbf{n}_j, \quad (7)$$

where $(\cdot)_{ij}$ denotes the evaluation of a variable at $\mathbf{x}_{ij}$, the midpoint of L_j , as shown in Fig. 1. We denote as m_{V_i} and m_{L_j} the area of V_i and the length of L_j , respectively. The outward normal unit vector directed from V_i to V_j is defined as $\mathbf{n}_j$. Finally, we can rewrite equation (7) as follows:

$$\phi_i^{n+1} + \theta r_i \sum_{j=1}^3 m_{L_j} \phi_{ij}^{n+1} U_{ij}^{n+1} = \phi_i^n - (1 - \theta) r_i \sum_{j=1}^3 m_{L_j} \phi_{ij}^n U_{ij}^n, \quad (8)$$

where $r_i = \Delta t / m_{V_i}$ and the normal-face flux crossing the face of the two control volume is given by

$$U_{ij} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{ij}, \quad j = 1, 2, 3,$$

for the new and current time step. As we know the velocity field is known, the discretization is complete by approximating ϕ_{ij} in equation (8) as a function of the discrete unknowns ϕ_i and ϕ_j associated to each control volume V_i and its neighbors V_j , respectively.

3.2 Upwind scheme

In equation (8), the advective term is approximated using an upwind scheme around the point $\mathbf{x}_{ij}$, as follows [13]:

$$\phi_{ij} \approx \begin{cases} \phi_{ij}(V_i), & U_{ij} \geq 0, \\ \phi_{ij}(V_j), & U_{ij} < 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

where $\phi_{ij}(V_i)$ and $\phi_{ij}(V_j)$ represent the approximations of ϕ_{ij} at the face shared by the adjacent control volumes V_i and V_j , respectively. Thus, the unknown variable ϕ_{ij} in (9) at the mid-point of the edges can be approximated in several ways, and the accuracy of the numerical method depends on the precision of this interpolation.

A first-order approximation at the edge is obtained by simple taking the values at the cell-centered points:

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(V_i) &= \phi_i, \\ \phi_{ij}(V_j) &= \phi_j.\end{aligned}$$

This approximation can be improved to a second-order approximation at the edge using Taylor expansions, as follows:

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(V_i) &= \phi_i + \nabla\phi_i \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i), \\ \phi_{ij}(V_j) &= \phi_j + \nabla\phi_j \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j).\end{aligned}\tag{10}$$

However, as discussed in the numerical examples, the approximation in (10) introduces additional errors when the solution lacks smoothness.

Note that gradient approximations are required to reach a second-order of accuracy. We use a least square technique as described in the work of Lien [11]. In this method, the solution is assumed to be linear in each control volume $\phi(x, y) = ax + by + c$, such that $\nabla\phi = (a, b)$. The coefficients a and b are determined using the values ϕ_i and the neighbors ϕ_j ($j = 1, 2, 3$). Although, the resulting gradient approximation is only first-order accurate, equation (10) results in a second-order approximation.

3.3 Upwind scheme with a flux-limiter technique

In order to eliminate non-desirable oscillations, flux limiters ψ_i and ψ_j can be incorporated into equation (10) to obtain

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(V_i) &= \phi_i + \psi_i \nabla\phi_i \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i), \\ \phi_{ij}(V_j) &= \phi_j + \psi_j \nabla\phi_j \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_j),\end{aligned}$$

where ψ_i and ψ_j are determined by the Local Extremum Diminishing technique [12] satisfying

$$\phi_{\min} \leq \phi_{ij} \leq \phi_{\max},$$

where $\phi_{\min}$ and $\phi_{\max}$ are the minimum and the maximum taken over V_i and its surrounding neighbors. A unique value of the flux limiter per control volume V_i is determined as

$$\psi_i = \min(\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}),$$

where

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \min\left(1, \frac{1}{\Theta_i} [\phi_{\max} - \phi_j]\right), & \text{if } \Theta_i > 0, \\ \min\left(1, \frac{1}{\Theta_i} [\phi_{\min} - \phi_j]\right), & \text{if } \Theta_i < 0, \\ 1, & \text{if } \Theta_i = 0. \end{cases} \quad j = 1, 2, 3,$$

and $\Theta_i = \nabla\phi_i \cdot (\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_i)$. This technique ensures that local maximum cannot increase and local minimum cannot decrease.

4 Final linear system and solver

In summary, a finite volume discretization of equation (1) at each control volume V_i results in the linear system of equations

$$\phi_i^{n+1} + \theta r_i \left(a_0 \phi_i^{n+1} + \sum_{j=1}^3 a_j \phi_j^{n+1} + a_G^{n+1} \right) = f_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N_V, \tag{11}$$

where f_i^n is the right-hand side given by

$$f_i^n = \phi_i^n - (1 - \theta)r_i \left(a_0 \phi_i^n + \sum_{j=1}^3 a_j \phi_j^n + a_G^n \right), \quad i = 1, 2, \dots, N_V. \quad (12)$$

The coefficients corresponding to the upwind scheme (11)-(12) are given by

$$a_1 = \min(U_{i1}, 0), \quad a_2 = \min(U_{i2}, 0), \quad a_3 = \min(U_{i3}, 0), \quad a_0 = a_1 + a_2 + a_3,$$

and a_G includes all the terms related with the gradient approximation and flux limiter technique.

Boundary conditions are included into the problem as updates of ghost values. Let us denote ϕ_g the corresponding ghost cell of ϕ_i . Dirichlet boundary conditions are updated as the average of both values resulting in $\phi_g = 2\phi_{exact} - \phi_i$, where ϕ_{exact} is the corresponding known values at the boundary. Figure 2 illustrates the implementation of the Dirichlet boundary condition using ghost cells.

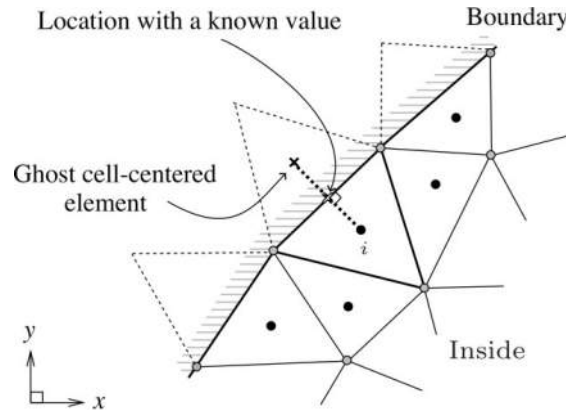


Figure 2: Sketch of the Dirichlet boundary condition and the ghost values used to apply these conditions.

Besides the explicit formulation, equation (11) results in a linear system of the form

$$A \vec{\phi} + \vec{b}_\phi = \vec{f}, \quad (13)$$

where $\vec{\phi}$ consists of the unknown variables, the matrix A only contains the coefficients obtained from the geometric values and the known velocity field, $\vec{b}_\phi$ contains all the values related to the gradient at the new time step, and $\vec{f}$ corresponds to the known right-hand side given by (12). It is important to remark that the components of $\vec{b}_\phi$ relates more values than the ones located at V_i and its neighbors V_j . This significantly complicate the computer implementation. In order to simplify this problem, $\vec{b}_\phi$ is not explicitly calculated by the linear solver, as explained below.

The efficiency of the scheme depends on the selection of the solver for linear system (13). Many solvers can be chosen; however, in reason of their efficiency and simplicity in implementation, we consider a classical stationary iterative methods, the Gauss-Seidel (GS) method. It solves the new time step using previous value for $\vec{\phi}$ as follows

$$(D + L) \vec{\phi}^{(k+1)} = \left(\vec{f} - \vec{b}_\phi^{(k)} \right) - U \vec{\phi}^{(k)}, \quad (14)$$

where L , U and D are the lower, upper and diagonal matrices of A , respectively; superscripts (k) and $(k+1)$ indicates the values of the previous and current iteration, respectively. There are some important characteristics of equation (14) that should be noted. First, the GS method is not exactly the same as their original definition because of $\vec{b}_\phi^{(k)}$. This vector should include some values corresponding to $(k+1)$ but all are updated using the previous iteration. Second, the gradient should be updated at each iteration to obtain $\vec{b}_\phi^{(k)}$.

5 Numerical results

For the numerical results, we present some numerical simulations that explore some important features of the proposed formulation, which include temporal and spatial accuracy. The accuracy of the method is quantified using different initial functions, grid types and grid resolutions. The 2D solid-body rotation example is used to test the transport equation. In all the cases, linear systems have been solved using the Gauss-Seidel solver with a tolerance value of 10^{-8} .

5.1 The solid-body rotation problem

For the example, we consider the conservative transport problem given by

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (2\pi(-y, x)\phi) &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \phi(x, y, 0) &= \phi_0(x, y), & (x, y) \in \Omega.\end{aligned}$$

where the computational domain is the square $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Here, the velocity $\mathbf{u} = 2\pi(-y, x)$ has been chosen such that one full revolution takes place within final time $t = 1$. Therefore, the exact solution of the problem at $t = 1$ is the same as the initial condition. Thus, the error E is calculated as the absolute difference between the numerical and exact solution. Furthermore, the order of accuracy is calculated as $\text{order} = \log(\|E\|_{N_1} / \|E\|_{N_2}) / \log(N_2/N_1)$, where $\|E\|_{N_1}$ and $\|E\|_{N_2}$ can be the L_∞ - or L_2 -norm error with resolutions N_1 and N_2 .

In order to study the effect of the regularity of the numerical solution, we consider three different initial conditions. They are given by

$$\begin{aligned}\text{Example 1 :} \quad \phi_0(x, y) &= \begin{cases} \cos^2(2\pi r), & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \\ \text{Example 2 :} \quad \phi_0(x, y) &= \begin{cases} \cos(2\pi r), & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \\ \text{Example 3 :} \quad \phi_0(x, y) &= \begin{cases} 1, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}\end{aligned}$$

where $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $r_0 = 1/4$ and $(x_0, y_0) = (-1/2, 0)$, see Fig. 3. The first initial condition is the well-known cosine-bell example and it corresponds to a C^1 function. For the second initial condition, the function is continuous but not derivable at $r = r_0$. Finally, in the third example, the initial condition corresponds to a discontinuous function at $r = r_0$. Homogeneous Dirichlet conditions are imposed at all boundaries.

5.2 Structured and unstructured triangular grids

Structured and unstructured grids are employed for the numerical simulations. For structured grids, the domain is firstly divided into equilateral triangles, see Fig. 4(a). Next, right-angled grids

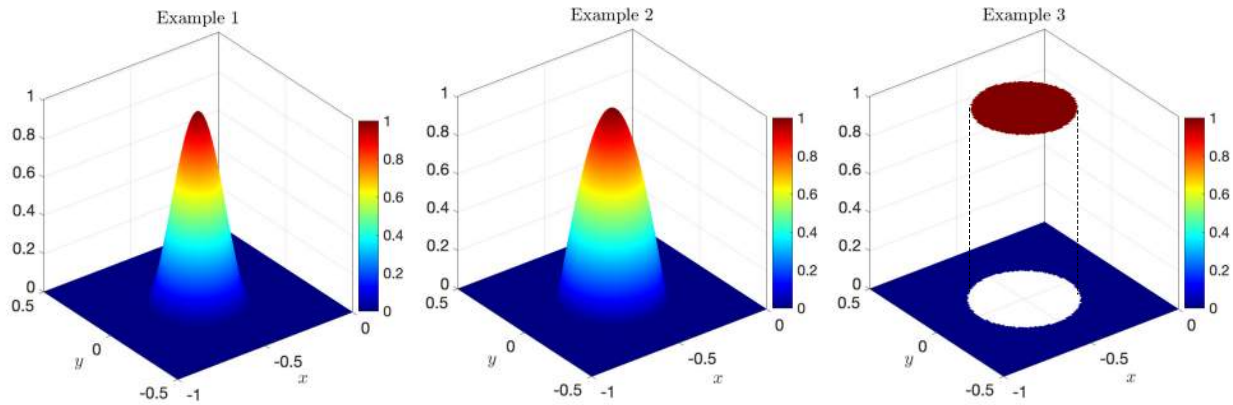


Figure 3: Initial conditions used in the solid-body rotation simulations.

are obtained from $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ uniform rectangles divided into two triangles, as shown in Fig. 4(b). For unstructured grids, not only triangles change size, but also the number of triangles sharing a particular node is different, as shown in Fig. 4(c). Unstructured grids have been generated using the free software Blue Kenue developed by the Canadian Hydraulic Centre, National Research Council (1998).

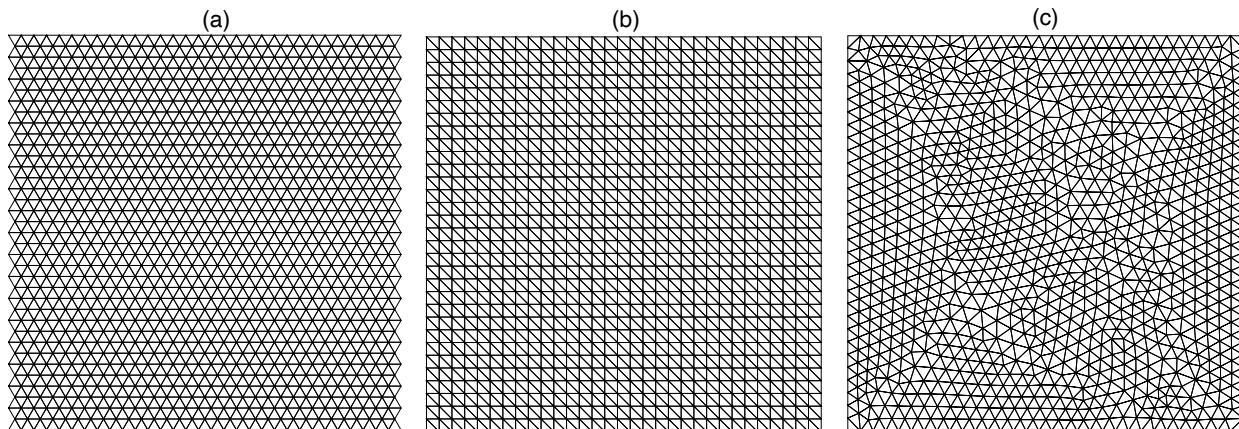
Figure 4: (a) Equilateral, (b) right-angled, and (c) unstructured triangular grids with $\Delta x = 0.0625$.

Table 1 shows the number of vertex and cell-centered points used to discretize a square of resolution $N = N_x = N_y$. Here, $\Delta x = L/(N_x - 1)$ is the length of the triangle in the x -direction, where $L = 2$ is the 2D domain width. For unstructured grids, the mesh was generated by taking a mean triangle edge close to the corresponding Δx .

Table 1: Size of the structured and unstructured grids used in numerical experiments for the computational domain.

N	Grid Δx	Equilateral		Right-angled		Unstructured	
		Vertices	Cells	Vertices	Cells	Vertices	Cells
32	0.0625	1,116	2,196	1,024	1,922	1,188	2,234
64	0.03125	4,636	9,000	4,096	7,938	4,752	9,234
128	0.015625	18,743	36,938	16,384	32,258	18,355	36,121
256	0.0078125	75,373	149,646	65,536	130,050	72,351	143,473

5.3 Preservation of the initial condition's shape

The effectiveness of the proposed numerical method can be initially addressed by examining how well the initial condition's shape is preserved during its transport. Figure 5 illustrates the numerical solution using the cosine-bell initial condition, see Example 1. Here, we show the velocity field and contours of the numerical solution at six stages: $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, and 1 using the upwind-scheme, $\Delta t = 10^{-4}$, and the right-angled structured grid with resolution $N = 256$. The black circle in all images corresponds to the contour level at $\phi = 1/4$. Notice that the numerical solution nicely preserves the round shape of the initial conditions.

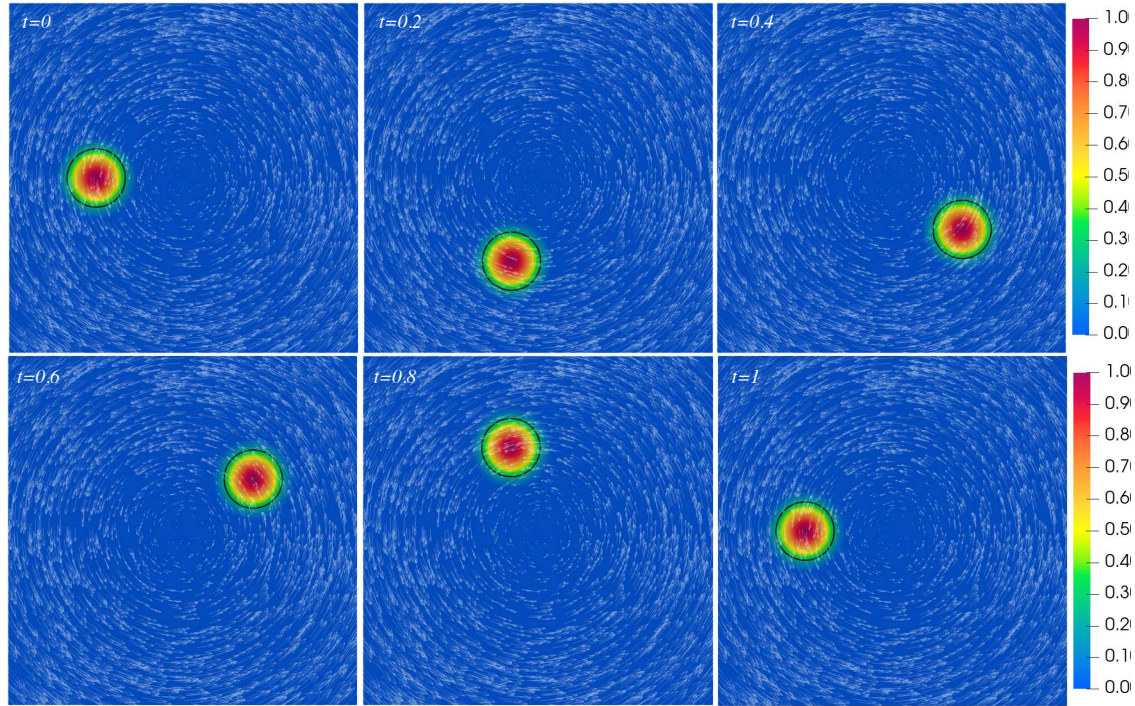


Figure 5: Velocity field and numerical solution of Example 1 at six stages using a right-angled structured grid with resolution $N = 256$.

The numerical solution using the three different initial conditions is presented in Fig. 6. We plot only the solution in the region $[-1, 0] \times [-0.5, 0.5]$ where the non-zero ϕ values are located. As expected, the numerical solution still preserves the round shape of the initial conditions for all cases. Note that the error increases as the regularity of the solution decreases. For instance, undesired oscillations arise in the discontinuous case due to the second-order approximation used in our scheme.

On the other hand, Fig. 7 and Fig. 8 present the numerical solution at $t = 1$ using the cosine-bell initial condition using structured and unstructured triangular grids, each with a resolution of $N = 256$. Notice the impact of the unstructured triangular grid on the numerical solution. Further details on the errors are provided in the next section.

5.4 Temporal and space accuracy

Temporal accuracy is investigated by varying the time step while keeping the grid size fixed for the cosine-bell example. A right-angled triangular grid with a resolution of $N = 256$ is employed to

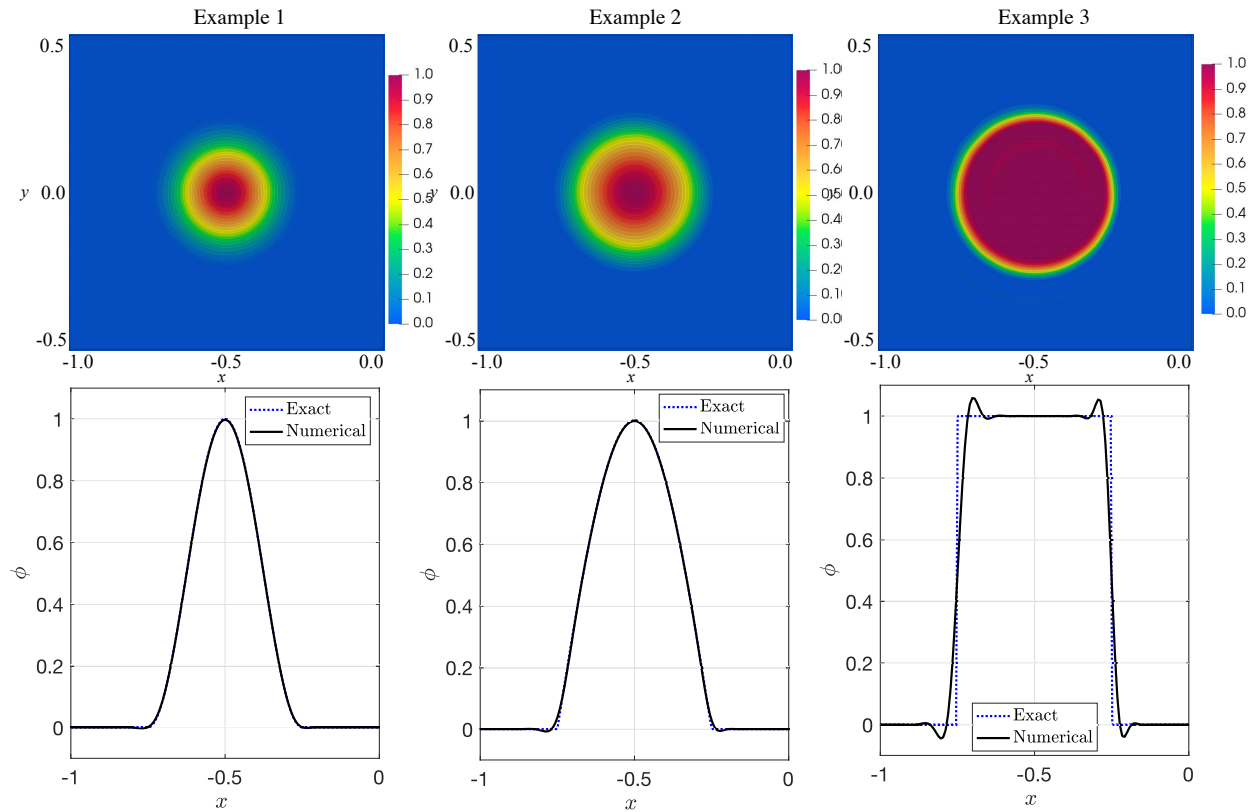


Figure 6: Numerical solution for the 2D solid-body rotation example at $t = 1$ using the three different initial condition and the right-angled triangular grid of $N = 256$. The one-dimensional results are extracted from the line $y = 0$.

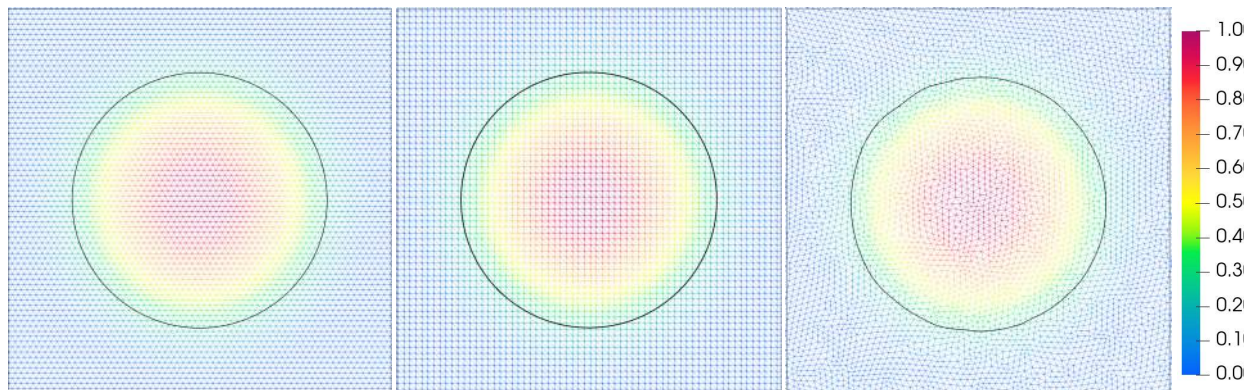


Figure 7: Numerical solution at $t = 1$ of Example 1 using different types of grid ($N = 256$).

minimize spatial errors. Figure 9 presents the errors in both norms for the explicit ($\theta = 0$), implicit ($\theta = 1$), and Crank-Nicolson (C-N) scheme ($\theta = 1/2$). Notably, the C-N scheme achieves spatial accuracy more quickly than the explicit and implicit schemes.

Figure 9 also shows the slope of the regression line for the initial norm errors, confirming that the C-N scheme is second-order accurate, while the explicit and implicit schemes are only first-order accurate in time, as expected. Although the results are not presented here, comparable outcomes

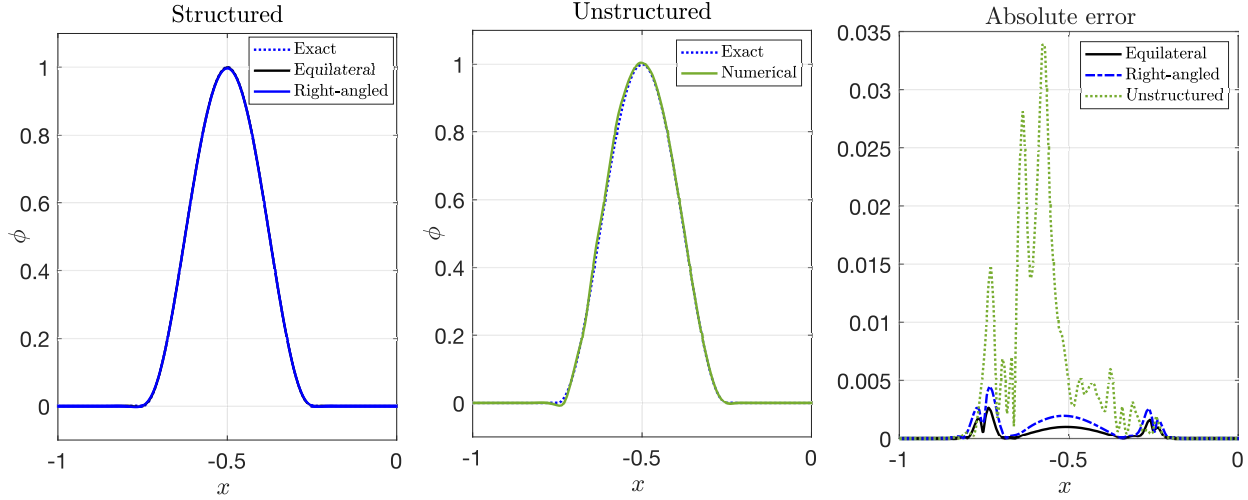


Figure 8: Numerical solution and absolute errors at $t = 1$ and $y = 0$ of Example 1 using different types of grid ($N = 256$).

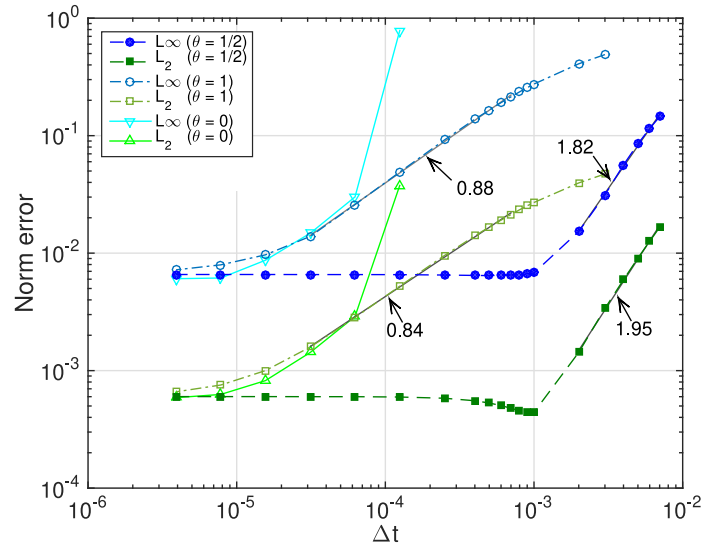


Figure 9: Convergence analysis for the 2D solid-body rotation example at $t = 1$ using different temporal schemes.

are observed using a high-resolution equilateral triangular grid or an unstructured mesh. However, changes in the regularity of the initial condition have a significant effect on the spatial error, which dominates the overall error (combining space and time) in the simulation.

Spatial accuracy is evaluated by varying the grid size while keeping the time step constant. The C-N scheme with a time step of $\Delta t = 10^{-5}$ was selected to ensure that the dominant source of error is spatial. Table 2 compare the norm errors and numerical order of accuracy at $t = 1$ for equilateral and right-angled triangular grids. The convergence analysis shows that the proposed method approaches second-order accuracy with the cosine-bell initial condition. However, as the initial condition becomes less regular, a reduction in accuracy is observed. For instance, a first-order method is obtained using the second example and a zero-order approach for the discontinuous function. This behavior is consistent across the two types of structured grids.

Table 2: Space convergence analysis using structured grids with different initial conditions.

N	Equilateral triangular grid				Right-angled triangular grid			
	L_∞ -norm	Order	L_2 -norm	Order	L_∞ -norm	Order	L_2 -norm	Order
Example 1								
32	2.41e-01	—	2.23e-02	—	3.73e-01	—	3.24e-02	—
64	5.18e-02	2.22	5.76e-03	1.95	9.37e-02	1.99	9.21e-03	1.81
128	1.31e-02	1.98	1.46e-03	1.98	1.83e-02	2.36	2.25e-03	2.03
256	4.81e-03	1.45	3.94e-04	1.89	6.51e-03	1.49	5.89e-04	1.93
Example 2								
32	1.67e-01	—	2.18e-02	—	2.10e-01	—	3.07e-02	—
64	9.17e-02	0.86	8.98e-03	1.28	1.08e-01	0.96	1.19e-02	1.37
128	5.24e-02	0.81	4.03e-03	1.16	6.17e-02	0.81	5.22e-03	1.19
256	3.05e-02	0.78	1.89e-03	1.09	3.64e-02	0.76	2.43e-03	1.10
Example 3								
32	5.96e-01	—	8.26e-02	—	5.96e-01	—	8.89e-02	—
64	5.69e-01	0.07	6.39e-02	0.37	5.80e-01	0.04	6.89e-02	0.37
128	5.84e-01	0.00	4.95e-02	0.37	5.95e-01	0.00	5.37e-02	0.36
256	5.90e-01	0.01	3.86e-02	0.36	5.90e-01	0.01	4.20e-02	0.35

In contrast, for the unstructured triangular grid, calculating the order of accuracy becomes more challenging, as the errors depend on both the size and configuration of the mesh, see Fig. 10. Table 3 presents the results at $t = 1$ for unstructured triangular grids of different resolutions. The errors show that the proposed method's error decreases as a finer mesh is used; however, this reduction is less consistent compared to structured grids, as expected. Nevertheless, the same behavior of accuracy loss is observed as the initial condition becomes less regular.

Table 3: Errors using an unstructured triangular grid with different initial conditions.

Δx	Example 1		Example 2		Example 3	
	L_∞ -norm	L_2 -norm	L_∞ -norm	L_2 -norm	L_∞ -norm	L_2 -norm
0.0625	7.66e-01	8.01e-02	3.16e-01	4.04e-02	8.07e-01	9.29e-02
0.03125	1.56e-01	1.57e-02	2.63e-01	2.48e-02	8.78e-01	8.12e-02
0.015625	6.43e-02	5.70e-03	9.98e-02	9.31e-03	7.93e-01	5.79e-02

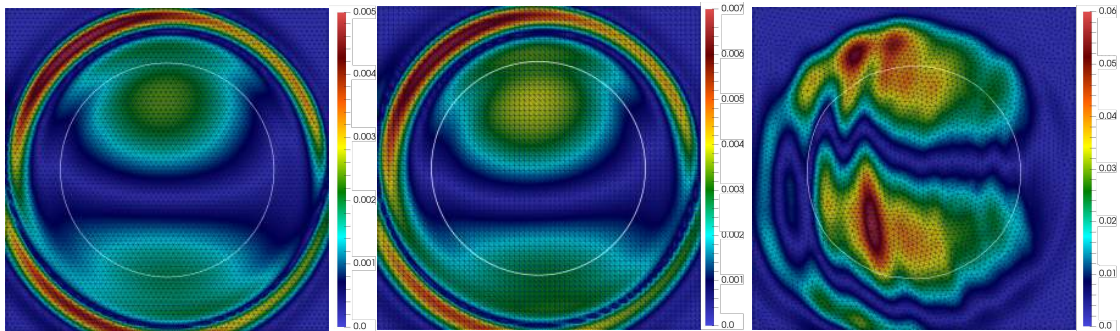


Figure 10: Absolute errors at $t = 1$ using the cosine-bell initial condition and different types of grid with resolution $N = 256$.

5.5 Effect of the flux-limiter technique

As shown in Fig. 6, the numerical results with the second-order upwind scheme show small oscillations around the sharp gradient regions for the non-derivable and discontinuous case. In order to eliminate or reduce these errors, we apply the upwind method together with the flux-limiter technique, as described in Section 3.3. Figure 11 shows the numerical solution using this technique at $t = 1$ and the right-angled triangular grid of resolution $N = 256$. As expected, the method with flux-limiter technique gives accurate results and significantly reduces the undesirable oscillations for all cases, showing the advantage of its application.

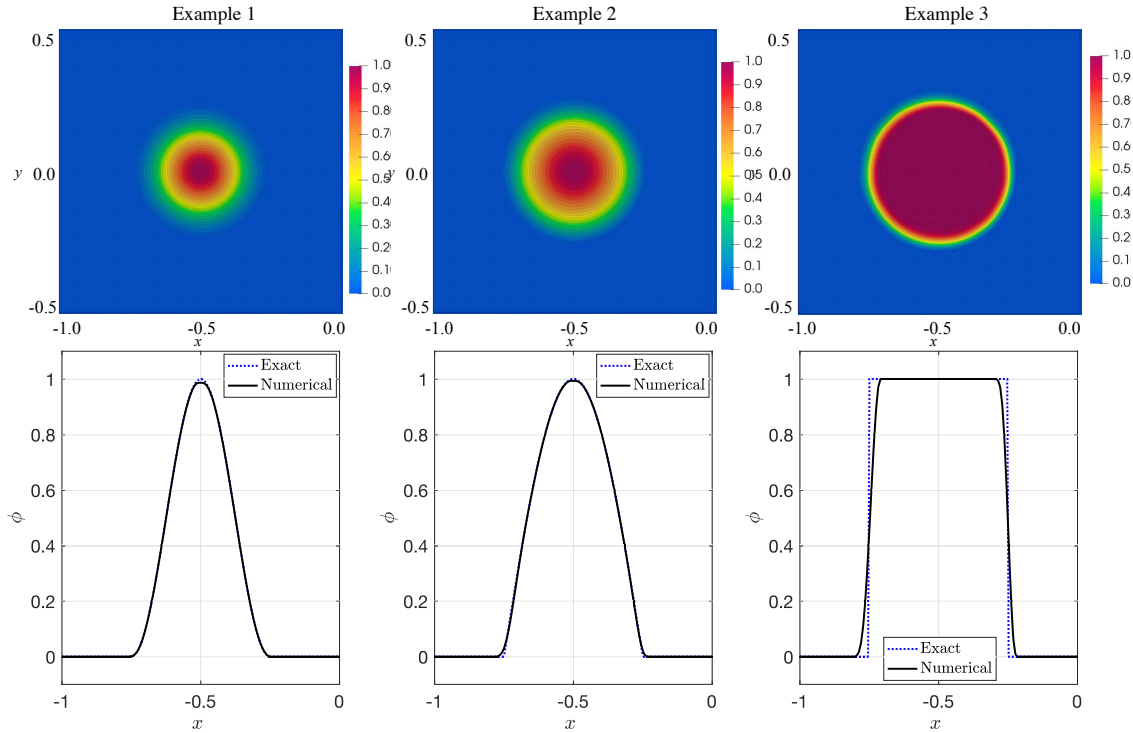


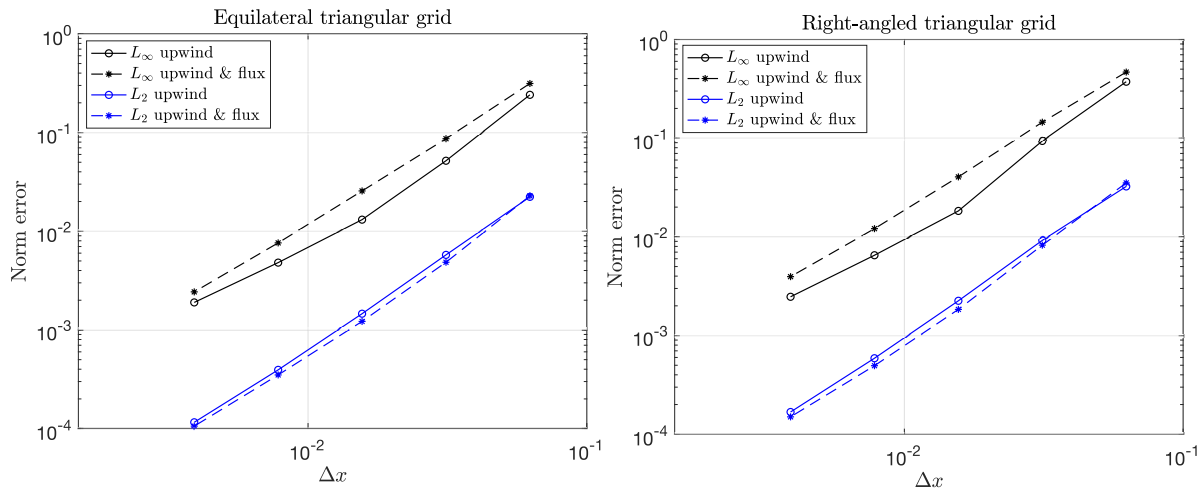
Figure 11: Numerical solution using the flux-limiter technique at $t = 1$. We apply it to the three different initial conditions with the right-angled triangular grid of resolution $N = 256$. The one-dimensional results are extracted from the line $y = 0$.

Conversely, a comparison between Fig. 6 and Fig. 11 reveals a reduction in the maximum values for both Example 1 and Example 2. This reduction is expected, as the use of a flux limiter can effectively dampen sharp gradients, potentially lowering the scheme's accuracy to first-order in regions with high variation. While this behavior helps to mitigate oscillations around discontinuities, it may also slightly smooth out peak values in otherwise stable regions. However, this behavior does not significantly impact the overall order of accuracy, as presented in Table 4. Note that this technique preserves the original order of accuracy of the three examples, as expected.

Figure 12 shows a comparison about the norm errors using the upwind scheme with and without the flux-limiter technique for Example 1. Note that the flux limiter slightly reduces the L_2 -norm errors compared to the original upwind solution. The maximum error using the flux limiter is larger than the solution without it; however, both remain within the same order of magnitude (share the same slope).

Table 4: Space convergence analysis using structured grids with different initial conditions and the flux-limiter technique.

N	Equilateral triangular grid				Right-angled triangular grid			
	L_∞ -norm	Order	L_2 -norm	Order	L_∞ -norm	Order	L_2 -norm	Order
Example 1								
32	3.14e-01	—	2.28e-02	—	4.67e-01	—	3.52e-03	—
64	8.66e-02	1.86	4.85e-03	2.23	1.45e-01	1.69	8.24e-03	2.09
128	2.56e-02	1.76	1.22e-03	1.99	4.05e-02	1.84	1.84e-03	2.16
256	7.62e-03	1.75	3.50e-04	1.80	1.21e-02	1.74	4.95e-04	1.89
Example 2								
32	1.52e-01	—	2.02e-02	—	2.79e-01	—	3.10e-02	—
64	7.59e-02	1.00	7.58e-03	1.41	8.48e-02	1.72	9.90e-03	1.65
128	4.72e-02	0.69	3.24e-03	1.23	5.48e-02	0.63	4.24e-03	1.22
256	2.93e-02	0.69	1.47e-03	1.14	3.34e-02	0.71	1.92e-03	1.14
Example 3								
32	5.89e-01	—	8.11e-02	—	5.80e-01	—	8.81e-02	—
64	5.52e-01	0.09	6.19e-02	0.39	5.78e-01	0.00	6.70e-02	0.39
128	5.63e-01	0.00	4.73e-02	0.39	5.61e-01	0.04	5.16e-02	0.38
256	5.49e-01	0.04	3.63e-02	0.38	5.49e-01	0.03	3.99e-02	0.37

Figure 12: Convergence analysis for Example 1 at $t = 1$ using different structured grid resolutions.

6 Conclusions

In this paper we have presented a second-order discretization for the conservative transport equation based on an unstructured finite-volume method. The results of the discretization are supported by numerical tests, which verify the second-order accuracy in time and in space. However, there is an important influence of the unstructured grid in the precision of the method. As expected, the proposed method performs well for smooth initial functions. Conversely, initial functions with discontinuities or sharp gradient regions, as the Heaviside function, still perform well by only applying a flux-limiter technique. Future work involves the implementation of these techniques to complex interface problems. We will also develop a code to obtain three-dimensional simulations on irregular domains using the proposed finite-volume formulation.

7 Acknowledgments

This work was partially supported by the Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) under the program *Investigadores e Investigadoras por México*, and SECIHTI México under Ciencia de Frontera Project Number: CF-2023-I-2639. We also acknowledge to the supercomputer facilities provided by CIMAT, specifically Cluster Merida TOLOK, for their invaluable support in conducting our research.

8 Declaration of interests

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

9 Declaration of the use of generative artificial intelligence

During the preparation of this work, the authors used ChatGPT to check the grammar of a few paragraphs. After using this tool, the authors reviewed and edited these paragraphs as needed and took full responsibility for the final publication.

10 Graphical Abstract

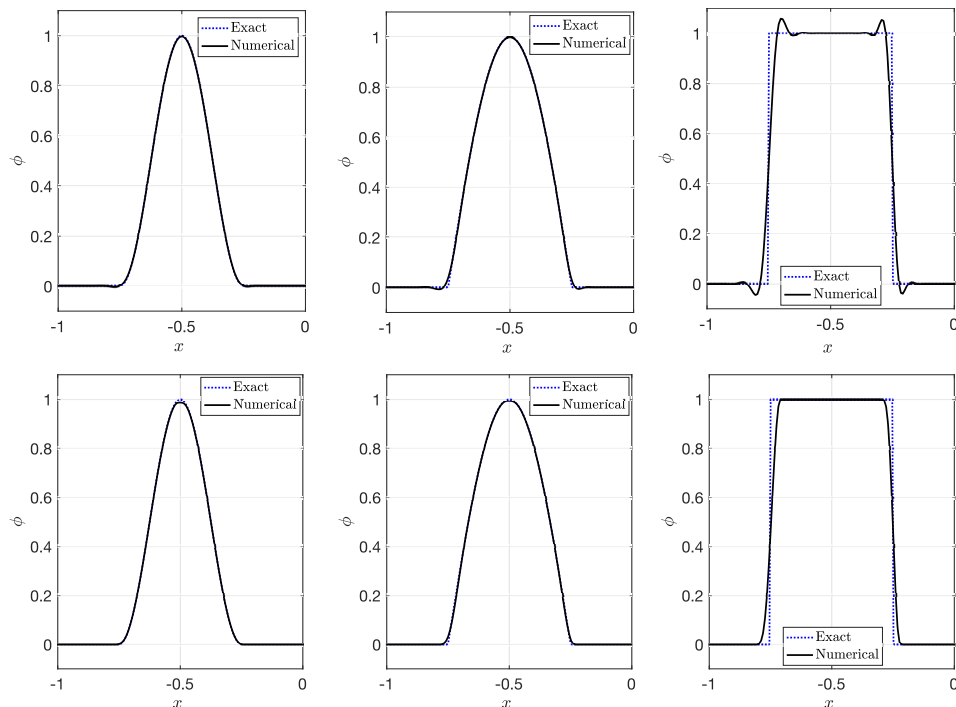


Figure 13: The one-dimensional results are extracted along the line $y = 0$ for both upwind schemes: with the flux limiter technique (first horizontal line) and without it (second horizontal line).

References

- [1] LeVeque RJ. High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow. SIAM Journal Numerical Analysis, 1996; 33(2):627-65.
- [2] Osher S, Fedkiw RP. Level set method: an overview and some recent results. J. Comput. Phys. 2001; 169:463-502.
- [3] Sethian JA, Smereka P. Level set methods for fluids interfaces. Annu. Rev. Fluid Mech. 2003; 35:341-372.
- [4] Uh Zapata, M., Itzá Balam, R. A conservative level-set/finite-volume method on unstructured grids based on a central interpolation scheme. J. Comput. Phys., 444, 110576, 2021.
- [5] Uh Zapata, M., Itzá Balam, R. A 3D Two-Phase Conservative Level-Set Method Using an Unstructured Finite-Volume Formulation. In Mathematical and Computational Models of Flows and Waves in Geophysics (pp. 67-101). Springer International Publishing, 2022.
- [6] Kees CE, Akkerman I, Farthing MW, Bazilevs Y. A conservative level set method suitable for variable-order approximations and unstructured meshes. J. Comput. Phys., 2011; 230:4536-4558.
- [7] Ito K, Kunugi T, Ohshima H, Kawamura T. (2013). A volume-conservative PLIC algorithm on three-dimensional fully unstructured meshes. Computers & Fluids, 2013; 88, 250-261.
- [8] Balcázar N, Jofre L, Lehmkuhl O, Castro J, Rigola J. A finite-volume/level-set method for simulating two-phase flows on unstructured grids. International journal of multiphase flow, 2014; 64:55-72.
- [9] Xie B, Peng J, Feng X. An unstructured-grid numerical model for interfacial multiphase fluids based on multi-moment finite volume formulation and THINC method. International Journal of Multiphase Flow, 2017; 89:375-398.
- [10] Li LX, Liao HS, Qi LJ. An improved r-factor algorithm for TVD schemes. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2008; 51(3-4):610-617.
- [11] Lien FS. A pressure-based unstructured grid method for all-speed flows, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2000; 33:355-374.
- [12] Vidović D, Segal A, Wesseling P. A superlinearly convergent Mach-uniform finite volume method for the Euler equations on staggered unstructured grids. Journal of Computational Physics 2006; 217(2):277-294.
- [13] Eymard R, Gallouet T, Herbin R. Finite Volume Methods, Handbook of numerical analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam 2000.

Impacto de la discretización numérica del modelo de variación total de eliminación de ruido.

Martinez-Ku, N.^{1,*} , Legarda-Saenz, R.¹ , Brito-Loeza, C.¹ 

¹CLIR - Computational Learning and Imaging Research, Facultad de Matemáticas - UADY.

*a19216379@alumnos.uady.mx

Resumen

En este trabajo, se comparan diferentes técnicas de discretización numérica, así como algoritmos de optimización para hallar la solución del modelo de variación total de eliminación de ruido propuesto por Rudin, Osher y Fatemi en 1992. De igual forma, se realiza un análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados obtenidos.

Palabras claves: Eliminación de ruido, modelo variacional, ecuaciones diferenciales parciales, optimización, procesamiento de imágenes.

Abstract

In this manuscript, different numerical discretization techniques are compared, as well as optimization algorithms to find a solution to the total variation based model propoused for Rudin, Osher and Fatemi in 1992. In the same way, we made a qualitative and quantitative analysis of the obtained results.

Keywords: Image denoising, variational method, partial differential equations, optimization, image processing

Recibido: 24 de octubre de 2024. Aceptado: 17 de marzo de 2025. Publicado: 30 de abril de 2025.

1. Introducción

A consecuencia de diversos factores, una imagen puede contarmarse con ruido, de manera inevitable, durante el proceso de captura, transmisión o compresión. Debido a esto, se requieren procesos que permitan mejorar la calidad de la imagen sin comprometer sus características principales. Por ello, la eliminación de ruido es uno de los principales problemas del procesamiento de imágenes y ha sido muy estudiado a lo largo de las últimas décadas, a pesar de ello, permanece como una tarea abierta.

Matemáticamente, este problema puede expresarse como sigue:

$$\hat{U}(x, y) = U(x, y) + \eta(x, y),$$

donde $\hat{U}(x, y)$ es la imagen ruidosa, $U(x, y)$ es la imagen libre de ruido y $\eta(x, y)$ representa el ruido aditivo Gaussiano con media μ y desviación estándar σ , el cual se desconoce. El principal objetivo del filtrado de ruido es reducir el error en las imágenes al restaurar las características originales de éstas como bordes, contraste e iluminación y mejorar la relación señal-ruido. Entre las principales dificultades de esta tarea se encuentra la preservación de bordes, texturas y componentes de altas frecuencias [16] que inevitablemente se pierden durante el proceso de filtrado [10]. Cabe mencionar que el problema de eliminación o filtrado de ruido es un problema inverso y no tiene una solución única, por lo que también es un problema mal planteado.

1.1. Modelo variacional

Aunque existen diversos métodos para llevar a cabo esta tarea, el empleo de modelos de variación total se justifican por su capacidad de preservar discontinuidades y componentes de alta frecuencia a diferencia de métodos clásicos [1, 2, 3, 4] que tienden a suavizar estas. En 1992, Rudin et al. [5] propusieron el siguiente método no lineal de variación total para la eliminación de ruido

$$\min_U \int_{\Omega} |\nabla U| d\Omega \quad \text{sueto a} \quad \|U - \hat{U}\|^2 = \sigma^2 \text{ y } \|U - \hat{U}\| = 0, \quad (1)$$

donde Ω es una región convexa en un espacio 2-dimensional, $|\cdot|$ es la distancia euclidiana y $\|\cdot\|$ denota la norma en $L^1(\Omega)$. La idea detrás de este modelo es que las señales ruidosas tienen un gradiente más grande que aquellas sin ruido [7]. Por otro lado, la restricciones implican que el ruido η es de media μ cero y desviación estándar σ .

Es posible transformar este problema a un problema de minimización de variación total sin restricciones aplicando el método del multiplicadores de Lagrange [6] de la siguiente forma:

$$\min_U \left\{ \int_{\Omega} |\nabla U| d\Omega + \frac{\lambda}{2} \|U - \hat{U}\|^2 \right\}, \quad (2)$$

donde $\frac{\lambda}{2}$ es un parámetro que pondera la proporción entre el término regularizador y el de similitud. Entre las principales ventajas de este modelo es la existencia y unicidad de la solución [8, 16] y su poca dependencia a variaciones en el ruido, por lo que el problema se vuelve bien planteado.

Si definimos $\varphi \in C(\Omega)$ con soporte compacto y ε un escalar, la primera variación de la funcional (2) está dada por:

$$F(U) := \int_{\Omega} |\nabla U| d\Omega + \frac{\lambda}{2} \|U - \hat{U}\|^2,$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(U + \varepsilon\varphi) \Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

tal que

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (U + \varepsilon\varphi - \hat{U})^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla(U + \varepsilon\varphi)| d\Omega \right\} \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} 2\varphi(U + \varepsilon\varphi - \hat{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\nabla(U + \varepsilon\varphi)}{|\nabla(U + \varepsilon\varphi)|} \cdot \nabla\varphi d\Omega, \end{aligned}$$

evaluando en $\varepsilon = 0$ y simplificando

$$\delta F = \lambda \int_{\Omega} \varphi(U - \hat{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \nabla\varphi d\Omega.$$

Si aplicamos el Teorema de Green al último término:

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \nabla\varphi d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \mathbf{n} \right) \varphi d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) \varphi d\Omega,$$

obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial que denota el gradiente del funcional F descrito en (2)

$$\nabla F(U) = \lambda(U - \hat{U}) - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3)$$

con la condición de frontera de Neumann

$$\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

2. Metodología

En esta sección presentamos dos métodos de discretización para hallar la solución de la ecuación diferencial (3). Para ambos casos, la forma discreta de la ecuación diferencial se define por $u_{i,j} = U(x_i, y_i)$ que denota el valor de la función U en los puntos (x_i, y_i) dados en $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ tal que $x_i = a + \frac{i-1}{h_x}$ y $y_i = c + \frac{j-1}{h_y}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y $h_x = \frac{b-a}{m-1}$, $h_y = \frac{d-c}{n-1}$.

2.1. Discretización por puntos centrales

Definimos los operadores

$$\delta_x u_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x} \quad y \quad \delta_y u_{i,j} = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y},$$

los cuales utilizamos para aproximar las derivadas en la ecuación (3) expresadas como sigue

$$\begin{aligned} \nabla F(u_{i,j}) &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - (\delta_x, \delta_y) \cdot \frac{(\delta_x u_{i,j}, \delta_y u_{i,j})}{|(\delta_x u_{i,j}, \delta_y u_{i,j})|} \\ &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \delta_x \frac{\delta_x u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} - \delta_y \frac{\delta_y u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \\ &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \frac{\left(\frac{\delta_x u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{\delta_x u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x} - \frac{\left(\frac{\delta_y u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{\delta_y u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y} \end{aligned}$$

$$\nabla F(u_{i,j}) = \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \frac{\delta_x u_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x \sqrt{(\delta_x u_{i+\frac{1}{2},j})^2 + (\delta_y u_{i+\frac{1}{2},j})^2}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta_x u_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x \sqrt{(\delta_x u_{i-\frac{1}{2},j})^2 + (\delta_y u_{i-\frac{1}{2},j})^2}} - \frac{\delta_y u_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y \sqrt{(\delta_x u_{i,j+\frac{1}{2}})^2 + (\delta_y u_{i,j+\frac{1}{2}})^2}} \\
& + \frac{\delta_y u_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y \sqrt{(\delta_x u_{i,j-\frac{1}{2}})^2 + (\delta_y u_{i,j-\frac{1}{2}})^2}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\nabla F(u_{i,j}) &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x^2 \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2/h_x^2 + (u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})^2/h_y^2 + \beta}} \\
& + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2 \sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2/h_x^2 + (u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})^2/h_y^2 + \beta}} \\
& - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y^2 \sqrt{(u_{i,j+1} - u_{i,j})^2/h_y^2 + (u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})^2/h_x^2 + \beta}} \\
& + \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y^2 \sqrt{(u_{i,j} - u_{i,j-1})^2/h_y^2 + (u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})^2/h_x^2 + \beta}},
\end{aligned}$$

donde el parámetro positivo β se añade al denominador con el fin de evitar singularidades. Las condiciones de frontera descritas en [5] se implementan de la siguiente forma

$$u_{0,j} = u_{1,j}, \quad u_{m,j} = u_{m-1,j}, \quad u_{i,0} = u_{i,1} \quad u_{i,n} = u_{i,n-1}. \quad (4)$$

En los índices no enteros consideramos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right) \\
u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left(\frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) \right) \\
u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}), \frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \right) \\
u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \frac{1}{2}(u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}) \right),
\end{aligned}$$

donde $\text{minmod}(x, y)$ se define por la función

$$\text{minmod}(x, y) = \frac{\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)}{2} \min(|x|, |y|).$$

2.2. Discretización por *forward-backward*

Sean los operadores $\delta_x^\pm$ y $\delta_y^\pm$ descritos como sigue

$$\delta_x^\pm u_{i,j} = \pm \frac{u_{i\pm 1,j} - u_{i,j}}{h_x} \quad y \quad \delta_y^\pm u_{i,j} = \frac{u_{i,j\pm 1} - u_{i,j}}{h_y},$$

podemos aproximar la ecuación (3) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\nabla F(u_{i,j}) &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - (\delta_x^-, \delta_y^-) \cdot \frac{(\delta_x^+ u_{i,j}, \delta_y^+ u_{i,j})}{|(\delta_x^+ u_{i,j}, \delta_y^+ u_{i,j})|} \\
&= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \delta_x^- \frac{\delta_x^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} - \delta_y^- \frac{\delta_y^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \\
&= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) + \frac{\left(\frac{\delta_x^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i-1,j}}{h_x} \\
&\quad - \frac{\left(\frac{\delta_x^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i,j}}{h_x} + \frac{\left(\frac{\delta_y^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i,j-1}}{h_y} \\
&\quad + \frac{\left(\frac{\delta_y^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i,j}}{h_y}.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la siguiente discretización

$$\begin{aligned}
\nabla F(u_{i,j}) &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2 \sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2/h_x^2 + (u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j})^2/h_y^2 + \beta}} \\
&\quad - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x^2 \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2/h_x^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2/h_y^2 + \beta}} \\
&\quad + \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y^2 \sqrt{(u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1})^2/h_x^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2/h_y^2 + \beta}} \\
&\quad - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y^2 \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2/h_x^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2/h_y^2 + \beta}},
\end{aligned}$$

con las condiciones de frontera descritas en la expresión (4).

2.3. Algoritmos numéricos

Para hallar una aproximación numérica a la solución del modelo (2) utilizamos tres algoritmos numéricos cuyos esquemas básicos describimos a continuación.

2.3.1. Descenso Gradiente

El Descenso Gradiente es uno de los métodos de minimización más antiguos que existen para funciones no lineales. Debido a su simplicidad es uno de los algoritmos más utilizados en la teoría. No obstante, tiende a requerir muchas iteraciones por restricciones de estabilidad que limitan el tamaño de paso a valores muy pequeños por lo que es poco empleado. El esquema básico del método de Descenso Gradiente se presenta en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 DESCENSO GRADIENTE

```

1: Dado un punto inicial  $u_0$ 
2: Definir un tamaño de paso  $\alpha$ 
3:  $k = 0$ 
4: while  $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \geq \varepsilon \|u_k + u_{k-1}\|_\infty$  and  $k < k_{\text{máx}}$  do
5:    $u_k = u_{k-1} - \alpha \nabla F(u_{k-1})$ 
6:    $k = k + 1$ 
7: end while
8: return  $u_k$ 

```

2.3.2. Nesterov Momentum

El método del Nesterov Momentum es una mejora del algoritmo de Descenso Gradiente, desarrollado por Yurii Nesterov, que propuso un algoritmo que mejora la velocidad de convergencia y precisión. El esquema básico se presenta en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2 NESTEROV MOMENTUM [11]

```

1: Dado un punto inicial  $u_0$ 
2:  $y_0 = u_0$ 
3:  $t_0 = 1$ 
4:  $k = 0$ 
5: while  $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \geq \varepsilon \|u_k + u_{k-1}\|_\infty$  and  $k < k_{\text{máx}}$  do
6:    $y_k = u_{k-1} - \alpha \nabla F(u_{k-1})$ 
7:    $t_k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}$ 
8:    $u_k = y_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k} (y_k - y_{k-1})$ 
9:    $k = k + 1$ 
10: end while
11: return  $u_k$ 

```

2.3.3. Punto Fijo

Finalmente, Vogel y Oman en 1996, propusieron un método de punto fijo llamado *Lagged diffusivity fixed point iteration* en [12], en donde demostraron una rápida convergencia en comparación con el Descenso Gradiente y métodos de Newton. La idea principal es tratar la no linealidad del problema al calcular el término variacional fijando la iteración previa u_k y resolver para u_{k+1} . El esquema de este método se describe a continuación en el Algoritmo 3.

2.4. Métricas para la evaluación del desempeño

Las métricas *Peak Signal to Noise Ratio*(PSNR) y *Structural Similarity Index Measure* (SSIM) han sido empleadas para evaluar el desempeño de la eliminación de ruido de los métodos numéricos de forma estándar [10, 14].

Definición 2.1. Dada una imagen de referencia U de tamaño $m \times n$ y una imagen procesada $\hat{U}$

Algoritmo 3 PUNTO FIJO [12]

```

1: Dado un punto inicial  $u_0$ 
2:  $k = 0$ 
3: while  $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \geq \varepsilon \|u_k + \varepsilon\|_\infty$  and  $k < k_{\text{máx}}$  do
4:    $\lambda u_0 = \left( \lambda - \nabla \cdot \frac{\nabla}{|\nabla u_k|} \right) u_{k+1}$ 
5:    $k = k + 1$ 
6: end while
7: return  $u_k$ 

```

de las mismas dimensiones, definimos el Peak Signal to Noise Ratio PSNR como sigue

$$PSNR(U, \hat{U}) = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{máx}(U)^2}{\frac{1}{mn} \|U - \hat{U}\|_2^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{máx}(U)^2}{\frac{1}{mn} \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} (U(x, y) - \hat{U}(x, y))^2} \right).$$

Se expresa en decibelios y mide la relación entre el valor máximo posible de una señal y el valor del ruido que corrompe la señal y afecta la fidelidad de su representación.

Mientras mayor sea el valor del PSNR significa que la señal, en este caso la imagen, se encuentra más libre de ruido y se asocia a una reconstrucción de mayor calidad, por otro lado, un bajo valor puede interpretarse como una señal contaminada por ruido.

Por otra parte, el SSIM es una métrica publicada por primera vez en [14] construida a partir de tres factores importantes, estos son la luminosidad, el contraste y la estructura de una imagen con el objetivo de adaptarse mejor al funcionamiento del sistema visual humano.

Definición 2.2. Dada una imagen de referencia U de tamaño $m \times n$ y una imagen procesada $\hat{U}$ de las mismas dimensiones, definimos el Structural Similarity Index Measure SSIM.

$$SSIM(U, \hat{U}) = \frac{(2\mu_U \mu_{\hat{U}} + C_1)(2\sigma_{U\hat{U}} + C_2)}{(\mu_U^2 + \mu_{\hat{U}}^2 + C_1)(\sigma_U^2 + \sigma_{\hat{U}}^2 + C_2)},$$

donde μ_U , $\mu_{\hat{U}}$, σ_U y $\sigma_{\hat{U}}$ son la media y varianza de U y $\hat{U}$, respectivamente, $\sigma_{U\hat{U}}$ es la covarianza entre ambas imágenes y C_1 y C_2 constantes utilizadas para evitar inestabilidad.

Los valores que pueden obtenerse con esta métrica se encuentran en el rango $[-1, 1]$, donde 1 indica una similitud perfecta, 0 que no hay similitud y -1 una correlación negativa perfecta. Sin embargo, estos últimos se consideran raros e irrelevantes [15]. Para la experimentación utilizamos los valores $C_1 = 0.01$ y $C_2 = 0.03$.

3. Experimentos numéricos

Todos los algoritmos de la sección anterior fueron ejecutados en una computadora con Pop-Os! Linux como sistema operativo, un procesador Ryzen 5 5600H y 32 GB de RAM. La implementación de las discretizaciones y los algoritmos propuestos fueron hechos en el lenguaje de programación Julia [13].

Para analizar las soluciones obtenidas, probamos una imagen de dimensiones 256×256 con valores en el rango $[0, 1]$ contaminada con ruido aditivo Gaussiano de media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 0.1$ con PSNR = 39.061 dB y SSIM = 0.344, mostrada en la Figura 1b. Los parámetros utilizados fueron $\lambda = 10$, $\beta = 10^{-3}$ y para los casos que era requerido un tamaño de paso α como el Descenso Gradiente y el Nesterov Momentum, se usaron 0.001 y 0.005, respectivamente.

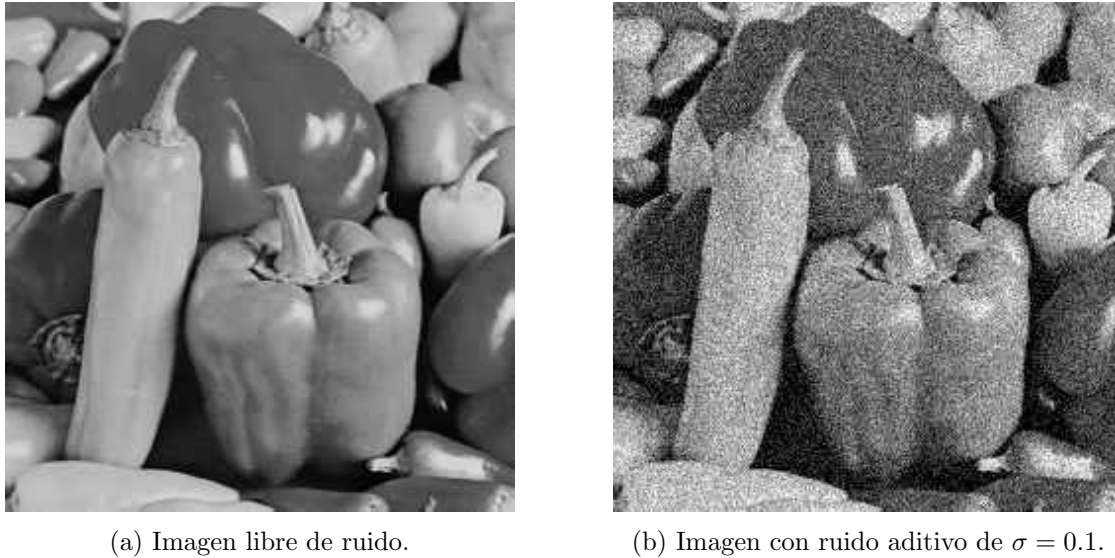


Figura 1: Comparativa entre imagen original y la contaminada con ruido.

Las soluciones obtenidas con los distintos algoritmos y discretizaciones se presentan en la Figura 2. En particular, se puede apreciar que todos los resultados son visualmente aceptables, pues los bordes se han preservado y el ruido se ha reducido de manera significativa.

En la Figura 3 se hace una comparativa de la iteraciones necesarias para alcanzar el criterio de paro $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon \|u_k + \varepsilon\|_\infty$ con $\varepsilon = 10^{-9}$. Tal como se esperaba, el punto fijo propuesto resultó ser superior en el rendimiento, lo cual es consistente con lo descrito en [12].

En la Tabla 1 se muestra una comparativa de las métricas obtenidas por cada método numérico y discretización, en general, podemos notar una ligera mejoría en el PSNR y SSIM de las soluciones obtenidas discretizando con puntos centrales. Además, se observa que los valores permanecen iguales en cada método, de lo cual se infiere que la calidad de los resultados no depende del algoritmo numérico para hallar la solución de la ecuación diferencial, sino de la discretización empleada.

Tabla 1: Comparación de métricas de las soluciones obtenidas.

Método numérico	Discretización	PSNR	SSIM
Descenso Gradiente	Puntos centrales	55.93	0.809
	Forward-Backward	55.88	0.804
Nesterov	Puntos centrales	55.93	0.809
	Forward-Backward	55.88	0.804
Punto fijo	Puntos centrales	55.93	0.809
	Forward-Backward	55.88	0.804



(a) Descenso gradiente con Forward-Backward.



(b) Descenso Gradiente con puntos centrales.



(c) Nesterov Momentum con Forward-Backward.



(d) Nesterov Momentum con puntos centrales.



(e) Punto fijo con Forward-Backward.



(f) Punto fijo con puntos centrales.

Figura 2: Resultados obtenidos. En la columna izquierda los algoritmos con la discretización Forward-Backward y en la derecha con puntos centrales.

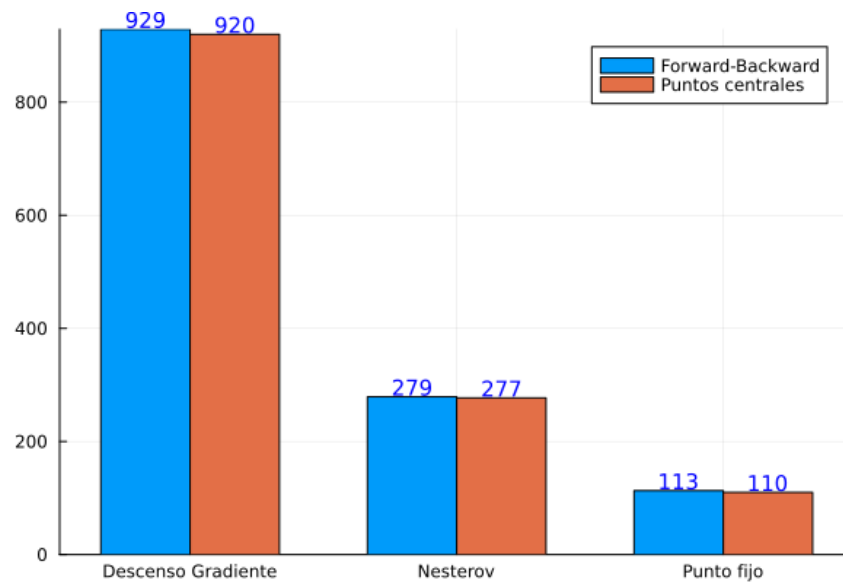


Figura 3: Iteraciones necesarias para alcanzar el criterio de paro.

Los experimentos mostrados hasta ahora sugieren que no existe una diferencia significativa entre una discretización u otra pues la variación que existe entre los resultados pudiera parecer mínima, por ello, se realiza una comparación del comportamiento de las métricas ante la presencia de un ruido aditivo Gaussiano con mayor desviación estándar σ .

Para fines de justa comparación empleamos los mismo valores para todos los parámetros e hicimos variar σ entre el intervalo $[0.05, 0.4]$.

En la figura 4 se muestra la comparación del comportamiento de las métricas ante la presencia de mayor ruido. En ella observamos que cuando el ruido tiene valores de σ entre 0 y 0.1 no hay gran diferencia entre usar Forward-Backward o puntos centrales, lo que sugiere que no es muy relevante para la calidad de los resultados. Por el contrario, a medida que es mayor la presencia de ruido existe ventaja de utilizar puntos centrales como discretización del término variacional sobre Forward-Backward, pues utilizando PSNR como métrica de evaluación del desempeño de la eliminación de ruido puede alcanzar una diferencia de hasta 2 dB, mientras que el caso del SSIM de 0.03, lo cual representa una mejora pues la diferencia es mayor a 10^{-4} como se ha sugerido en [15] para que sea significativo.

4. Conclusiones

En este artículo se presentó una comparativa de dos discretizaciones comúnmente empleadas en la solución numérica de un modelo de variación total para la eliminación de ruido en imágenes. Estas discretizaciones fueron capaces de preservar bordes y reducir el ruido de manera aceptable tal como se estimaba para el modelo. Además, como método de comparación, se dieron métricas para la evaluación de su desempeño en tres algoritmos numéricos habitualmente utilizados para hallar la solución numérica de ecuaciones diferenciales no lineales. Siendo así, podemos concluir que la discretización por puntos centrales resultó ser superior de acuerdo a los valores de PSNR y SSIM, independientemente de la desviación estándar σ que tuviera el ruido aditivo Gaussiano. Cabe mencionar, que esta ventaja se preserva aún ante la presencia de altos niveles de ruido utilizando

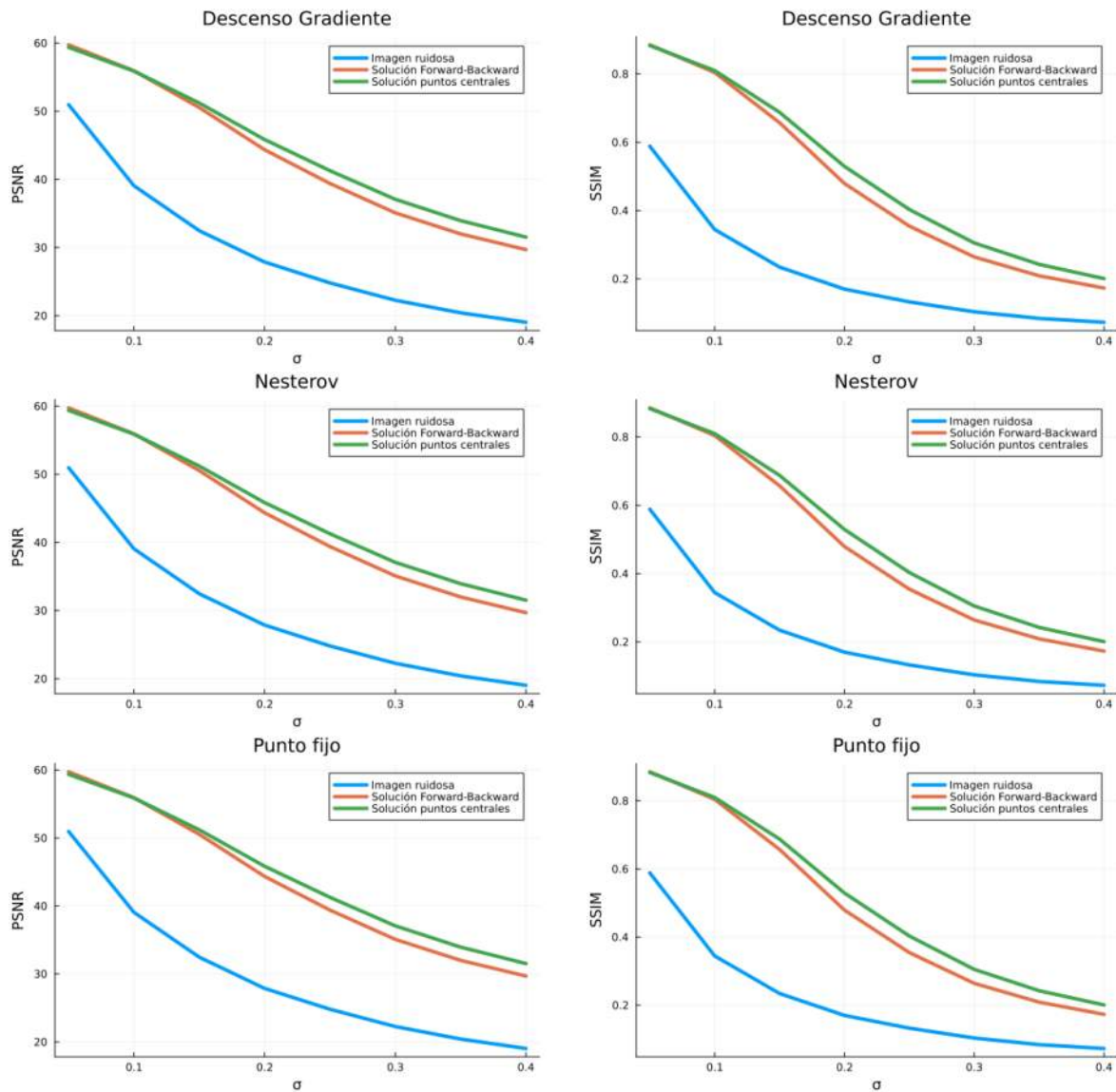


Figura 4: Comparación del comportamiento de las métricas ante la presencia de mayor ruido. En la columna izquierda el comportamiento del PSNR y en la derecha del SSIM.

valores del parámetro λ adecuados para ello.

5. Agradecimientos

Martinez-Ku le agradece al CONAHCYT el apoyo otorgado a través de la Beca para Estudios de Maestría # 1287720.

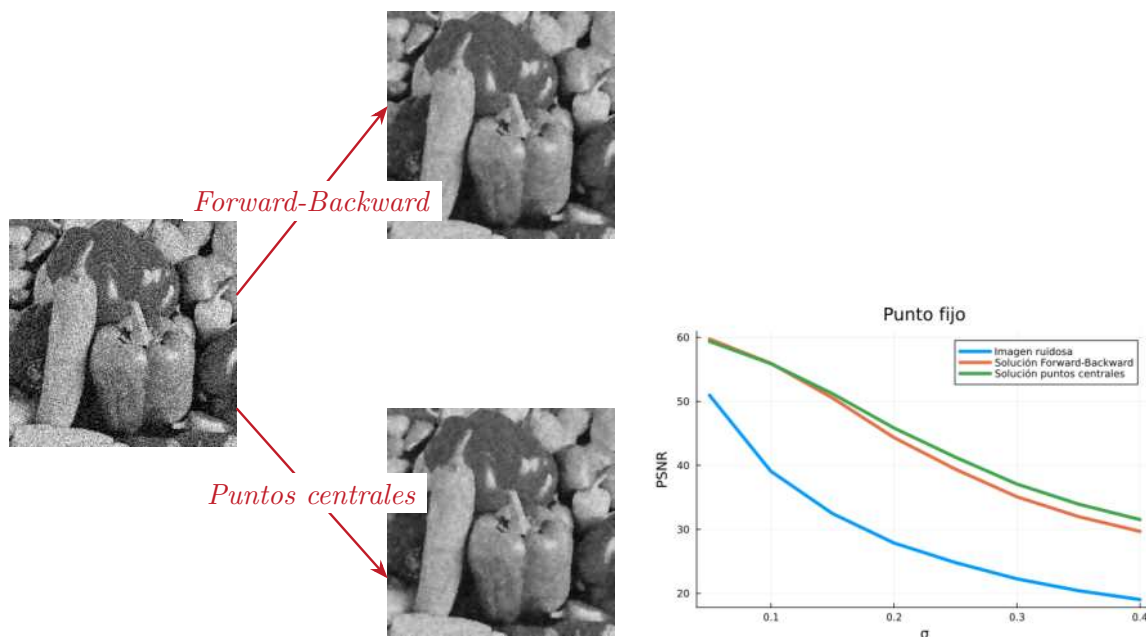
6. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial.

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

8. Resumen gráfico



Referencias

- [1] Jin, Cong, and Luan, Ningli. “An image denoising iterative approach based on total variation and weighting function”. *Multimedia Tools and Applications* 79.29 (2020): 20947–20971.
- [2] Caselles, Vicent, Chambolle, Antonin, Novaga, Matteo, and others. “Total Variation in Imaging.”. *Handbook of mathematical methods in imaging* 1.2 (2015): 3.

- [3] Tang, Liming, and Fang, Zhuang. “Edge and contrast preserving in total variation image denoising”. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2016. (2016): 1–21.
- [4] Strong, David, and Chan, Tony. “Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization”. *Inverse problems* 19.6 (2003): S165.
- [5] Rudin, Leonid I, Osher, Stanley, and Fatemi, Emad. “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”. *Physica D: nonlinear phenomena* 60.1-4 (1992): 259–268.
- [6] Chan, Tony F, Zhou, Hao Min, and Chan, Raymond Hon-fu. *Continuation method for total variation denoising problems*. Vol. 2563.
- [7] Saxena, Chandrika, and Kourav, Deepak. “Noises and image denoising techniques: A brief survey”. *International journal of Emerging Technology and advanced Engineering* 4.3 (2014): 878–885.
- [8] Chambolle, Antonin, and Lions, Pierre-Louis. “Image recovery via total variation minimization and related problems”. *Numerische Mathematik* 76. (1997): 167–188.
- [9] Ivan May-Cen, Ricardo Legarda-Saenz, and Carlos Brito-Loeza . “A Variational Model for Wrapped Phase Denoising”. *Mathematics* 12. (2023).
- [10] Fan, Linwei, Zhang, Fan, Fan, Hui, and Zhang, Caiming. “Brief review of image denoising techniques”. *Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art* 2.1 (2019): 7.
- [11] Kim, Donghwan, and Fessler, Jeffrey A. “Optimized first-order methods for smooth convex minimization”. *Mathematical programming* 159. (2016): 81–107.
- [12] Vogel, Curtis R, and Oman, Mary E. “Iterative methods for total variation denoising”. *SIAM Journal on Scientific Computing* 17.1 (1996): 227–238.
- [13] Bezanson, Jeff, Edelman, Alan, Karpinski, Stefan, and Shah, Viral B. “Julia: A fresh approach to numerical computing”. *SIAM Review* 59.1 (2017): 65–98.
- [14] Wang, Z. Bovik, A.C. Sheikh, H.R. and Simoncelli, E.P. “Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity”. *IEEE Transactions on Image Processing* 13.4 (2004): 600–612.
- [15] Setiadi, De Rosal Igantius Moses. “PSNR vs SSIM: imperceptibility quality assessment for image steganography”. *Multimedia Tools and Applications* 80.6 (2020): 8423–8444.
- [16] Vese, L.A. and Guyader, C.L. *Variational Methods in Image Processing*. CRC Press.

Inferencia bayesiana sobre el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto-gamma

Pérez-Reyes L.^{1,*} , Argáez-Sosa J.¹ , Pantí-Trejo H.¹ 

¹Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. Anillo Periférico Norte,
Tablaje Cat. 13615, Colonia Chuburná Hidalgo Inn, Mérida, Yucatán, México

*l.g.perez@outlook.com

Resumen

En este trabajo, considerando un intervalo de tiempo fijo como periodo de observación, se realiza un estudio inferencial para estimar el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto, bajo el supuesto que la densidad *a priori* es gamma. Se calculan los estimadores de densidad *a posteriori* y de Bayes para el parámetro de intensidad. De igual forma, se obtienen expresiones para la densidad predictiva para un nuevo tiempo entre ocurrencias, la distribución del número de eventos que ocurren en el intervalo de observación y la densidad conjunta de los tiempos entre ocurrencias de eventos.

Palabras claves: Estadística Bayesiana, Proceso de Poisson mixto, Distribución gamma.

Abstract

In this paper, considering a fixed time interval as the observation period, an inferential study is carried out to estimate the intensity parameter of a mixed Poisson process, under the assumption that the *a priori* density is gamma. The *a posteriori* density and Bayes estimators for the intensity parameter are calculated. Similarly, expressions are obtained for the predictive density for a new time between occurrences, the distribution of the number of events that occur in the observation interval and the joint density of the times between occurrences of events.

Keywords: Bayesian statistics, Mixed Poisson process, Gamma distribution.

Recibido: 2 de diciembre de 2024. Aceptado: 11 de marzo de 2025. Publicado: 30 de abril de 2025.

1. Introducción

En el estudio de sistemas o fenómenos cuyo comportamiento es aleatorio a través del tiempo, la teoría de procesos estocásticos ha sido fundamental para modelarlos. La mayoría de los modelos estocásticos son caracterizados por parámetros y las cantidades de interés son determinadas por estos parámetros. En las aplicaciones, estos parámetros son desconocidos por lo que se requieren metodologías o procedimientos para su estimación.

De la gran variedad de modelos estocásticos que han sido estudiados, el proceso de Poisson homogéneo ha recibido especial atención. El proceso de Poisson homogéneo es mayormente utilizado como modelo para contar el número de eventos que han ocurrido en un sistema, usualmente a través del tiempo. Además de las propiedades que lo definen, el proceso de Poisson homogéneo está definido por un solo parámetro, el cual es llamado intensidad y se interpreta como la tasa o promedio en la que estos eventos ocurren y se supone que es constante. Sin embargo, debido a que existen sistemas en los cuales la tasa a la cual ocurren los eventos no se puede suponer constante, es pertinente

considerar la intensidad aleatoria. Cuando esto ocurre, el proceso estocástico resultante es conocido como proceso de Poisson mixto. Al suponer que en un proceso de Poisson la intensidad es aleatoria, se considera una distribución de probabilidad para la tasa del proceso de Poisson. Lo anterior motiva para abordar el estudio inferencial para el proceso de Poisson mixto bajo un enfoque bayesiano, considerando una distribución *a priori* para la intensidad.

En este artículo se estudia el proceso de Poisson mixto suponiendo que la intensidad del proceso sigue una distribución *a priori* gamma y se considera que el proceso de Poisson mixto es observado en un intervalo de longitud fija $[0, T^*]$. Se realizará inferencia para el parámetro de intensidad, esto es, se calculará la distribución *a posteriori*, la distribución predictiva para un nuevo tiempo entre ocurrencias y la distribución del número total de eventos que ocurren en el intervalo $[0, T^*]$.

El artículo está organizado como sigue: en la Sección 2 se presentan las definiciones y resultados que se utilizarán en la siguiente sección. En la Sección 3 se calcula la densidad *a posteriori*, las reglas de Bayes y la distribución predictiva del nuevo tiempo entre ocurrencias de un evento. Finalmente en la Sección 4 se escriben algunas conclusiones de este trabajo.

2. Preliminares

En esta sección se proporcionan los elementos principales que serán utilizados en este trabajo, los cuales corresponden a la densidad gamma, la densidad beta-prima, el proceso de Poisson homogéneo y el proceso de Poisson mixto. Se enunciarán y en algunos casos se demostrarán las propiedades más importantes que serán utilizadas en este artículo.

Distribución gamma

Se dice que una variable aleatoria Λ sigue una distribución gamma con parámetros $\alpha, \beta > 0$, si su función de densidad está dada por

$$f_{\Lambda}(\lambda | \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}, \quad \lambda > 0,$$

donde $\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ es la función gamma.

Los momentos de una variable aleatoria gamma de orden k existen y están dados por

$$\mathbb{E}(\Lambda^k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \beta^k = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1) \beta^k. \quad (1)$$

Al igual, la media y varianza son:

$$\mathbb{E}(\Lambda) = \alpha\beta, \quad \text{Var}(\Lambda) = \alpha\beta^2. \quad (2)$$

Finalmente, la moda está dada por

$$\text{Moda}(\Lambda) = \beta(\alpha - 1), \quad \alpha > 1. \quad (3)$$

Distribución beta-prima

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución beta-prima con parámetros $a, b > 0$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(x | a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1+x)^{-a-b}, \quad 0 < x < \infty,$$

donde $B(a, b) := \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ es la función beta.

La función de distribución acumulada de una variable beta-prima está dada por

$$F_X(x | a, b) = \frac{\int_0^{\frac{x}{1+x}} y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy}{B(a, b)}.$$

Los momentos de orden k , la media y la varianza son:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^k) &= \frac{B(a+k, b-k)}{B(a, b)}, \quad b > k, \\ \mathbb{E}(X) &= \frac{a}{b-1}, \quad b > 1, \\ \text{Var}(X) &= \frac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}, \quad b > 2. \end{aligned}$$

Para mayor información de estos resultados, ver [1].

Proceso de Poisson homogéneo

Para definir un proceso de Poisson mixto, primero definimos un proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$ (también llamada tasa). Un proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ es un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados $E = \{0, 1, \dots\}$, para el cual se cumplen las siguientes condiciones (ver [2]):

- (i) $X_0 = 0$;
- (ii) Para cualesquiera tiempos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, los incrementos del proceso

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son variables aleatorias independientes;

- (iii) Para $s \geq 0$ y $t > 0$, la variable aleatoria $X_{s+t} - X_s$ tiene distribución Poisson con parámetro λt , i.e.,

$$\mathbb{P}(X_{s+t} - X_s = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De manera resumida, el proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$ es un proceso estocástico que inicia en cero cuyos incrementos son independientes y estacionarios. Además, si X_t representa el número de eventos ocurridos hasta el instante t , debido a que X_t es una variable aleatoria Poisson con parámetro λt , se sigue $\mathbb{E}(X_t) = \lambda t$, por lo que λ se interpreta como la tasa con la cual ocurren los eventos por unidad de tiempo.

Ahora bien, si los eventos de interés ocurren en los tiempos aleatorios $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n, \dots$, donde por convención $T_0 = 0$, los tiempos entre ocurrencias de los eventos del proceso son definidos por:

$$W_n = T_n - T_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

de tal forma que el tiempo de ocurrencia del n -ésimo evento se puede escribir como:

$$T_n = \sum_{i=1}^n W_i, \quad n \geq 1.$$

Entonces X_t se puede escribir como:

$$X_t = \max \{m : T_m \leq t\} = \max \left\{ m : \sum_{k=1}^m W_k \leq t \right\}, \quad t > 0.$$

Ya que en el proceso de Poisson homogéneo se supone que $W_1, W_2, \dots$ son variables aleatorias independientes exponenciales con media λ^{-1} , entonces el proceso de Poisson homogéneo es un proceso de contar con tiempos entre ocurrencias de eventos independientes exponenciales con media λ^{-1} . Es conocido que la distribución exponencial cumple la propiedad de pérdida de memoria, a saber, si W es una variable aleatoria exponencial con media λ^{-1} , entonces

$$\mathbb{P}(W > t + s \mid W > s) = \mathbb{P}(W > t), \quad s, t > 0. \quad (4)$$

La propiedad de pérdida de memoria de una variable aleatoria exponencial permite establecer el Teorema 2.1, el cual se utilizará en la Sección 3 para calcular la distribución predictiva de la siguiente observación del proceso. Este resultado es ampliamente utilizado en la teoría de procesos de Poisson, sin embargo, en la revisión realizada por los autores, no se encontró prueba alguna del mismo, por tal razón, se escribe su demostración.

Teorema 2.1. Sean $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$, T_n el tiempo de ocurrencia del n -ésimo evento, W_{n+1} el tiempo entre las ocurrencias del n -ésimo y el $(n+1)$ -ésimo eventos y $T^* > 0$. Entonces:

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t \mid W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^*) = \mathbb{P}(W_{n+1} > t), \quad t > 0.$$

Demostración. Por definición de la probabilidad condicional,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t \mid W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^*) \\ &= \frac{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t, W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^*)}{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^*)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t, T_n \leq T^*)}{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^*)}. \end{aligned}$$

Luego, la probabilidad del numerador es:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t, T_n \leq T^*) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t, T_n \leq T^* \mid T_n = s) f_{T_n}(s) ds \\ &= \int_0^{T^*} \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - s + t) f_{T_n}(s) ds \\ &= \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^* - s + t)} f_{T_n}(s) ds \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^* - s)} f_{T_n}(s) ds \\ &= \mathbb{P}(W_{n+1} > t) \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^* - s)} f_{T_n}(s) ds, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se utilizó que W_{n+1} es independiente de $T^* - T_n$, ya que $T_n = \sum_{i=1}^n W_i$ y las W_i son independientes, y en la tercera igualdad que W_{n+1} es exponencial con parámetro λ^{-1} . Ahora bien, la probabilidad del denominador es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^*) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^* \mid T_n = s) f_{T_n}(s) ds \\ &= \int_0^{T^*} \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - s) f_{T_n}(s) ds \\ &= \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^*-s)} f_{T_n}(s) ds.\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo las probabilidades se obtiene

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t \mid W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^*) = \mathbb{P}(W_{n+1} > t), \quad t > 0,$$

lo que concluye la prueba. $\square$

Proceso de Poisson mixto

La definición que habitualmente se presenta de un proceso de Poisson mixto involucra un proceso puntual, sin embargo, en este artículo debido a que se usarán las principales propiedades de un proceso de Poisson homogéneo, la definición de proceso de Poisson mixto que se proporcionará, considera un proceso de Poisson homogéneo (ver [3]).

Definición 2.1. Sea Λ una variable aleatoria que toma valores en los números reales positivos. Sea $\{\tilde{X}_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad 1 e independiente de Λ . Sea $X_t = \tilde{X}_{\Lambda t}$, entonces el proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es llamado proceso de Poisson mixto.

De la definición se sigue que si $\mathbb{E}(\Lambda)$ es finito, entonces $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\Lambda)t$. De esta manera, para un proceso de Poisson mixto, $\mathbb{E}(\Lambda)$ se interpreta como la tasa esperada de ocurrencia de eventos por unidad de tiempo.

Para un valor fijo de la intensidad Λ del proceso de Poisson mixto, los tiempos de ocurrencias y tiempos entre ocurrencias de eventos, siguen distribuciones conocidas, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad Λ . Entonces, condicionando a que $\Lambda = \lambda$, para todo $n \geq 1$:

a) $W_1, \dots, W_n$ son independientes y $W_i \sim \text{Exp}(\lambda^{-1})$ para todo $i \geq 1$, i.e.,

$$f_{W_1, \dots, W_n | \Lambda = \lambda}(w_1, \dots, w_n \mid \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda w_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n w_i}, \quad w_1, \dots, w_n > 0.$$

b) $T_n = \sum_{k=1}^n W_k \sim \text{Gamma}(n, \lambda^{-1})$, i.e.,

$$f_{T_n | \Lambda = \lambda}(t \mid \lambda) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que dado $\Lambda = \lambda$, $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo con parámetro de intensidad λ y las afirmaciones a) y b) son válidas para esta clase de procesos (ver [2]). $\square$

Si Λ es una variable aleatoria gamma con parámetros α y β , se tiene que el vector aleatorio $(W_1, \dots, W_n)$ tiene función de densidad dada por

$$f_{W_1, \dots, W_n}(w_1, \dots, w_n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\beta^{-n}\Gamma(\alpha)} \left(1 + \beta \sum_{i=1}^n w_i\right)^{-(n+\alpha)}. \quad (5)$$

En efecto, aplicando el Teorema 2.2

$$\begin{aligned} f_{W_1, \dots, W_n}(w_1, \dots, w_n) &= \int_0^\infty f_{W_1, \dots, W_n | \Lambda = \lambda}(w_1, \dots, w_n | \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n w_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}} d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda(\beta^{-1} + \sum_{i=1}^n w_i)} d\lambda. \end{aligned}$$

Completando una densidad gamma con parámetros $n + \alpha$ y $(\beta^{-1} + \sum_{i=1}^n w_i)^{-1}$ se sigue (5).

Para concluir esta sección, se establece un resultado sobre el comportamiento en tiempo finito ($t < \infty$) y a largo plazo ($t \rightarrow \infty$) del proceso de Poisson mixto. Este teorema asegura que si $t < \infty$ es suficientemente grande, entonces es posible observar la ocurrencia de al menos un evento (pero no la ocurrencia de un número infinito de eventos).

Teorema 2.3. Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con intensidad $\Lambda > 0$ y sea $f_\Lambda(\lambda)$ la función de densidad de Λ . Entonces, se cumple que:

- a) $\mathbb{P}(X_t < \infty) = 1$ para todo $t \geq 0$,
- b) $X_t \xrightarrow{c.s.} \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Para cualquier $t > 0$:

$$\mathbb{P}(X_t < \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t \leq k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X_t = j).$$

Luego, por el Teorema de Probabilidad Total, el Teorema de Fubini y el Teorema de Convergencia Monótona, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t < \infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t = j | \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X_t = j | \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X_t = j | \Lambda = \lambda) \right) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty \mathbb{P}(X_t = j | \Lambda = \lambda) \right) f_\Lambda(\lambda) d\lambda = 1. \end{aligned}$$

Esto muestra a).

Para mostrar b), note que el proceso de Poisson homogéneo satisface la propiedad del enunciado. Ahora bien, condicionando a que $\Lambda = \lambda$, $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo, y así $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty \mid \Lambda = \lambda) = 1$ para toda $\lambda > 0$. De aquí,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty \mid \Lambda = \lambda\right) dF_\Lambda(\lambda) = 1,$$

lo que muestra b). □

3. Resultados principales de Inferencia Bayesiana

Muestreo en tiempo fijo

Sean $T^* > 0$ un número real positivo fijo y $N = X_{T^*}$, el número total de eventos que ocurren en el intervalo $[0, T^*]$. Supongamos que se ha observado una realización de un proceso de Poisson mixto con intensidad $\Lambda > 0$ en el intervalo $[0, T^*]$ y se observaron $N = n$ eventos, $n \geq 1$. Sean $t_1, t_2, \dots, t_n$ los tiempos de ocurrencia de los eventos observados y $w_1, w_2, \dots, w_n$ los tiempos entre ocurrencias de tales eventos, esto es $w_1 = t_1$ y $w_i = t_i - t_{i-1}$, $n \geq 2$. De esta manera, la muestra es $w_1, \dots, w_n, n$ que corresponden a los valores observados de $W_1, \dots, W_N$ y a N , respectivamente.

Ahora bien, debido a que el evento $(n+1)$ -ésimo no fue observado en el intervalo $[0, T^*]$, tenemos que $t_n \leq T^* < T_{n+1}$, o de manera equivalente, $W_{n+1} > T^* - t_n$ y gracias al Teorema 2.2 la probabilidad de que esto ocurra está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - t_n) &= \int_{T^* - t_n}^\infty \lambda e^{-\lambda w_{n+1}} dw_{n+1} \\ &= e^{-\lambda(T^* - t_n)}. \end{aligned}$$

De esta manera, por el Teorema 2.2, la definición de $w_1, \dots, w_n$ y la probabilidad anterior, se obtiene la función de verosimilitud de λ :

$$\begin{aligned} L(\lambda \mid w_1, \dots, w_n) &= f_{W_1, \dots, W_n}(w_1, \dots, w_n \mid \lambda) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda w_k} \right) \mathbb{P}(t_n \leq T^* < T_{n+1}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda w_k} \right) \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - t_n) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^n w_k} e^{-\lambda(T^* - t_n)} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda(T^* - t_n)} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda T^*}. \end{aligned}$$

Inferencia bayesiana en el muestreo en tiempo fijo

Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad $\Lambda > 0$, donde Λ sigue una distribución *a priori* gamma $\xi(\lambda \mid \alpha, \beta)$ con hiperparámetros $\alpha, \beta > 0$. Para realizar inferencia en el parámetro de intensidad Λ del proceso desde el enfoque bayesiano, se calcula la distribución *a posteriori* de Λ , como sigue:

$$\begin{aligned}
\xi(\lambda \mid w_1, \dots, w_n) &= \frac{L(\lambda \mid w_1, \dots, w_n) \xi(\lambda \mid \alpha, \beta)}{\int_0^\infty L(\lambda \mid w_1, \dots, w_n) \xi(\lambda \mid \alpha, \beta) d\lambda} \\
&= \frac{\lambda^n e^{-\lambda T^*} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda T^*} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}} d\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)}}{\int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)} d\lambda}.
\end{aligned}$$

Completando una distribución gamma con parámetros $n + \alpha$ y $(T^* + \beta^{-1})^{-1}$ en el denominador de la *a posteriori*, resulta

$$\xi(\lambda \mid w_1, \dots, w_n) = \frac{\lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma(n + \alpha) \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}}.$$

Por lo tanto, la distribución *a posteriori* del parámetro de intensidad Λ corresponde a una densidad gamma con parámetros $n + \alpha$ y $(T^* + \beta^{-1})^{-1}$, *i.e.*,

$$\Lambda \mid w_1, \dots, w_n \sim \text{Gamma} \left(n + \alpha, \left(T^* + \frac{1}{\beta} \right)^{-1} \right).$$

En [4] y [5] se establecen fórmulas para las reglas de Bayes considerando las funciones de pérdida cuadrática, error absoluto e indicadora, las cuales corresponden a la media, mediana y moda, respectivamente. Haciendo uso de la distribución *a posteriori* obtenida, se calculan fórmulas para las reglas de Bayes, respectivamente:

- La regla de Bayes con respecto a la función de pérdida cuadrática $L(\lambda, \hat{\lambda}) = (\lambda - \hat{\lambda})^2$ es

$$\hat{\lambda} = \mathbb{E}(\Lambda \mid w_1, \dots, w_n) = (n + \alpha) \left(T^* + \frac{1}{\beta} \right)^{-1}.$$

- La regla de Bayes con respecto a la función error absoluto $L(\lambda, \hat{\lambda}) = |\lambda - \hat{\lambda}|$ es

$$\hat{\lambda} = q_{0.5},$$

donde $q_{0.5}$ es la mediana de la distribución *a posteriori*, *i.e.*,

$$\frac{1}{2} = \int_0^{q_{0.5}} \xi(\lambda \mid w_1, \dots, w_n) d\lambda.$$

- La regla de Bayes con respecto a la función indicadora $L(\lambda, \hat{\lambda}) = \mathbf{1}_{\{\hat{\lambda} \neq \lambda\}}$ es

$$\hat{\lambda} = \text{Moda}(\Lambda \mid w_1, \dots, w_n) = \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-1} (n + \alpha - 1).$$

Haciendo uso de la distribución *a posteriori* obtenida, usando (1), se obtienen los momentos de orden k de la distribución *a posteriori* del parámetro de intensidad:

$$\mathbb{E}(\Lambda^k \mid w_1, \dots, w_n) = \frac{\Gamma(k + n + \alpha)}{\Gamma(n + \alpha)} \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-k}.$$

De manera particular también se obtiene la varianza de la distribución *a posteriori* del parámetro de intensidad, considerando que tiene una distribución gamma con parámetros $n + \alpha$ y $(T^* + \beta^{-1})^{-1}$:

$$\text{Var}(\Lambda \mid w_1, \dots, w_n) = (n + \alpha) \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-2}.$$

En la estadística bayesiana, la distribución predictiva dada la muestra se define como:

$$\xi(w_{n+1} \mid w_1, \dots, w_n) = \int_0^\infty f_{W_{n+1}|\Lambda}(w_{n+1} \mid \lambda) \xi(\lambda \mid w_1, \dots, w_n) d\lambda.$$

Esta distribución permitirá realizar inferencia estadística sobre el nuevo tiempo entre ocurrencias W_{n+1} , a partir de la muestra observada, $w_1, \dots, w_n$, en el intervalo $[0, T^*]$ (predicción). Sin embargo, en el muestreo en tiempo fijo para el proceso de Poisson mixto, se tiene que el n -ésimo evento observado en la realización del proceso se observó antes del tiempo T^* , lo que implica que el siguiente, el $(n + 1)$ -ésimo evento, ocurrirá posterior al instante T^* , esto es, $T_n \leq T^* < T_{n+1}$ y por lo tanto, no se observó en la muestra. De tal forma que se desea predecir el tiempo que falta para el $(n + 1)$ -ésimo evento, basado en la información obtenida en el intervalo de observación $[0, T^*]$ y teniendo en cuenta que $T_{n+1} > T^*$. Así, se desea calcular la distribución condicional del tiempo

$$\widetilde{W} := T_{n+1} - T^* = W_{n+1} + T_n - T^*,$$

dados $\widetilde{W} > 0$ y la muestra obtenida $w_1, \dots, w_n$ en el intervalo $[0, T^*]$. El siguiente teorema establece que en un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad $\Lambda > 0$, la distribución condicional de $\widetilde{W}$ dados $\widetilde{W} > 0$ y la muestra obtenida $w_1, \dots, w_n$ en el intervalo $[0, T^*]$, es igual a la distribución predictiva de W_{n+1} .

Teorema 3.1. Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad $\Lambda > 0$ y W_{n+1} el tiempo entre las ocurrencias del n -ésimo y el $(n + 1)$ -ésimo eventos. Entonces, dado los tiempos entre ocurrencias $w_1, \dots, w_n$ de los n eventos observados hasta un instante $T^* > 0$:

$$\widetilde{W} \mid W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n \stackrel{d}{=} W_{n+1} \mid W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n.$$

Demostración. Primero, observe que si se marginaliza el vector $(\widetilde{W}, W_1, \dots, W_n, \lambda)$, se obtiene

$$f_{\widetilde{W}, W_1, \dots, W_n}(\widetilde{w}, w_1, \dots, w_n) = \int_0^\infty f_{\widetilde{W}, W_1, \dots, W_n, \Lambda}(\widetilde{w}, w_1, \dots, w_n, \lambda) d\lambda. \quad (6)$$

Utilizando la definición de función de densidad condicional se obtiene

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{W} \mid W_1, \dots, W_n, \Lambda}(\widetilde{w} \mid w_1, \dots, w_n, \lambda) &= \frac{f_{\widetilde{W}, W_1, \dots, W_n, \Lambda}(\widetilde{w}, w_1, \dots, w_n, \lambda)}{f_{W_1, \dots, W_n, \Lambda}(w_1, \dots, w_n, \lambda)} \\ &= \frac{f_{\widetilde{W}, W_1, \dots, W_n, \Lambda}(\widetilde{w}, w_1, \dots, w_n, \lambda)}{f_{W_1, \dots, W_n \mid \Lambda}(w_1, \dots, w_n \mid \lambda) f_{\Lambda}(\lambda)}. \end{aligned} \quad (7)$$

De esta forma, utilizando las relaciones (6) y (7), resulta

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{W}|W_1,\dots,W_n}(\widetilde{w} | w_1, \dots, w_n) &= \frac{f_{\widetilde{W},W_1,\dots,W_n}(\widetilde{w}, w_1, \dots, w_n)}{f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n)} \\ &= \int_0^\infty \frac{f_{\widetilde{W},W_1,\dots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w}, w_1, \dots, w_n, \lambda)}{f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n)} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{f_{\widetilde{W}|W_1,\dots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w} | w_1, \dots, w_n, \lambda) f_{W_1,\dots,W_n|\Lambda}(w_1, \dots, w_n | \lambda) f_\Lambda(\lambda)}{f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n)} d\lambda. \end{aligned}$$

Ahora bien, por el Teorema 2.1

$$f_{\widetilde{W}|W_1,\dots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w} | w_1, \dots, w_n, \lambda) = f_{W_{n+1}|\Lambda}(w_{n+1} | \lambda).$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que $W_1, \dots, W_n, W_{n+1}$, condicionadas a $\Lambda = \lambda$, son variables aleatorias independientes, se sigue

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{W}|W_1,\dots,W_n}(\widetilde{w} | w_1, \dots, w_n) &= \int_0^\infty \frac{f_{W_{n+1}|\Lambda}(w_{n+1} | \lambda) f_{W_1,\dots,W_n|\Lambda}(w_1, \dots, w_n | \lambda) f_\Lambda(\lambda)}{f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n)} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{f_{W_{n+1},W_1,\dots,W_n|\Lambda}(w_{n+1}, w_1, \dots, w_n | \lambda) f_\Lambda(\lambda)}{f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n)} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{f_{W_{n+1},W_1,\dots,W_n,\Lambda}(w_{n+1}, w_1, \dots, w_n, \lambda)}{f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n)} d\lambda \\ &= \frac{f_{W_{n+1},W_1,\dots,W_n}(w_{n+1}, w_1, \dots, w_n)}{f_{W_1,\dots,W_n}(w_1, \dots, w_n)} \\ &= f_{W_{n+1}|W_1,\dots,W_n}(w_{n+1} | w_1, \dots, w_n), \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se utilizó que

$$f_{W_{n+1},W_1,\dots,W_n|\Lambda}(w_{n+1}, w_1, \dots, w_n | \lambda) = \frac{f_{W_{n+1},W_1,\dots,W_n,\Lambda}(w_{n+1}, w_1, \dots, w_n, \lambda)}{f_\Lambda(\lambda)}.$$

□

Como consecuencia del teorema anterior, es posible calcular la distribución predictiva y afirmar que ésta es la que se requiere para predecir el tiempo de ocurrencia del siguiente evento, dada la muestra:

$$\begin{aligned} \xi(w_{n+1} | w_1, \dots, w_n) &= \int_0^\infty f_{W_{n+1}|\Lambda=\lambda}(w_{n+1} | \lambda) \xi(\lambda | w_1, \dots, w_n) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda w_{n+1}} \frac{\lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda(T^* + \frac{1}{\beta})}}{\Gamma(n+\alpha) \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+\alpha} e^{-\lambda(w_{n+1} + T^* + \frac{1}{\beta})}}{\Gamma(n+\alpha) \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}} d\lambda. \end{aligned}$$

Completando una distribución gamma con parámetros $n + \alpha + 1$ y $(w_{n+1} + T^* + \beta^{-1})^{-1}$, resulta que la distribución predictiva del nuevo tiempo entre ocurrencias W_{n+1} es

$$\begin{aligned}\xi(w_{n+1} | w_1, \dots, w_n) &= \frac{\Gamma(1 + n + \alpha) \left(w_{n+1} + T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-(1+n+\alpha)}}{\Gamma(n + \alpha) \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}} \\ &= \beta \frac{\Gamma(1 + n + \alpha)}{\Gamma(n + \alpha)} \frac{(1 + \beta(w_{n+1} + T^*))^{-(1+n+\alpha)}}{(1 + \beta T^*)^{-(n+\alpha)}} \\ &= \beta \frac{\Gamma(1 + n + \alpha)}{\Gamma(n + \alpha)} \frac{(1 + \beta T^*)^{n+\alpha}}{(1 + \beta(w_{n+1} + T^*))^{1+n+\alpha}} \\ &= \frac{\beta}{B(1, n + \alpha)} \left(1 - \frac{\beta w_{n+1}}{1 + \beta(w_{n+1} + T^*)}\right)^{n+\alpha-1} \frac{1 + \beta T^*}{(1 + \beta(w_{n+1} + T^*))^2}.\end{aligned}$$

La variable $W_{n+1} | W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n$ es una función de una variable aleatoria que sigue una distribución beta-prima (ver [1]), como se muestra en el siguiente teorema, el cual también proporciona una manera de simular valores de la variable $W_{n+1} | W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n$.

Teorema 3.2. Sea $Y = \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right) X$, donde $X \sim \beta'(1, n + \alpha)$. Entonces, la función de densidad de Y está dada por

$$f_Y(y) = \frac{\beta}{B(1, n + \alpha)} \left(1 - \frac{\beta y}{1 + \beta(y + T^*)}\right)^{n+\alpha-1} \frac{1 + \beta T^*}{(1 + \beta(y + T^*))^2}, \quad y > 0.$$

Demostración. Usando la técnica de la transformación para variables aleatorias, se sigue que para la función $y = g(x) = \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right) x$, la función de densidad de Y es

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \\ &= \frac{\beta}{B(1, n + \alpha)} \left(1 - \frac{\beta y}{1 + \beta(y + T^*)}\right)^{n+\alpha-1} \frac{1 + \beta T^*}{(1 + \beta(y + T^*))^2}, \quad y > 0.\end{aligned}$$

□

El resultado anterior nos permite establecer que la función de supervivencia del nuevo tiempo entre ocurrencias $W_{n+1} | W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n$ es

$$S(w | w_1, \dots, w_n) = \left(1 - \frac{\beta w}{1 + \beta(w + T^*)}\right)^{n+\alpha}, \quad w > 0.$$

Asimismo, los momentos de orden k , la media y la varianza del siguiente tiempo entre ocurrencias $W_{n+1} \mid W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n$ están dados por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_{n+1}^k \mid w_1, \dots, w_n) &= \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^k \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+\alpha-k)}{\Gamma(n+\alpha)}, \quad n+\alpha > k, \\ \mathbb{E}(W_{n+1} \mid w_1, \dots, w_n) &= \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{n+\alpha-1}, \\ \text{Var}(W_{n+1} \mid w_1, \dots, w_n) &= \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^2 \frac{n+\alpha}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}.\end{aligned}$$

Para concluir esta sección se presentan resultados de la variable $N = X_{T^*}$, el número de eventos del proceso que ocurren en el intervalo $[0, T^*]$, los cuales permiten entender el comportamiento probabilístico del proceso de Poisson mixto previo a realizar el muestreo en tiempo fijo.

Es bien sabido que en el proceso de Poisson homogéneo, $N = X_{T^*}$ es una variable Poisson con media λT^* , entonces por el Teorema de Probabilidad Total:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N = n \mid \Lambda = \lambda) \xi(\lambda \mid \alpha, \beta) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda T^*)^n e^{-\lambda T^*}}{n!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}} d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{(T^*)^n}{n!} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda(T^* + \frac{1}{\beta})} d\lambda.\end{aligned}$$

Completando una distribución gamma con parámetros $n+\alpha$ y $(T^* + \beta^{-1})$, resulta

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)n!} \left(1 - \frac{1}{1+\beta T^*}\right)^n \left(\frac{1}{1+\beta T^*}\right)^\alpha, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Haciendo uso de la función de probabilidad obtenida, se establece una propiedad de finitud para la variable N , así como condiciones de existencia de su media. El siguiente teorema establece que el número de eventos del proceso que se observan en el intervalo $[0, T^*]$ es siempre finito para cualquier T^* y cualquier distribución *a priori* de la intensidad, así como una equivalencia de existencia entre la media de N y la media de la intensidad Λ del proceso.

Teorema 3.3. *Sea $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Entonces, se cumple que:*

- a) $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$;
- b) $\mathbb{E}(N)$ es finita y está dada por:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\beta T^* \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)},$$

si y solo si $\mathbb{E}(\Lambda)$ es finita.

Demostración. a) Se sigue directamente del Teorema 2.3, ya que $N = X_{T^*}$.

b) Primero, usando el Teorema de Fubini es fácil demostrar que para cualquier variable aleatoria no negativa Y ,

$$\mathbb{E}(N) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > y) dy.$$

Ahora bien, si en particular tomamos $Y = N$, cuyo rango es $k = 0, 1, \dots$, se sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N > y) dy \\ &= \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(N > k) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(N \geq k), \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se utilizó que la función $\mathbb{P}(N > y)$ es una función escalonada. Ahora, con ayuda del resultado anterior aplicado para el cálculo de $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X_{T^*})$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(N > k) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(N > k \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(N > k \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}(N \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda T^* f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= T^* \int_0^\infty \lambda f_\Lambda(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

donde en la tercer igualdad se utilizó de nuevo el Teorema de Fubini y en la quinta igualdad se usó $\mathbb{E}(X_t \mid \Lambda = \lambda) = \lambda t$. Lo anterior establece que $\mathbb{E}(N)$ es finito si y solo si la integral

$$\int_0^\infty \lambda f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

es finita. Sin embargo, la integral anterior corresponde a $\mathbb{E}(\Lambda)$, por lo cual $\mathbb{E}(N)$ es finita si y solo si $\mathbb{E}(\Lambda)$ es finita. $\square$

El supuesto inicial en el muestreo en tiempo fijo para desarrollar las herramientas de la inferencia bayesiana es que el número de eventos observados en la realización del proceso de Poisson en el intervalo $[0, T^*]$ sea al menos uno. Sin embargo, la función de probabilidad de la variable N indica que la probabilidad de que no se observen eventos del proceso en el intervalo $[0, T^*]$ es positiva. De manera precisa, la probabilidad de no observar eventos en el intervalo $[0, T^*]$ es:

$$\mathbb{P}(N = 0) = \left(\frac{1}{1 + \beta T^*} \right)^\alpha.$$

Así, un procedimiento para escoger $T^* > 0$ de tal forma que se pueda observar al menos un evento del proceso de Poisson, es como sigue:

Sea $0 < p < 1$ y sea $T^* > 0$ la longitud del intervalo de observación del proceso. Suponga que la probabilidad de que ocurra al menos un evento del proceso es igual a p , *i.e.*, $\mathbb{P}(N \geq 1) = p$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(N = 0) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1 + \beta T^*} \right)^\alpha.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de la probabilidad y despejando T^* , se obtiene que la probabilidad de que ocurra al menos un evento del proceso en el intervalo $[0, T^*]$ es igual a p si y solo si

$$T^* = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{(1-p)^{1/\alpha}} - 1 \right). \quad (8)$$

En la práctica, el tiempo de observación $T^* > 0$ es fijo y no es controlable, es decir, se establece sin condición alguna y puede ocurrir que no se tenga información (ocurren cero eventos) en el intervalo $[0, T^*]$, en cuyo caso habrá que proponer un tiempo mayor, aunque esto pudiera generar costos adicionales de implementación o de cualquier otra índole. El procedimiento anterior propone una forma de asegurar observaciones del proceso de Poisson mixto en el intervalo $[0, T^*]$ con una probabilidad p alta, sin embargo el valor resultante de T^* que se obtiene como solución de la ecuación (8), pudiera ser grande y no implementable en la práctica.

4. Conclusiones

En este artículo se obtuvieron expresiones para la densidad *a posteriori* de la intensidad considerando una densidad *a priori* gamma, resultando en una distribución gamma. Aunque esto ocurre en general cuando se tiene una muestra Poisson-gamma, en este artículo se muestra que se mantiene si se consideran observaciones de un proceso de Poisson mixto con densidad gamma *a priori* para el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto.

En la práctica, comúnmente se fija un tiempo o periodo de observación para obtener la muestra. Sin embargo, también se pudiera establecer el criterio de dejar de observar al momento de ocurrir un número fijo de eventos, digamos n_0 . Si esto ocurre se estaría mostrando en un periodo de tiempo aleatorio $[0, T_{n_0}]$. En este caso, siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en este artículo, se pueden establecer las correspondientes fórmulas para la densidad *a posteriori*, las reglas de Bayes, la densidad predictiva, etc. De igual forma, se pudieran considerar otros tipos de muestreo.

5. Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros anónimos por su cuidadosa revisión y comentarios, que mejoraron la presentación de este artículo.

6. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

Referencias

- [1] E. S. Keeping, Introduction to Statistical Inference. Courier Dover Publications, 1962.
- [2] M. A. Pinsky, S. Karlin, An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, 2011.
- [3] J. Grandell, Mixed Poisson Processes. Chapman & Hall, 1997.
- [4] E. N. Rangel, “¿Qué es la Estadística Bayesiana?”, Journal of Basic Sciences, vol. 1, pp. 1-23, 2015, doi: <https://doi.org/10.19136/jobs.a1n1.1026>.
- [5] J. C. Correa, C. J. Barrera, Introducción a la Estadística Bayesiana. Instituto Tecnológico Metropolitano, 2018.

Memoria de trabajo y desempeño en demostración de identidades trigonométricas: Un modelo de ecuaciones estructurales

Varela Mariana^{1*} , **Reyes Ramón¹** , **Santiago Agustín¹** 

¹Universidad Autónoma de Guerrero, Av. Lázaro Cárdenas s/n Colonia Ciudad Universitaria, Zona Sur. CP 39087, Ciudad Chilpancingo

* 23251020@uagro.mx

Resumen

Este estudio busca analizar la influencia de la función ejecutiva superior en el desempeño de la demostración de identidades trigonométricas; así como si algunos subcomponentes de la memoria de trabajo están influyendo en dicho desempeño. Se aplicó una prueba trigonométrica y psicológica a 80 estudiantes de nivel medio superior. Los datos se analizaron a través del modelo de ecuaciones estructurales. Entre los principales resultados, destaca que existe un efecto directo de la memoria de trabajo hacia uno de los componentes de la demostración de identidades trigonométricas (Deducción de identidades usando la tangente y secante); además se presenta un efecto directo de un subcomponente de la memoria de trabajo (Ordenamiento Alfabético) hacia un componente de la demostración de identidades trigonométricas (Verificación de identidades recíprocas usando seno y coseno). En conclusión, el Ordenamiento Alfabético influye directamente al lenguaje y símbolo numérico, imprescindibles en la resolución de problemas aritméticos, por lo tanto, la baja habilidad en este subcomponente está asociado al bajo rendimiento en dicha resolución y esto puede persistir en grados superiores.

Palabras claves: *Identidades trigonométricas, Memoria de Trabajo, Modelo de Ecuaciones Estructurales, Educación media-superior.*

Abstract

This study aims to analyze the influence of higher executive function on the performance of demonstrating trigonometric identities, as well as whether some subcomponents of working memory are influencing this performance. A trigonometric and psychological test was administered to 80 high school students. The data were analyzed through the structural equation model. Among the main results, it is highlighted that there is a direct effect of working memory on one of the components of demonstrating trigonometric identities (Deduction of identities using tangent and secant); additionally, there is a direct effect of a subcomponent of working memory (Alphabetical Ordering) on a component of demonstrating trigonometric identities (Verification of reciprocal identities using sine and cosine). In conclusion, Alphabetical Ordering directly influences language and numerical symbols, which are essential in solving arithmetic problems. Therefore, low ability in this subcomponent is associated with deficient performance in solving these problems, and this may persist in higher grades.

Keywords: *Trigonometric Identities, Working Memory, Structural Equation Model, High School.*

Recibido: 06 de septiembre de 2024, Aceptado: 11 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introducción

El aprendizaje de temas en la educación a nivel medio superior en matemáticas requiere de la comprensión del amalgamamiento de múltiples áreas como lo es la aritmética, álgebra y geometría. La complicación del proceso de aprendizaje provocará mayores obstáculos en la interiorización de los nuevos conceptos tal como lo es la trigonometría, particularmente las identidades trigonométricas [1].

Las identidades trigonométricas se definen como una ecuación trigonométrica donde, para su solución, se enlazan las funciones y razones trigonométricas, en particular son válidas en todo el campo de los números reales, cabe destacar que muchas de estas identidades surgen del tratamiento de las identidades trigonométricas fundamentales como Identidad de Cociente, Recíproca y Pitagórica [2].

Para la realización de una demostración de identidades se requiere la generalización de conocimientos, es decir, la capacidad de utilizar conocimientos previos (propiedades y/o operaciones algebraicas) y fórmulas vigentes (identidades trigonométricas fundamentales), así como también la creatividad de las personas [3].

A nivel neurológico, en el proceso de aprendizaje confluyen funciones ejecutivas superiores, las cuales, desde la infancia hasta la adolescencia, se superponen o interactúan para la comprensión y retención de la información en el momento que se necesite, ya sea a nivel académico y cotidiano. Una de estas funciones está estrechamente vinculada al aprendizaje en matemáticas, como lo es la memoria de trabajo [4].

La memoria de trabajo se define como la capacidad que se emplea en el momento de registrar una información ya sea de situaciones y/o acontecimientos y a través del razonamiento las personas le dan solución o una interpretación [5]. Por otra parte, un buen funcionamiento del proceso de almacenamiento y recuperación de la memoria de trabajo está asociado con mejoras en las habilidades matemáticas y con el rendimiento académico.

Para la medición de la memoria de trabajo, se divide en tres subtarefas o subcomponentes las cuales son: Señalamiento Autodirigido (SA), Ordenamiento Alfabético (OA) y Memoria Visoespacial (MV), donde SA también es conocido como la Memoria Visoespacial Autodirigida (MVA). Se asocia a MV y MVA en el proceso de cálculo aritmético, por su parte OA se asocia tanto en el lenguaje como en la aritmética, donde en la primera área se le vincula con los fonemas y representación semántica y para la segunda área cumple un papel fundamental en la comprensión simbólica y numérica de las cantidades [6, 7].

En conclusión, este estudio busca analizar la memoria de trabajo con la demostración de identidades trigonométricas y si algunos de los subcomponentes de la memoria de trabajo están influyendo en dicho desempeño en la educación media superior.

2. Metodología

2.1 Participantes

La muestra de este estudio estuvo conformada por 80 estudiantes de una institución educativa distrital de la ciudad de Barranquilla, Atlántico Colombia, los cuales cursaban el décimo grado de educación medio superior.

2.2 Instrumentos

2.2.1. Prueba de demostración de identidad trigonométrica

Se construye una prueba que consta de dos puntos, el primer punto posee 7 ítems que son los pasos de una demostración de una identidad, donde el estudiante deberá enunciar el procedimiento teniendo en cuenta lo desarrollado algebraicamente; por su parte el segundo punto consta de 5 ítems los cuales también son pasos de una demostración de una identidad, pero en éste los estudiantes aplican el proceso algebraico teniendo en cuenta las indicaciones que se les da de manera escrita. La calificación para cada ítem fue de forma binaria, donde 0 corresponde a incorrecto y 1 corresponde a correcto, la descripción de la prueba se muestra en la **tabla 1**.

Tabla 1. Descripción de la prueba de demostración de identidades trigonométricas.

Punto	Evaluación	No. de ítem	Ítem (Justificación)
1	Enunciar el procedimiento algebraico realizado en cada paso de la demostración de una identidad trigonométrica	1	<i>Identidad de cociente</i>
		2	<i>Suma de fracciones</i>
		3	<i>Multiplicación de términos semejantes</i>
		4	<i>Identidad pitagórica</i>
		5	<i>Identidad recíproca</i>
		6	<i>Ley de extremos y medios</i>
		7	<i>Simplificación</i>
2	Desarrollar los procesos algebraicos realizado en cada paso de la demostración de una identidad trigonométrica	8	<i>Identidad cociente</i>
		9	<i>Suma de fracciones heterogéneas</i>
		10	<i>Identidad pitagórica</i>
		11	<i>Identidad recíproca</i>
		12	<i>Resta de fracciones heterogéneas</i>

Fuente. Tomada de [8]

2.2.2 Batería Neuropsicológica de Funciones Ejecutivas y Lóbulos Frontales (BANFE 2)

Para la medición de la memoria de trabajo, se aplicó la Batería Neuropsicológica de Funciones Ejecutivas y Lóbulos Frontales (BANFE 2), la cual está conformada por un total de 16 subtareas diseñadas en [6] que miden distintas funciones ejecutivas. Para recolectar la información con respecto a la memoria de trabajo se llevaron a cabo tres subtareas: “Señalamiento Autodirigido”, “Ordenamiento Alfabético” y “Memoria Visoespacial”. La descripción de dichas subtareas se muestra en la **tabla 2**.

Tabla 2. Descripción de las subtareas para la medición de la memoria de trabajo (BANFE 2).

Subtarea	Descripción	Evaluación	Calificación
Señalamiento Autodirigido (SA)	Evalúa el tiempo que le toma a la persona completar el tocar todas las imágenes	Señalamiento de imágenes en una lámina	Aciertos Perseveraciones
Memoria Visoespacial (MV)	Evalúa la Memoria de Trabajo Visoespacial en una secuencia específica	Secuencia máxima Errores de orden	Nivel máximo señalado Señalamiento de figuras en un orden incorrecto
Ordenamiento Alfabético (OA)	Evalúa la capacidad para mantener y manipular la información	Ensayo 1 Ensayo 2 Ensayo 3	Número de intentos de reproducir una lista de palabras

Fuente. Tomada de [8]

2.3 Procedimiento

La administración de la prueba y la batería se llevó a cabo a finales del año 2019 a los estudiantes de una institución educativa de la ciudad de Barranquilla, la recolección de los datos se realizó durante dos semanas, en la primera semana se administró la batería y la segunda semana se aplicó la prueba trigonométrica.

2.4 Análisis de datos

Para el análisis de los datos se realizó el Modelo de Ecuaciones Estructurales (MEE) a través del software computacional R versión -4.2.3 [9] se utilizó la paquetería “lavaan” desarrollada por Lishinski [10]. Con las funciones *cfa()*, *sem()* y la paquetería “semPlot” desarrollada por Epskamp [11], se utilizó la función de *semPaths()*.

La aplicación del MEE en el ámbito educativo no solo proporciona una formalización explícita del comportamiento de las variables y/o constructos incluidos en teorías más complejas, sino que también permite una comprensión más profunda de cómo estas variables interaccionan entre sí. Este enfoque metodológico es esencial para desentrañar las relaciones subyacentes en la educación, y su capacidad para corroborar hipótesis es invaluable. Además, el MEE facilita la validación de modelos teóricos a través de datos empíricos, asegurando que las relaciones hipotéticas propuestas se sostengan en la práctica. La robustez de este método reside en su habilidad para manejar múltiples variables de manera simultánea, proporcionando una visión holística y detallada del fenómeno de estudio [12].

Para el análisis de bondad de ajuste del MEE, dado que cuenta con una muestra inferior a 100, se considerarán los índices Raíz del Residuo Estandarizado Medio (SRMR) y el Índice de Ajuste Comparativo (CFI) [13].

3. Resultados

Como primera hipótesis se quiere analizar la influencia que tiene la Memoria de Trabajo en los componentes en el desempeño de la demostración de identidades trigonométricas las cuales son: “Verificación de identidades con el seno y coseno” (VSC) y “Verificación de identidades recíprocas del seno y coseno” (VRSC) y “Deducción de identidades trigonométricas utilizando la secante y tangente” (DST).

Los índices de ajuste para el modelo de esta hipótesis fueron un SRMR de 0.080 y un CFI de 0.913, teniendo en cuenta que la muestra es menor a 100 entonces, el $SRMR \leq .09$ indica que el modelo es aceptable de manera global, y por su parte a nivel de incremento el $CFI \geq 0.9$ indica que el modelo es adecuado [12].

Se muestran las estimaciones de los parámetros de la primera hipótesis en la tabla 3 de la cual se puede interpretar que el ítem 6 tienen una mayor carga factorial en el factor “Verificación de identidades recíprocas del seno y coseno”, por su parte en el factor de “Deducción de identidades trigonométricas utilizando la secante y tangente” se destacan los ítems 10 y 11.

Tabla 3. Estimaciones de los componentes e ítems de la primera hipótesis del modelo MEE.

Variable latente	Ítems	Estimación	Error estándar	z-valor	$P(> z)$
VSC	1	1.000			
	2	2.068	0.533	3.879	0.000
	3	2.428	0.626	3.879	0.000
VRSC	4	1.000			
	5	1.178	0.277	4.252	0.000
	6	1.786	0.350	5.097	0.000
	7	1.024	0.220	4.645	0.000
DST	8	1.000			
	9	1.128	0.088	12.802	0.000
	10	1.153	0.087	13.282	0.000
	11	1.169	0.085	13.726	0.000
	12	1.091	0.097	11.300	0.000

Fuente: elaboración propia

De los resultados del modelo, en la tabla 4 se muestra el análisis de los efectos directos entre los componentes de la demostración de identidades trigonométricas y la memoria trabajo, donde se puede concluir que no hay un efecto directo significativo de la memoria de trabajo en “Verificación de identidades con el seno y coseno” y “Verificación de identidades recíprocas del seno y coseno”, debido a que tiene un $p > 0.05$, sin embargo, sí se presenta un efecto de dicha función ejecutiva en el componente de “Deducción de identidades trigonométricas utilizando la secante y tangente” ($p < 0.05$), de igual manera lo expuesto se puede observar en la **figura 1**.

Tabla 4. Análisis de efectos directos de la primera hipótesis del modelo SEM.

Variables latentes		Estimación	Error estándar	z-valor	$P(> z)$
VSC	MT	0.005	0.004	1.419	0.156
VRSC		0.007	0.004	1.625	0.104
DST		0.022	0.009	2.426	0.015

Fuente. Elaboración propia

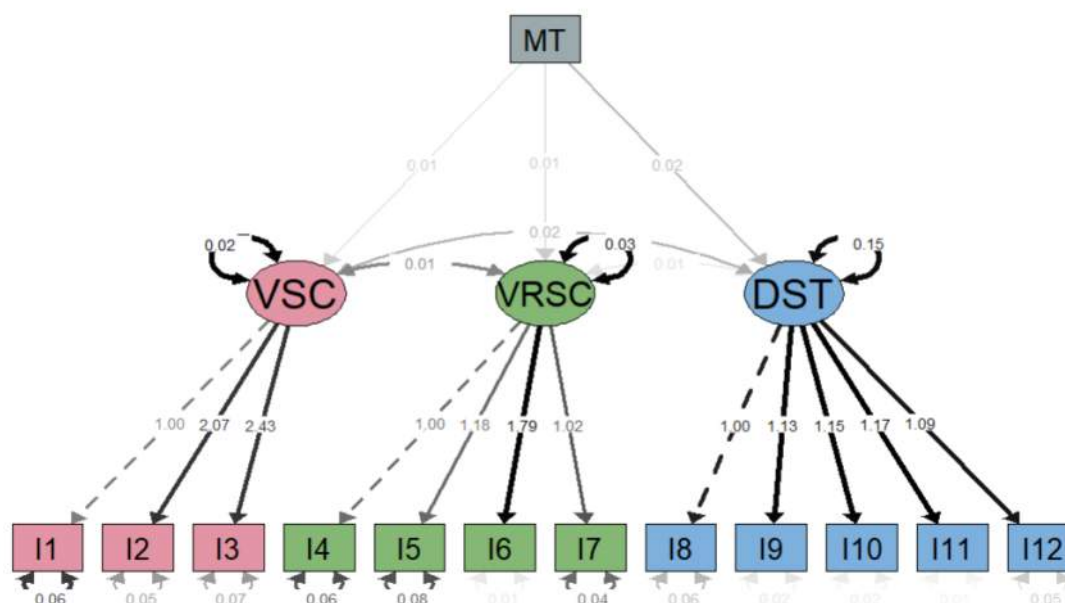


Figura 1. MEE: Análisis de los efectos directos entre los componentes del desempeño en demostración de identidades trigonométricas y la puntuación total de la memoria de trabajo

Como segunda hipótesis se analizará la influencia de cada subcomponente o subtarea de la memoria de trabajo en los componentes del desempeño en demostración de identidades trigonométricas. En contraste, no se encontraron efectos significativos ($p > 0.05$) en las subtarefas de Memoria Visoespacial y Señalamiento Autodirigido. Por tal razón se exponen los resultados de la influencia de la subtarea Ordenamiento Alfabético con el desempeño en demostración de identidades trigonométricas, donde se hallaron p valores significativos.

Dicho modelo tiene los índices de ajuste con SRMR de 0.078 y CFI de 0.921, teniendo en cuenta que la muestra es menor a 100 entonces, el $SRMR \leq .09$ indica que el modelo es aceptable de manera global, y por su parte a nivel de incremento el $CFI \geq 0.9$ indica que el modelo es adecuado [12].

En la **tabla 5** se muestra el análisis de los efectos directos entre los componentes con $p < 0.05$, se puede concluir que se presenta un efecto de dicho subcomponente significativo en el componente de “Verificación de identidades recíprocas usando seno y coseno”.

Tabla 5: Análisis de efectos directos de la segunda hipótesis del modelo MEE

Variables latentes		Estimación	Error estándar	z-valor	P(> z)
VSC	OA	0.013	0.008	1.599	0.110
VRSC		0.019	0.009	2.060	0.039
DST		0.027	0.021	1.323	0.186

Fuente. Elaboración propia

En la figura 2 se puede ver el diagrama del modelo expuesto anteriormente

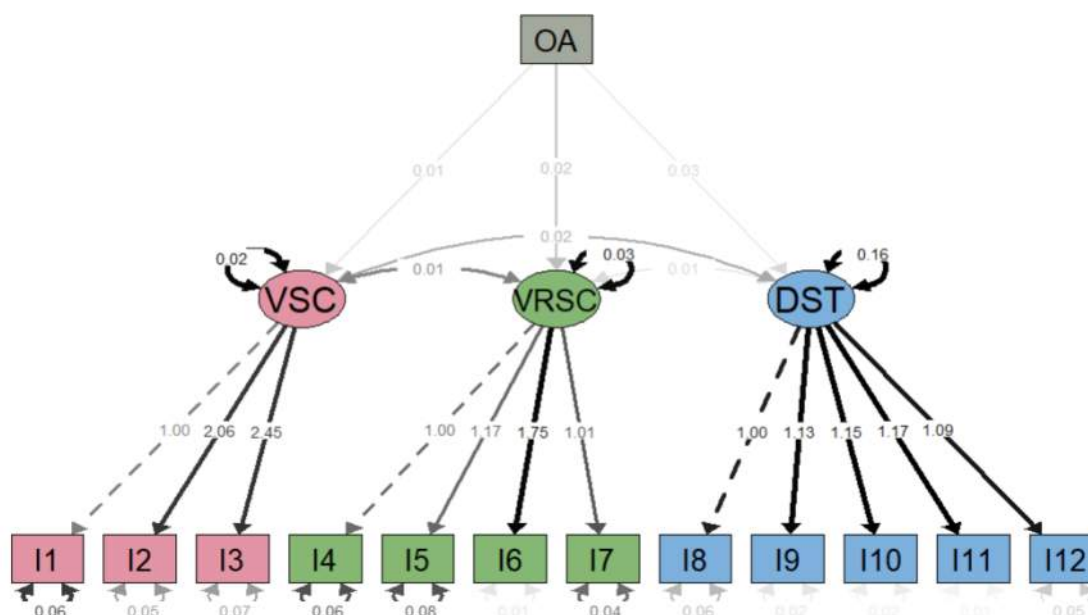


Figura 2. MEE: Análisis de los efectos directos entre los componentes del desempeño en demostración de identidades trigonométricas y componente de Ordenamiento Alfabético

4. Conclusiones

El objetivo de este estudio fue analizar la influencia de la memoria de trabajo en la demostración de identidades trigonométricas en estudiantes de educación medio superior, los modelos SEM subyacentes arrojaron interesantes resultados en el campo educativo.

El primer resultado a destacar es el efecto directo que tiene la memoria de trabajo en el componente del desempeño de la demostración de identidades trigonométricas: “Deducción de identidades trigonométricas utilizando la secante y tangente”, adicionalmente consistía en que el estudiante llevara a cabo procedimiento algebraico para el desarrollo de una demostración de la identidad trigonométrica, en donde se necesita dicha función ejecutiva para la evocación de las propiedades y operaciones algebraicas, geométricas, aritméticas y trigonométricas necesarias en el desarrollo de la demostración de la identidad trigonométrica [8].

El segundo resultado a destacar es el efecto directo de la subtask de la memoria de trabajo “Ordenamiento Alfabético” en el componente de “Verificación de identidades recíprocas usando seno y coseno”, recordando que en este componente el estudiante tenía que enunciar el procedimiento algebraico desarrollado en cada paso de la demostración, lo cual hace necesario la comprensión simbólica (algebraica) y verbal (lenguaje) para poder enunciar adecuadamente el procedimiento algebraico que se está llevando a cabo en dicha demostración por tanto se necesita una habilidad significativa para la subtask en particular para obtener un desempeño efectivo en el problema [7].

5. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

6. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

7. Resumen Grafico

En la **figura 3** se muestra un resumen gráfico en donde convergen los principales resultados de este estudio, el cual es la influencia de la memoria de trabajo en el componente de desempeño de demostración de identidades trigonométricas denominada “Deducción de identidades trigonométricas utilizando la secante y tangente”; y como segundo resultado la influencia de la subtask de memoria de trabajo “Ordenamiento Alfabético” en el componente de desempeño de demostración de identidades trigonométricas llamada “Verificación de identidades recíprocas usando seno y coseno”.

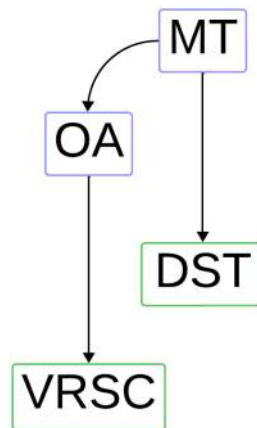


Figura. 3. Resumen grafico del estudio

8. Referencias

[1] F. F. Gualán Caive. “Guía didáctica con enfoque constructivista para el aprendizaje de la trigonometría plana en los estudiantes de primer semestre”. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba, Ecuador, 2024.

- [2] E. D. J. García Ramos & M.D. Posada Ruíz. “Mediación complementaria de GeoGebra y material concreto en los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales en estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II”. Tesis de Maestría, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia, 2022.
- [3] R. R. Gadayev. “Proof of some trigonometric identities,” *Journal of Academic Research and Trends in Educational Sciences*, vol. 1, pp. 325-332, 2022, doi: 10.5281/zenodo.673824.
- [4] D. A. Tamayo Lopera et al. “Nivel de desarrollo de las funciones ejecutivas en estudiantes adolescentes de los colegios públicos de Envigado-Colombia”, *CES psicología*, vol. 11, pp. 21-36, 2018, doi: 10.21615/cesp.11.2.3.
- [5] C. A. Hernández-Suárez et al. “Memoria de trabajo y habilidades matemáticas en estudiantes de educación básica”, *Revista científica*, No. 40, pp. 63-73, 2021, doi: 10.14483/23448350.15400.
- [6] J. Flórez-Lázaro et al. *Batería Neuropsicológica de funciones ejecutivas y lóbulos frontales (BANFE 2)*. México: Manual Moderno, 2014.
- [7] A. C. A. Arens & N. van Tuylen Domínguez. “La memoria de trabajo y su relación con el rendimiento académico en niños con bajo CI”, *Revista de Investigación de la Escuela de Ciencias Psicológicas*, No. 4, pp. 41-52, 2021. doi: 10.57247/riec.vi4.73.
- [8] A. Arrieta & M. Varela. “Memoria de trabajo y desempeño en demostración de identidades trigonométricas en estudiantes de décimo grado”. Tesis de licenciatura. Universidad del Atlántico, Atlántico, Colombia, 2020.
- [9] R Core Team, R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>. 2023.
- [10] A. Lishinski, lavaanPlot: Path Diagrams for 'Lavaan' Models via 'DiagrammeR'. R package version 0.8.1, <https://CRAN.R-project.org/package=lavaanPlot>. 2024.
- [11] S. Epskamp, semPlot: Path Diagrams and Visual Analysis of Various SEM Packages' Output_. R package version 1.1.6, <https://CRAN.R-project.org/package=semPlot>. 2022.
- [12] D. M. A Jiron & L.M.D. Riobóo. “Modelo de ecuaciones estructurales (SEM) y su aplicación en la educación”, *Revista Ciencia y Tecnología El Higo*, Vol. 12, No. 1, pp 28.-41, 2022.
- [13] F. M. Jordan Muiños. “Valor de corte de los índices de ajuste en el análisis factorial confirmatorio”, *Psocial*, Vol. 7, pp. 66-71, 2021.

La visualización en la construcción de polígonos regulares por estudiantes de educación media superior

Orozco, V.^{1*} , Zubieta, G.¹

¹Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), Av Instituto Politécnico Nacional 2508, San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, 07360 Ciudad de México, CDMX.

*Kivi.vov@gmail.com

Resumen

Se propone una posible solución a la falta de conocimiento de las características y propiedades de los polígonos por parte de los estudiantes de bachillerato. Se presenta un diseño de actividades en GeoGebra que toma en cuenta la visualización como una habilidad útil para la presentación y aprendizaje de los polígonos y sus características a partir de sus diagonales. Además, se utilizan los niveles y fases del modelo de Van Hiele para diseñar las actividades. Se observó el tipo de conocimiento que estos estudiantes poseían, tomando en cuenta la definición de comprensión relacional e instrumental dada por Skemp en su libro “The Psychology of Learning Mathematics”. A partir del análisis realizado se pudo observar que, aunque el nivel de los estudiantes oscila entre el nivel 1 y 2 del modelo de Van Hiele, la comprensión resultante no necesariamente es instrumental.

Palabras claves: *Comprensión, GeoGebra, Polígonos, Van Hiele, Visualización*

Abstract

It is proposed a possible solution to the lack of knowledge of the characteristics and properties of polygons by high school students. A design is presented of activities in GeoGebra, it's taken the visualization who a useful ability for the presentation and learning of the polygons and characteristics since diagonals. In addition, levels and phases of the Van Hiele model are used for designing the activities [1]. It was observed the kind of knowledge that the students have, considering the definition of relational and instrumental comprehension given by Skemp in his book “The Psychology of Learning Mathematics”. From the analysis realized we can observe that, although the student's level ranges between 1 and 2 of the Van Hiele model, the comprehension is not necessarily instrumental.

Keywords: *Comprehension, GeoGebra, Polygons, Van Hiele, Visualization*

Recibido: 22 de octubre de 2024, Aceptado: 28 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introducción

Se presenta un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de un diseño de actividades acerca de los polígonos regulares y sus propiedades en un entorno de Geometría dinámica, el diseño fue aplicado a estudiantes que cursaban el segundo semestre de bachillerato. En el diseño de las actividades se tomó en cuenta la visualización desde el punto de vista de Arcavi [2], pues menciona que esta es la capacidad de interpretar datos a través de imágenes o diagramas usando diversas herramientas ya sean análogas como el papel y lápiz o tecnológicas como GeoGebra, las cuales facilitan la interpretación y documentación de la información.

El modelo de Van Hiele, el cual fue utilizado para diseñar las actividades aplicadas, explica los niveles (1. Visualización, 2. Análisis, 3. Ordenación, clasificación o abstracción, 4. Deducción formal, 5. Rigor) por los que los estudiantes deben pasar para aprender geometría [1]. Para realizar el análisis de las actividades, se buscó catalogar el nivel de aprendizaje de los estudiantes a partir de los niveles del modelo mencionado, esto ayudó a determinar el tipo de comprensión de los estudiantes, es decir, de acuerdo con las construcciones dadas y lo mencionado por Skemp [3], se clasificó la comprensión de los estudiantes en relacional o instrumental.

Este trabajo se motiva por una problemática dada en el aula de clases, a saber, los estudiantes egresados de nivel secundaria suelen llegar al nivel educativo medio superior con conocimientos insuficientes acerca del tema de polígonos y sus características. Dicha problemática fue revelada en un examen diagnóstico aplicado a estudiantes de educación media superior en el estado de Tabasco.

2. Antecedentes

El tema de polígonos y sus propiedades en general, ha sido abordado por la matemática educativa desde diferentes enfoques, muchos de ellos orientados al conocimiento de futuros profesores que enseñan este tema. Ejemplo de esto, es el artículo realizado por S. Morales y T. Rosas [4], que muestran que el conocimiento sobre la geometría de futuros profesores suele ser útil solo dentro del área, por lo que busca mostrar que la argumentación gráfica es importante. Esto respalda que el uso de figuras geométricas para enseñar a los estudiantes las propiedades de los polígonos es esencial. Por su parte Gonzáles, et al. [5] muestran en su investigación los errores que los estudiantes suelen cometer al momento de intentar diferenciar los conceptos de área y perímetro. El artículo de Carreño, et al. [6] es de interés para este trabajo debido a que considera como marco teórico los primeros tres niveles del modelo de Van Hiele, en dicho trabajo se menciona que los futuros profesores peruanos suelen estar dentro de los dos primeros niveles del modelo.

La mayoría de estos artículos no utilizan los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), sin embargo, la investigación realizada por Cuervos lancheros, et al. [7] presentan la importancia que los SGD tienen al abordar la enseñanza y aprendizaje de los polígonos, ellos concluyen que el uso de las herramientas como GeoGebra lleva a potenciar las competencias matemáticas y fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes.

2.1 Problemática y propuesta

En la actualidad se reconoce el valor de las figuras geométricas como el triángulo, cuadrado, rectángulo, etc., dado que estas son utilizadas en distintas áreas, por ejemplo, en construcción o el diseño, tal como lo mencionan Bortolussi Alarcón, J., et al. [9]. Es debido a su importancia que son incluidas en los planes de

estudios desde los niveles básicos, pero a pesar de ello muchos de los estudiantes al llegar al nivel medio superior siguen teniendo dificultades para reconocer las propiedades y características de las figuras geométricas, esto se pudo observar en un examen diagnóstico aplicado en una preparatoria del estado de Tabasco previo a un curso de geometría. Del examen diagnóstico se evidencia que los estudiantes de nivel medio superior presentan dificultades para recordar las propiedades y características de los polígonos, por ejemplo, el número de lados de un eneágono, la suma de los ángulos internos de un triángulo o incluso conocer las propiedades que debe cumplir un polígono para que sea regular, lo que deriva en la dificultad para poder trazarlos.

Morales, et al. [4] señala que, presentar los temas matemáticos como concluidos y abstractos evita que estos tengan un significado para los estudiantes. Como consecuencia de esto el aprendizaje de los temas no es el esperado. Lo anterior da pauta a la pregunta de investigación: ¿Cómo ayuda en la comprensión de las propiedades de los polígonos a estudiantes de medio superior trabajar con actividades planteadas en GeoGebra? Para intentar responder esta pregunta se tomará en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, con los cuales se pretende clasificar el aprendizaje de los estudiantes cuando las actividades son presentadas desde la visualización.

Se buscará mostrar que el aprendizaje sobre polígonos en estudiantes de medio superior puede ser más claro cuando los temas se presentan desde diferentes ángulos, y además se usa lo visual, ya que como menciona Arcavi [2] “vivimos en un mundo donde la información se transmite mayoritariamente en envoltorios visuales, y las tecnologías apoyan y fomentan la comunicación que es esencialmente visual”. Tomando en cuenta lo trabajado por otros investigadores y la problemática presentada, la propuesta que se tiene alude a hacer uso de la visualización desde el punto de vista de Arcavi [2] con la finalidad de evitar que los estudiantes se queden en una comprensión instrumental.

En sí, el propósito de este escrito es mostrar que, a partir de trabajar con los estudiantes actividades creadas de forma específica, partiendo desde las diagonales de los polígonos, y haciendo uso de los Sistemas de Geometría Dinámica, se facilita el aprendizaje de las propiedades de los polígonos para que la comprensión de estos sea relacional y no instrumental.

3. Marco teórico

Se argumenta la importancia de la visualización y el valor de la comprensión relacional en las matemáticas

3.1 Visualización desde el punto de vista de Arcavi.

Cantoral, et al. [8] define la visualización como una herramienta útil en el área de las matemáticas pues esta ayuda, por ejemplo, a representar a partir de dibujos, propiedades de inclusión en la teoría de conjuntos o en el análisis de funciones donde se suelen usar representaciones visuales para describir propiedades como la paridad. En general, la visualización suele ser útil para la resolución de problemas en matemáticas.

Por otro lado, Arcavi [2] menciona que lo visual está siempre presente, ya que como seres biológicos la mayor parte de nuestro cerebro está involucrado en lo visual y la percepción. Además, en el aspecto sociocultural, se puede afirmar que el mundo en el que vivimos y la información que se transmite se hace mayormente de forma visual y la tecnología actual fomenta esta forma de comunicación. Este autor define la visualización de la siguiente manera:

La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, diagramas en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, reflexionar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión. [2, p. 2017]

Este trabajo pretende apoyarse en la visualización cuando es entendida como la habilidad de interpretar datos a través de imágenes o diagramas que no solo son presentados en papel, sino usando herramientas tecnológicas como GeoGebra que faciliten la interpretación y documentación de la información, además de desarrollar nuevas ideas y conocimientos. Se busca reafirmar la idea de que las matemáticas dependen de las diferentes formas y niveles de la visualización, pues se espera que, al mostrar las propiedades de los polígonos de forma visual, los estudiantes sean capaces de generar un conocimiento más sólido acerca de las propiedades de los polígonos e incluso ayude a un mejor aprendizaje de las propiedades geométricas en general.

3.2 Compresión relacional y comprensión instrumental

De acuerdo con Skemp [3] en el área de la educación matemática se encuentran expresiones que pueden entenderse de dos o más formas, lo que lleva a tener dificultades. La palabra “comprensión” es un ejemplo de dichas expresiones, el autor menciona que en la actualidad hay dos significados que podrían darse: “comprensión relacional” y “comprensión instrumental”. La primera la define como el saber qué hacer y por qué y la segunda es el aplicar reglas sin tener razones. También menciona que ambos tipos de comprensión están presentes en el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo, muchas veces suele predominar la instrumental sobre la relacional, lo que lleva a conocimientos memorizados sin saber por qué se aplican ciertas reglas.

Es importante un equilibrio entre ambos tipos de comprensión pues “cuanto más completo sea el esquema de un alumno, mayor será su sentimiento de confianza en su propia capacidad para encontrar nuevas formas de “llegar allí sin ayuda externa”” [3, p. 163]. Lo que hará que busque ir más allá de lo enseñado y seguirá creando conocimientos por su propia cuenta. Aunque también se menciona que la comprensión instrumental suele ser de mucha ayuda en casos donde obtener las respuestas a través de lo relacional, requieren de más tiempo para la deducción de reglas. Por lo que se puede concluir que se debe buscar un equilibrio entre ambos tipos de comprensión y no solo cambiar una por otra.

Se verá en este trabajo que la visualización en conjunto con la comprensión relacional puede ser de ayuda para que los estudiantes aprendan de mejor forma las propiedades de los polígonos. Pues si estas se muestran haciendo uso de figuras que ayuden a visualizar e interpretar las propiedades de forma más clara, se puede llegar a enseñar y aprender las propiedades no instrumentalmente, sino relacionalmente.

4. Metodología

La investigación se realizó con 34 estudiantes que cursaban el segundo grado de una escuela de nivel medio superior del estado de Tabasco. Este estudio es de carácter cualitativo, pues se pretende observar y describir el aprendizaje de los estudiantes con relación a la geometría, en específico, los polígonos regulares cuando son presentados tomando en cuenta la visualización. Además, la categorización del nivel de aprendizaje obtenido por los estudiantes se realizó tomando en cuenta los niveles de Van Hiele lo cual ayudó a ubicar el tipo de comprensión de los estudiantes.

Al momento de la aplicación los estudiantes estaban llevado un curso de geometría y trigonometría. Además, según el plan de estudios, los estudiantes ya habían trabajado con polígonos en niveles anteriores. Para la toma de datos se realizaron tres sesiones de aproximadamente 120 minutos cada sesión.

4.1 Diseño de las actividades e instrumento de trabajo

Se diseñaron 4 actividades (Anexo 1) en hojas dinámicas de GeoGebra atendiendo a las fases del modelo de Van Hiele, las cuales se mencionan más adelante, además de 2 actividades previas con el fin de que los estudiantes se familiarizaran con las herramientas que el SGD ofrece y una presentación sobre los polígonos y sus diagonales. Tanto las actividades como la presentación toman en cuenta lo escrito por Arcavi [2], quien menciona que es necesario hacer uso de la visualización a partir de gráficos para una mejor interpretación de datos.

Para la categorización del nivel de aprendizaje de los estudiantes que a su vez ayudó a ubicar el tipo de comprensión que tuvieron, se tomó en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele: Reconocimiento o visualización; análisis; ordenación, clasificación o abstracción; deducción formal y rigor [1]. Además, las fases: indagación o información; orientación guiada, explicitación o explicación; orientación libre e integración [1] también fueron necesarias para el diseño de las actividades.

5. Análisis de los datos

Se presenta un análisis de las respuestas obtenidas por tres estudiantes. Estas fueron elegidas tomando en cuenta que muchas de las respuestas dadas por los estudiantes suelen ser muy similares entre ellas. Dicho análisis se realizó tomando en cuenta los niveles de Van Hiele para las construcciones realizadas por los estudiantes. Asimismo, se da una breve argumentación sobre el tipo de comprensión que posee cada uno de ellos tomando en cuenta lo mencionado por Skemp [3]. Con el fin de analizar las respuestas dadas por los estudiantes que respondieron todas las actividades del diseño y mantenerlos en el anonimato se nombrará a los estudiantes como: **E1, E2, E3**.

5.1 Análisis de los resultados obtenidos por E1

En la primera actividad (véase página 15) se observa que E1 logró resolver de forma eficaz lo solicitado utilizando la herramienta polígono regular partiendo del vértice A para obtener lo solicitado (**Figura 1**).

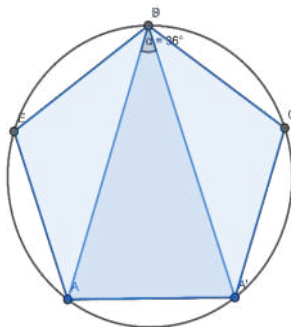


Figura 1. Solución dada por E1 para la actividad 1

En la actividad 2 intentó proceder de la misma forma que en la actividad anterior, sin embargo, el triángulo del que partió no siempre era equilátero dado que fue construido utilizando la herramienta “polígono”, por lo que obtiene un triángulo con todos los vértices compuestos por puntos dinámicos, es decir, puntos que se mueven en el espacio dado por GeoGebra (**Figura 2**).

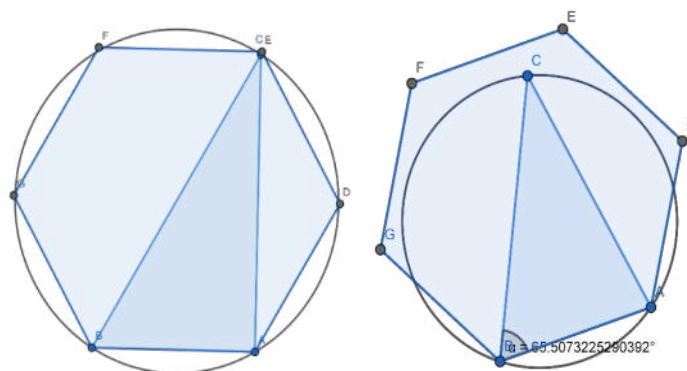


Figura 2. Solución 1 dada por E1 a la actividad 2

E1 notó que la figura anterior no era lo esperado por lo que en un segundo intento construyó el hexágono con la herramienta polígono regular. Posteriormente, lo inscribió en la circunferencia para así obtener los triángulos con vértices en A, F, D y B, C, E respectivamente, como se muestra en la **figura 3**.

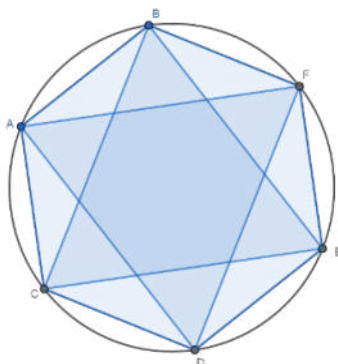


Figura 3. Solución 2 dada por E1 a la actividad 2

En la actividad 3 construyó e inscribió el triángulo inicial de forma correcta. Seguidamente, utilizó la herramienta polígono regular. Sin embargo, al seleccionar la posición del segundo vértice lo eligió de forma arbitraria, es decir, sin una posición fija, lo que no permite que el octágono este siempre inscrito como se muestra en la **Figura 4**. Además, intenta replicar las figuras geométricas que observa.

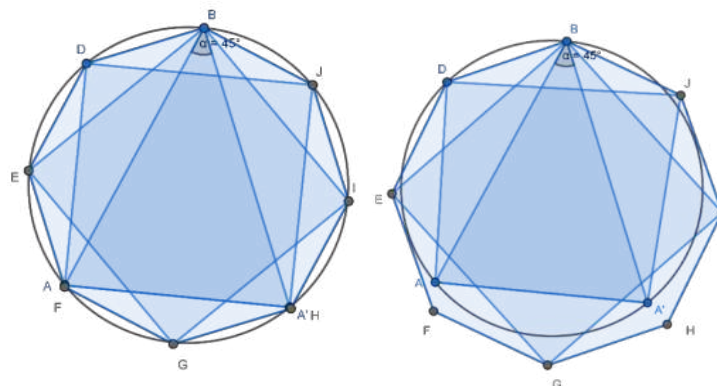


Figura 4. Solución dada por E1 a la actividad 3

A partir de observar las respuestas dadas por E1 se realizó una entrevista en la que se le cuestionó sobre algunas propiedades de los triángulos y de algunas rectas notables en geometría. Al notar que recordaba

pocas propiedades de estas se le dio una breve explicación mostrando las figuras en GeoGebra para posteriormente solicitarle que intentara dar una nueva solución a las actividades 2 y 3 obteniendo las construcciones mostradas en las Figuras 5 y 6.

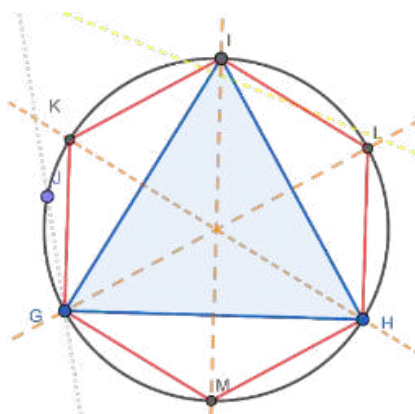


Figura 5. Solución dada por E1 a la actividad 2

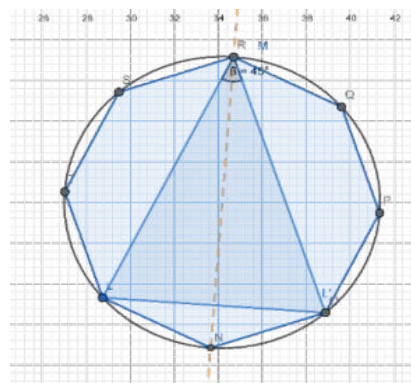


Figura 6. Solución final dada por E1 a la actividad 3

Por último, en la actividad 4, tomó como un posible triángulo el formado por dos diagonales del eneágono y un lado de este, lo que facilitó la construcción usando la herramienta polígono regular. Además, en este momento recordaba los nombres de las líneas presentes en las figuras trabajadas y era capaz de dar una solución a la actividad sin necesidad de apoyo.

Se puede ver, al analizar las construcciones realizadas en las primeras dos actividades, que E1 cumple con algunas características propias del nivel 1 del modelo de Van Hiele, pues como menciona Vargas, et al [1], el estudiante está haciendo contacto con el nuevo tema de estudio, además, en las respuestas dadas en la entrevista y las herramientas elegidas para construir el pentágono y el hexágono se observa que estas han servido para formar nuevos conocimientos y entender algunas propiedades. En las actividades siguientes, se percibe que el estudiante ha logrado cumplir más características propias del nivel, pues ya es capaz de expresar con sus palabras los procedimientos que ha usado y recuerda los nombres y propiedades de algunas figuras.

Al término de la entrevista, se puede concluir que E1 cumplió con todas las fases propuestas por Van Hiele para el primer nivel y está en proceso de consolidar las características propias del nivel 2. Dado que logró consolidar su conocimiento pues expresó con más fluidez sus ideas, y es capaz de usar adecuadamente los nombres y propiedades de la mayoría de las figuras utilizadas en sus construcciones, tomando en cuenta lo observado en el análisis de las características del modelo y la forma de proceder de E1 para resolver las actividades, se deduce que la visualización fue una herramienta clave. El que pudiera utilizar las herramientas que GeoGebra ofrece para la construcción de los polígonos solicitados, hizo que fuera capaz de ver errores que tal vez no hubiera observado, como en la actividad tres, que al construir el octágono notó que la ubicación de los vértices sí era importante. Además, como las respuestas dadas no siguen un mismo procedimiento, también se observa que la comprensión que tiene es relacional, pues Skemp [3] menciona que la comprensión relacional es el saber qué hacer y por qué, lo que se podría tomar en este caso como el entender por qué falla cierto procedimiento y así poder seguir un camino distinto de construcción.

5.2 Análisis de los resultados obtenidos por E2

En la actividad 1, el estudiante E2 notó que las diagonales del pentágono forman triángulos, y en general que los polígonos están formados por triángulos. Por lo que, para construir el polígono

solicitado tomó los vértices del triángulo inicial para trazar otros iguales a este, hasta formar el pentágono como se muestra en la **figura 7**. Posteriormente en la actividad 2 pintó el punto medio de cada uno de los lados del triángulo y trazó las rectas que pasan por estos puntos y los vértices opuestos a estos respectivamente como se muestra en la **figura 8**.

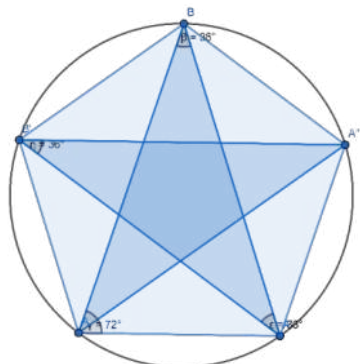


Figura 7. Solución dada por E2 a la actividad 1

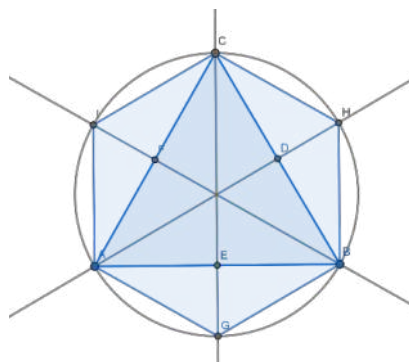


Figura 8. Solución dada por E2 a la actividad 2

Por último, tomó como vértice del hexágono los puntos de intersección entre las rectas trazadas y la circunferencia que inscribe el triángulo. Al cuestionar a E2 por qué no procedió de la misma forma que en la actividad anterior, comentó que usando su lógica notó que no sabía cuántos grados debía rotar el triángulo para que quedara al revés, y donde cayeran los vértices de este serían los vértices faltantes del hexágono. Por lo que era más fácil, trazar una recta que pasara por el punto medio de los lados del triángulo, para así tomar la intersección con la circunferencia y de ese modo poder construir el polígono solicitado.

Para la actividad 3 construyó ángulos dada su amplitud desde los vértices A y A' del triángulo, luego trazó las rectas que pasan por los vértices de los ángulos obtenidos y para poder pintar los puntos C y D que son las intersecciones de las rectas con la circunferencia. Notó que para construir el octágono faltaban tres puntos más e intentó construir uno tomando como vértice el punto C, pero el ángulo obtenido no le resultó útil como se muestra en la **Figura 9**.

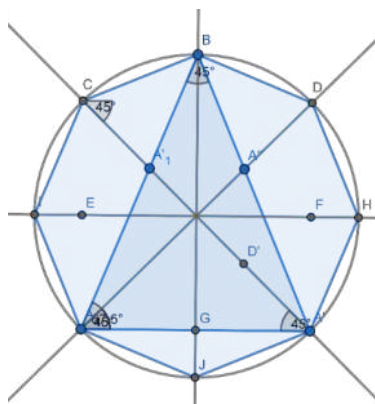


Figura 9. Solución dada por E2 a la actividad 3

Sin embargo, luego notó que había una diagonal horizontal que dividía al triángulo en dos partes, por lo que tomó el punto medio entre los puntos A, C y D, A' para trazar la diagonal que necesitaba.

Por último, para encontrar el vértice faltante tomó el punto medio del segmento AA' y trazó la recta que pasa por este punto y el vértice B del triángulo.

E2 mencionó en la entrevista realizada que para construir el polígono solicitado en la actividad 3 intentó hacer el mismo procedimiento que en la actividad 1, pues notó que el procedimiento funciona para triángulos irregulares, sin embargo, solo pudo obtener dos vértices por lo que, para encontrar otros dos trazó la diagonal que divide en dos al triángulo verticalmente y aplicó este mismo procedimiento para el vértice faltante. También notó que las rectas que obtuvo formaban ángulos de 90° por lo que las otras dos rectas trazadas dividen a estos en 45° que es lo que se necesita. En la entrevista se observó que E2 logra hacer deducciones de lo que observa en las actividades, una de ellas es que su método de construir los polígonos a partir de triángulos solo funciona cuando estos son isósceles.

En la última actividad E2 resolvió como se muestra en la **figura 10**. Partió de un triángulo que está conformado por un ángulo de 20° , dos diagonales y un lado del eneágono. Luego, construyó el eneágono trazando ángulos dada su amplitud para así construir triángulos isósceles semejantes al dado inicialmente, estos tenían como vértices los puntos que va obteniendo de los triángulos anteriores. Lo mismo que aplicó en la actividad 1 y tres, mencionando que en este caso sí funciona pues el triángulo del que parte es un triángulo irregular.

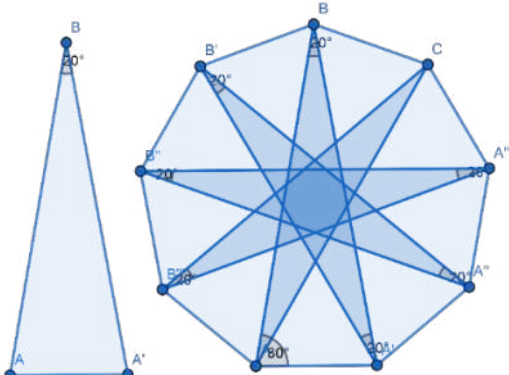


Figura 10. Solución dada por E2 a la actividad 4

También mencionó que esta forma de resolver solo funciona con polígonos con número de lados impares, por lo que para probar que si funcionaba con otro polígono impar se le pidió lo aplicara con un endecágono, notando que con este polígono también funcionó (**Figura 11**).

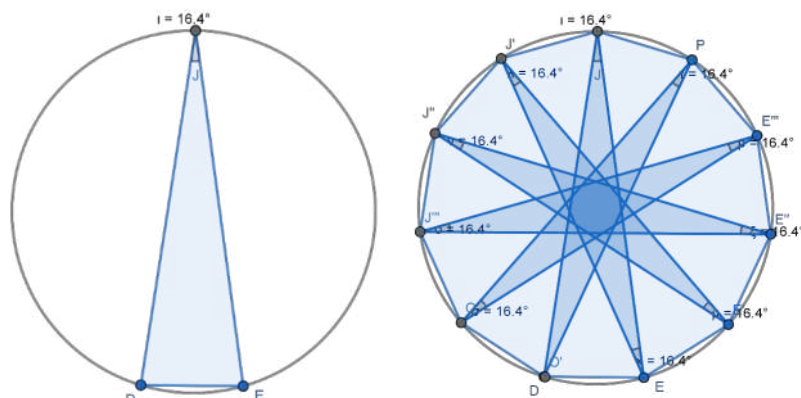


Figura 11. Construcción del endecágono dada por E2

Se observa desde la primera actividad que el estudiante se encuentra en el nivel 2 del modelo de Van Hiele, pues es capaz de utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades diferentes a las comunes y, probablemente, más complejos. Además, establece propiedades de los polígonos de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación, sin embargo, aún no puede elaborar definiciones [1]. Al trabajar la segunda y tercera actividad, el estudiante logra completar las siguientes características propias del nivel 2 y al finalizar las actividades se puede ubicar al estudiante en el nivel 3 pues es capaz de interrelacionar lógicamente propiedades de los conceptos. Puede formular definiciones abstractas, y es capaz de señalar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los polígonos para utilizar una u otra forma de construcción [1].

E2 logró encontrar nuevos caminos de construcción para los polígonos e incluso logró hacer deducciones que pueden ser aplicadas a ciertos polígonos. Este es un claro ejemplo de la importancia de tener comprensión relacional e instrumental, pues la primera ayudó a notar cuando es aplicable la nueva regla y la segunda es solo la aplicación de esta [3].

5.3 Análisis de los resultados obtenidos por E3

En la actividad 1, E3 construyó el triángulo inicial usando la herramienta “polígono” por lo que el triángulo obtenido no siempre es isósceles. Posteriormente, para construir el pentágono, construyó los triángulos que tienen como vértices los puntos A, B y D y A, C y E respectivamente. Como los triángulos construidos tienen todos puntos dinámicos, es decir, no tienen una posición fija dentro de la construcción, el pentágono que obtiene no es siempre regular, como se muestra en la **Figura 12**.

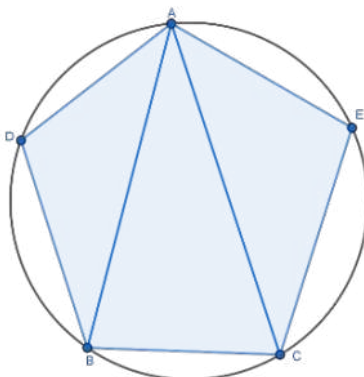


Figura 12. Solución dada por E3 a la actividad 1

La construcción dada puede deberse a que no había trabajado con un SGD, en este caso GeoGebra por lo que, aunque en un principio para E3 parece un polígono regular, en el SGD no siempre lo es.

Para la actividad 2 primero construyó el triángulo equilátero solicitado, posteriormente procedió como en la actividad 1, es decir, dibujó triángulos en cada uno de los lados del triángulo equilátero para obtener el hexágono, como se muestra en la **Figura 13**. En este caso si notó que el polígono que obtuvo no era regular por lo que dio una nueva construcción, partió de un hexágono regular inscrito, luego trazó los triángulos que tienen como vértices los puntos A, E, C y F, D, B respectivamente. Posteriormente trazó un punto G donde consideró era el centro del polígono para así construir el triángulo con vértices G, E y D, como se muestra en la **Figura 14**.

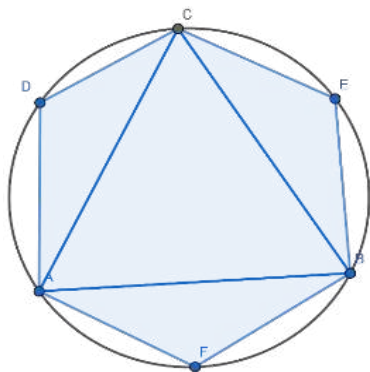


Figura 13. Solución 1 dada por E3 a la actividad 2

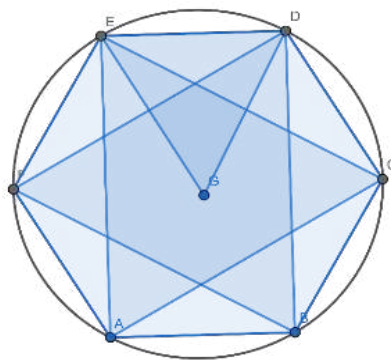


Figura 14. Solución 2 dada por E3 a la actividad 2

En esta actividad se observa un avance en cuanto al uso de las herramientas de GeoGebra, pues entiende la diferencia entre la herramienta polígono y polígono regular, lo que también permite que perciba otras propiedades de los polígonos como el centro, aunque estas sigan siendo parte de un todo.

Para la tercera actividad E3 construyó el octágono con la herramienta polígono regular, posteriormente trazó las figuras geométricas que notó que se formaban con las diagonales, iniciando por el cuadrado, posteriormente dos triángulos y finaliza con un rectángulo como se muestra en la **Figura 15**.

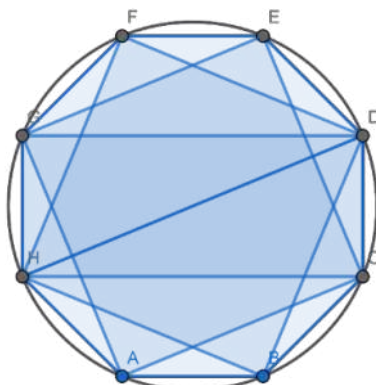


Figura 15. Solución dada por E3 a la actividad 3

E3 notó algunas propiedades de las diagonales, sin embargo, estas no son suficientes para lograr construir el octágono solicitado a partir de los triángulos formados por las diagonales. Por último, en la actividad 4, E3 procedió como la mayoría de los estudiantes hasta ahora. Dio un posible triángulo formado por dos diagonales y un lado del triángulo, pero no construyó el eneágono a partir de este.

En las respuestas dadas por E3 se observa que cumple con lo mencionado por Vargas, et al. [1] para el nivel 2 del modelo de Van Hiele, pues logró reconocer algunas propiedades particulares de los polígonos y sus diagonales, aunque no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades que lo ayuden a formar los polígonos a través de las diagonales. Tomando en cuenta la actitud de este estudiante al momento de la aplicación de las actividades, las construcciones dadas y la experiencia con los estudiantes entrevistados, se podría considerar que, con una asesoría especializada, podría llegar al nivel 3 del modelo de Van Hiele.

La visualización para este estudiante fue de importancia pues el poder observar y comparar los polígonos con sus diagonales y las construcciones realizadas por él, permite un avance en el nuevo tema de estudio y las herramientas con las que cuenta. En cuanto al tipo de comprensión de este estudiante se podría considerar que es relacional pues no busca aplicar reglas, sino que trata de entender qué pasos debe seguir para obtener lo que se le solicita en cada actividad [3].

6. Resultados

La mayoría de los estudiantes intentaron reproducir lo que observaban visualmente o aplicar el mismo procedimiento para todas las actividades, lo que muchas veces no permitía que logran reconocer propiedades diferentes a las que ya conocían de los polígonos. Otra de las situaciones observadas es que muchos no tomaban en cuenta que en GeoGebra algunos puntos no son fijos, sino que son dinámicos lo que evitaba que las construcciones dadas fueran siempre regulares, esto es más una problemática en relación con el uso y conocimiento que tenían los estudiantes sobre este software, sin embargo, en algunos casos las herramientas que ofrece fueron de ayuda para dar posibles construcciones y observar propiedades y comportamiento de los polígonos.

En cuanto a los niveles alcanzados del modelo de Van Hiele, solo E2 logró avanzar al nivel 3, pues logró hacer deducciones a través de lo realizado, los demás estudiantes se ubican entre el nivel 1 y 2, e incluso la mayoría está en el nivel 1 pues aunque reconocen características de los polígonos, las reconocen como un todo, lo que hacía que intentaran reproducir lo que observaban [1], esto hace pensar que el tipo de conocimiento que sobresale es el instrumental, sin embargo, no es así pues Skemp [3] menciona que la comprensión relacional es entender por qué y para qué se hacen las cosas y la mayoría de los estudiantes intentó caminos en los que se observa que buscaban entender por qué se veían de determinada forma los polígonos, por ejemplo E3 al dar dos formas de construcción del hexágono deja ver ese interés, por lo que si bien en la mayoría de los estudiantes prevalece la comprensión instrumental también se tiene una comprensión relacional.

Lo anterior hace pensar que la visualización es una herramienta importante para lograr que los estudiantes tengan una comprensión relacional, pues esta permite ver e interpretar datos a través de imágenes que no solo son presentadas en papel, sino que usan Sistemas de Geometría Dinámicos como GeoGebra, que en este caso ayudó a la exploración de las propiedades de los polígonos y como estas pueden ser de ayuda para construirlos.

7. Conclusiones

El poco tiempo para la aplicación de las actividades significó una dificultad dado que algunos estudiantes no lograron habituarse a las herramientas que GeoGebra ofrece, por lo que a veces también significó un problema para poder plantear respuestas que ayudaran a una mejor exploración de los polígonos y la geometría en general. Algunos estudiantes realizaron construcciones sin tomar en cuenta que en el SGD las figuras no son estáticas, sino que las propiedades que tienen dependen de la forma en que son construidas. Tomando en cuenta lo anterior, en la continuación de este trabajo se puede realizar una mejora de las actividades haciendo que sean más las actividades, haciendo que sean más específicas y que ayuden a entender el uso de las herramientas de GeoGebra, lo que a su vez podría verse reflejado en que los estudiantes transiten a los niveles más avanzados del modelo de Van Hiele.

Este trabajo tuvo como propuesta mostrar que, a partir de trabajar con los estudiantes actividades creadas de forma específica y haciendo uso de los SGD, el aprendizaje de las propiedades de los polígonos puede ser más fácil, además de que el uso de la visualización en las actividades puede ayudar a que la comprensión de los estudiantes sea relacional y no instrumental, es decir que los estudiantes entiendan el por qué las reglas que conocen en algunos casos funcionan y en otros no, así como el poder crear o descubrir nuevos caminos de solución [3]. Para ello se diseñaron actividades basadas en las fases de Van Hiele con el fin de dar una respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cómo ayuda en la comprensión de las propiedades de los polígonos a estudiantes de medio superior trabajar con actividades planteadas en GeoGebra?

Al analizar las respuestas obtenidas después de la aplicación de este diseño, se observó que si bien la mayoría de los estudiantes logró una comprensión relacional [3], pues, buscaban entender cómo y por qué se obtenían los polígonos a partir de las diagonales, los niveles de Van Hiele en los que se ubicó a la mayoría de los estudiantes fueron en el 1 y 2, que como lo mencionó Carreño, et al [6] es en el nivel en el que se encuentran incluso los profesores en formación. En el caso de nuestro estudio puede deberse a que se necesita ser más claros en las peticiones de las actividades, pues se observó en el análisis que algunos de los estudiantes construían lo solicitado mecánicamente lo que llevaba a que obtuvieran polígonos que no estaban inscritos.

Se observó que efectivamente trabajar con GeoGebra para mostrar las propiedades y características de los polígonos ayuda que la comprensión sea relacional, pues el uso de este SGD ayudó a una mejor interpretación de datos a través de imágenes o diagramas y facilitó la interpretación y documentación de la información. Además, se observó que el uso de este ayudó a desarrollar nuevas ideas y conocimientos en los estudiantes [1]. Aunque en la aplicación se intentó que la interacción entre los estudiantes fuera mínima, sí se observó que aquellos estudiantes que compartían ideas tenían construcciones similares e incluso particulares como es el caso de E3 pues en su última construcción reconoce que los polígonos que había construido anteriormente no eran regulares, esto reafirma lo que Cuervo Lancheros, et al [7] describe en su trabajo, el uso de GeoGebra motiva a los estudiantes a interactuar y fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes.

8. Agradecimientos

Agradezco al Dr. Gonzalo Zubieta por su orientación en la creación de este trabajo, así como a la institución de educación medio superior que me prestó los espacios necesarios para la aplicación de las actividades.

9. Conflicto de intereses

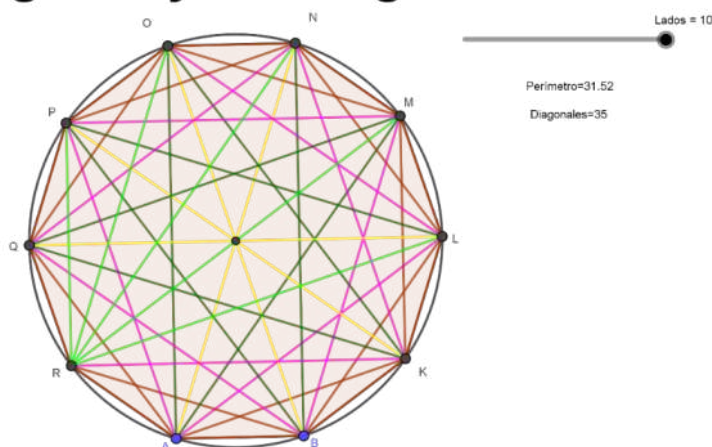
Los autores declaran no tener conflictos de intereses

10. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos

11. Resumen Gráfico

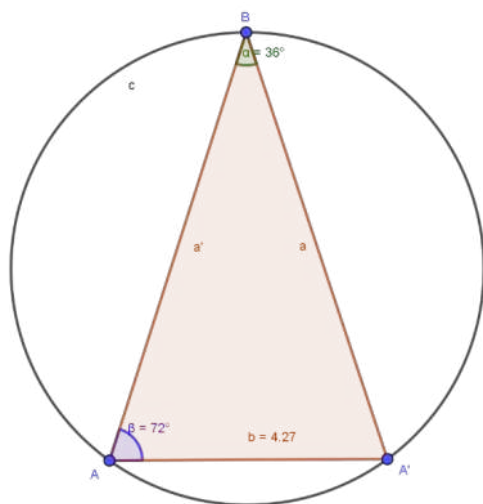
Polígonos y sus diagonales



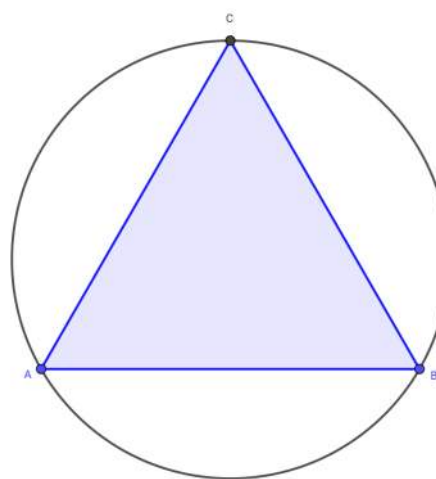
12. Referencias

- [1] G. Vargas, y R. Gamboa, “El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría”, Uniciencia, vol. 27, no. 1, En-Feb, pp. 74-94, 2013, <https://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=475947762005>
- [2] A. Arcavi, “The role of visual representations in the learning of mathematics”, Educational Studies in Mathematics, vol. 52, no. 3, Abril, pp. 215-241, 2003, DOI: 10.1023/A:1024312321077.
- [3] R. Skemp, The Psychology of Learning Mathematics, Hillsdale, NJ: LEA, 1987.
- [4] S. Morales y T. Rosas, “Una propuesta para el desarrollo de modelos geométricos en las Educadoras de Párvulos. El caso del polígono”, Estudios Pedagógicos, vol. XLII, no. 2, pp. 247-267, 2016, <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000200014>
- [5] A. G. González Peralta y M. Sánchez Aguilar, “Conocimientos de docentes de primaria en formación respecto a perímetro y área de polígonos”, Perfiles educativos, vol. 42, no. 169, pp. 70-87, 2020, <https://doi.org/10.22201/issue.24486167e.2020.169.59328>
- [6] E. Carreño y N. Climent, “Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas”, PNA, revista de la universidad de Granada, vol. 5, no. 1, pp. 11-23, 2010, <https://doi.org/10.30827/pna.v5i1.6158>
- [7] D. T Cuervo Lancheros, C. A. Fonseca Cuervo y O. Sepúlveda Delgado, “La comprensión de los polígonos por medio del geogebra en estudiantes de grado séptimo”, Revista Boletín Redipe, vol. 10, no. 7, pp. 372–384, 2021, <https://doi.org/10.36260/rbr.v10i7.1374>
- [8] R.A. Cantoral Uriza y G. Montiel Espinosa, Funciones: visualización y pensamiento matemático. Ciudad de México: Pearson Educación, 2001
- [9] Bortolussi Alarcón, J., et al., Libro para el maestro, educación secundaria, Matemáticas. SEP, 1994

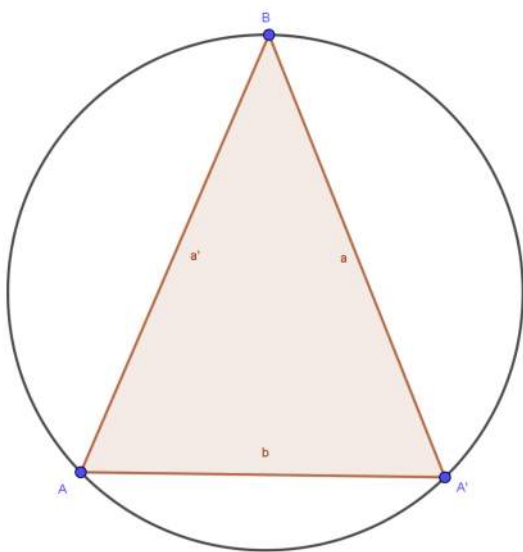
13. Anexo 1: Actividades planteadas a los estudiantes en GeoGebra



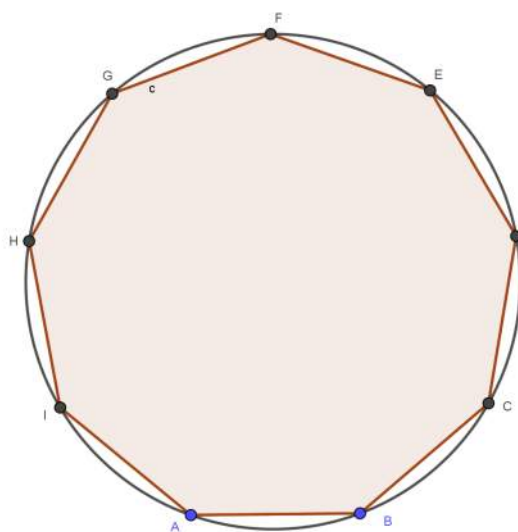
Actividad 1: Dado el siguiente triángulo isósceles inscrito en la circunferencia, construye un pentágono regular.



Actividad 2: Dado el siguiente triángulo equilátero inscrito en la circunferencia, construye un hexágono regular.



Actividad 3: Dado el siguiente triángulo isósceles inscrito en la circunferencia, construye un octágono regular.



Actividad 4: Dado un eneágono inscrito en una circunferencia ¿Qué triángulo consideras que podría servir de base para construirlo a partir de sus diagonales?

Perfil químico del extracto hidroalcohólico de *Cecropia spp* y su actividad antimicrobiana

Medrano-Sánchez, Eric Jaziel¹ , Bravata-Silván, Stephani Jazmín¹ , Lobato-García, Carlos Ernesto¹ , Gómez-Rivera, Abraham^{1*} , López-Rodríguez, Ricardo¹ , Gallegos-García, Ammy Joana² , González-Cortázar, Manasés³ , Pérez-García, Ma. Dolores³, Zamilpa, Alejandro³ 

¹División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Carretera Cunduacán-Jalpa Km. 0.5, Cunduacán 86690, Tabasco, México.

²División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Popular de la Chontalpa-Carretera Cárdenas-Huimanguillo Km 2 S/N, Ranchería, Invitab Paso y Playa, Heroica, Cárdenas 86556, Tabasco, México.

³Centro de Investigación Biomédica del Sur, Instituto Mexicano del Seguro Social, Argentina No. 1, Col. Centro, Xochitepec 62790, Morelos, México.

*abgori@gmail.com

Resumen

La resistencia antimicrobiana representa un problema de salud a nivel mundial, debido a que los microorganismos han desarrollado mecanismos que permiten inhibir la actividad de fármacos antimicrobianos como resultado de su mal uso, aumentando el riesgo de complicaciones en enfermedades infecciosas. En ese sentido, el objetivo de este trabajo fue determinar el perfil químico de hojas de *Cecropia spp* mediante Cromatografía Líquida de Alta Resolución acoplado a un Detector de Arreglo de Diodos (CLAR-DAD), donde se observó la presencia de ácido clorogénico, isoorientina, orientina, un análogo de vitexina y de catequina. Además, se evaluó la actividad antimicrobiana mediante microdilución en caldo, donde el extracto de *C. peltata* fue activo contra 5 cepas grampositivas y 2 gramnegativas a concentraciones <50 µg/mL y para el caso de *C. obtusifolia* fue activo contra 4 grampositivas, 3 gramnegativas y el hongo a concentraciones <50 µg/mL, lo cual puede estar relacionado a la presencia de los marcadores químicos en *Cecropia spp*.

Palabras claves: *Cecropia peltata*, *Cecropia obtusifolia*, CLAR-DAD, actividad antimicrobiana

Abstract

Antimicrobial resistance represents a global health problem, because microorganisms have developed mechanisms that allow inhibiting the activity of antimicrobial drugs as a result of their misuse, increasing the risk of complications in infectious diseases. In this sense, the objective of this work was to determine the chemical profile of *Cecropia spp* leaves by High Performance Liquid Chromatography coupled a Diode Array Detector (HPLC-DAD), where the presence of chlorogenic acid, isoorientin, orientin, a vitexin analogue and catechin were observed. In addition, the antimicrobial activity was evaluated by broth microdilution, where the *C. peltata* extract was active against 5 gram-positive and 2 gram-negative strains at concentrations <50 µg/mL and in the case of *C. obtusifolia* it was active against 4 gram-positive, 3 gram-negative and the fungus at concentrations <50 µg/mL, which may be related to the presence of chemical markers in *Cecropia spp*.

Keywords: *Cecropia peltata*, *Cecropia obtusifolia*, HPLC-DAD, antimicrobial activity

Recibido: 19 de agosto de 2024, Aceptado: 26 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introducción

Desde hace varias décadas la medicina tradicional ha desempeñado un papel crucial en el tratamiento y la prevención de diversas enfermedades. En numerosos lugares, sigue siendo la opción principal para el cuidado de la salud, utilizándose de manera complementaria o integrada con la medicina moderna. Este enfoque ha generado un creciente interés en la investigación científica, ya que tras su estudio se han logrado identificar los compuestos responsables de los efectos biológicos y proporcionar respaldo a muchos tratamientos tradicionales.

En este sentido, las plantas del género *Cecropia* han sido utilizadas como alternativa medicinal para múltiples enfermedades, ya que sus metabolitos secundarios tienen efectos potenciales como antimicrobiano, hipoglucemiante, ansiolítico, antihistamínico y antiasmático [1-4]. En la medicina tradicional del estado de Tabasco, dos especies destacadas de este género son *Cecropia peltata* y *Cecropia obtusifolia*, para las cuales ha sido reportado el contenido de metabolitos del tipo flavonoide, ácido clorogénico, triterpenos y esteroides, compuestos a los que se les atribuyen los efectos farmacológicos observados [5].

Por otro lado, es importante reconocer que una de las principales preocupaciones de salud en la actualidad es la resistencia a los antimicrobianos. Esto aumenta la susceptibilidad de la población a enfermedades infecciosas, que pueden ser más duraderas e incluso mortales. Se ha informado que las especies del género *Cecropia* poseen potencial antimicrobiano, ofreciendo así una alternativa a los medicamentos actualmente disponibles en el mercado.

Se realizó el análisis contenido metabólico del extracto hidroalcohólico de *Cecropia peltata* y *Cecropia obtusifolia* mediante CLAR-DAD, determinando que el extracto de la especie *C. obtusifolia* es la que tiene mayor proporción relativa de ácido clorogénico e isoorientina. En cambio, *C. peltata* posee la mayor proporción relativa de orientina. Posteriormente los extractos orgánicos fueron probados en un modelo *in vitro* para así conocer su efectividad frente a diferentes cepas de microorganismos y se observó que el extracto de *C. obtusifolia* fue más activo frente a diez cepas de microorganismos lo cual podría atribuirse a la presencia de ácido clorogénico e isoorientina.

2. Metodología Experimental

2.1 Colecta del material vegetal

Las hojas de las especies de *Cecropia* fueron colectadas en los municipios de Tacotalpa y Tenosique en el estado de Tabasco, se buscaron especímenes maduros con una altura mayor de 2 metros, posteriormente se guardó un espécimen de cada muestra para llevarlo al herbario de la División Académica de Ciencias Biológicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para su identificación taxonómica.

2.2 Tratamiento del material vegetal y obtención de los extractos

Las hojas de las especies de *Cecropia* fueron secadas al abrigo de la luz durante 72 horas, después fueron molidas para reducir el tamaño de partícula y se pasaron por un tamiz para homogeneizar la muestra. La extracción fue mediante maceración empleando una mezcla de etanol/agua en una proporción 70:30, ya que se ha reportado que permite una mayor extracción de los marcadores químicos presentes en las especies de *Cecropia* estudiadas en este trabajo [6]. En ese sentido, el disolvente se dejó en contacto con el material vegetal durante 24 horas, posteriormente, se filtró y se concentró mediante destilación a presión reducida

utilizando un rotaevaporador (Büchi R-100) para obtener el extracto hidroalcohólico correspondiente a *Cecropia peltata* (CpHa) y *Cecropia obtusifolia* (CoHa). Este procedimiento se realizó por triplicado para obtener una extracción exhaustiva para cada una de las muestras colectadas.

2.3 Análisis metabólico de *Cecropia* spp mediante CLAR-DAD

El análisis por CLAR-DAD de los extractos hidroalcohólicos se realizó usando un cromatógrafo Waters 2695 con un módulo de separación Waters y un detector con arreglo de fotodiodos Enpower Pro-Software (Waters Corporation, Milford, Massachusetts, EE. UU.). También se usó una columna Supelcosil LC-F (4.6 mm x 250 mm i.d., tamaño de partícula 5 µm; Sigma-Aldrich, Bellefonte, Pensilvania, EE. UU.) empleando como fase móvil una solución acuosa al 0.5% de ácido trifluoroacético (302031, Sigma-Aldrich, San Luis, Missouri, EE. UU.) como solvente A y acetonitrilo (34851, Merck, Darmstadt, Alemania) como solvente B, con los siguientes gradientes: 0–1 min, 0% de B; 2–3 min, 5% de B; 4–20 min, 30% de B; 21–23 min, 50% de B; 24–25 min, 80% de B; 26–27 min, 100% de B; 28–30 min, 0% de B; con un flujo de 0.9 mL/min. Se utilizó un volumen de 10 µL de una solución metanólica con una concentración de 2 mg/mL del extracto. Se realizó un escaneo espectrofotométrico desde 200 hasta 600 nm para la identificación de los compuestos presentes en los extractos de *Cecropia* [7]. Para determinar las proporciones relativas entre los marcadores químicos, se determinó el área bajo la curva de los picos correspondientes a estos metabolitos.

2.4 Actividad antimicrobiana del extracto hidroalcohólico de *Cecropia* spp

La actividad antimicrobiana se determinó mediante la concentración mínima inhibitoria (CMI), empleando la técnica de microdilución en caldo, se utilizaron 14 cepas ATCC (American Type Culture Collection, por sus siglas en inglés) de microorganismos, enlistados a continuación en la **Tabla 1**.

Tabla 1. Cepas ATCC de microorganismos empleados para la evaluación de la actividad antimicrobiana (CMI)

Microorganismos	Clave
Grampositivas	
<i>Staphylococcus aureus</i> ATCC 29213	Sa ₁
<i>Staphylococcus aureus</i> resistente a meticilina (RM) ATCC 43300	Sa ₂
<i>Staphylococcus epidermidis</i> ATCC 35984	Se ₁
<i>Staphylococcus epidermidis</i> ATCC 12228	Se ₂
<i>Staphylococcus epidermidis</i> ATCC 1042	Se ₃
<i>Staphylococcus haemolyticus</i>	Sh
<i>Enterococcus faecalis</i> ATCC 29212	Ef
Gramnegativas	
<i>Klebsiella pneumoniae</i> ATCC 700603	Kp
<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 27853	Pa
<i>Escherichia coli</i> ATCC 1042	Ec ₁
<i>Escherichia coli</i> ATCC 25922	Ec ₂
<i>Salmonella dublin</i> ATCC 9676	Sd
<i>Enterobacter cloacae</i> ATCC 700323	Ecl
Hongo	
<i>Candida albicans</i> ATCC 10231	Ca

*Clave: Se asignó para identificar a cada cepa durante el análisis.

Las cepas de microorganismos fueron incubadas en agar soya tripticaseína durante 24 h a 37 °C. Después de la incubación, se seleccionaron dos colonias y se sembraron en caldo Müeller-Hinton y se realizó el ajuste de la concentración con el estándar de McFarland 0.5. Posteriormente, se tomaron 50 µL de las bacterias estandarizadas y se disolvieron en 1950 µL de agua estéril (dilución 1:50). Se tomaron 31 mg de extracto y se disolvió en 1000 µL de una mezcla de agua y dimetilsulfóxido (H₂O-DMSO; solución madre) a una proporción de 80:20. Se depositaron 10 µL de la solución madre, 100 µL de caldo Müeller-Hinton y 2 µL de bacterias en placas Elisa de 96 pozos. Para el control de viabilidad se utilizó caldo Müeller-Hinton, DMSO y gentamicina. Las placas fueron colocadas en una cámara de humedad y se incubaron durante 24 h a 37 °C. Pasado el tiempo de incubación, se añadieron 30 µL de una solución con sales de tetrazolium (cloruro de 2,3,5-trifeniltetrazolio) al 0.05% a cada pozo y se incubaron durante 2 h a 37 °C. Posteriormente, se realizó la lectura de manera visual. La presencia de un color rosa en los pozos reveló el crecimiento bacteriano, mientras que los pozos que se mantuvieron incoloros fueron indicativo de actividad antimicrobiana [7].

3. Resultados y discusión

3.1 Colecta del material vegetal y extracción de *Cecropia* spp

La identificación taxonómica de las muestras de *Cecropia* spp mostró que la especie colectada en el municipio de Tacotalpa (N 17°27'28.2024''/ W 92°46'46.2108) corresponde a *Cecropia obtusifolia* (número de voucher 36667) y la especie colectada en el municipio de Tenosique (N 18°11'50.046''/ W 93°10'15.2544'') corresponde a *Cecropia peltata* (número de voucher 36575).

En la **Tabla 2** se muestran los resultados del rendimiento del extracto hidroalcohólico a partir de 1 kg de hojas de *Cecropia* spp

Tabla 2. Rendimiento del extracto hidroalcohólico de hojas de *Cecropia* spp

Municipio	Especie	Clave	Rendimiento* (%)
Tenosique	<i>C. peltata</i>	CpHa	8.6 ± 1.8
Tacotalpa	<i>C. obtusifolia</i>	CoHa	10.5 ± 2.2

*Promedio de tres extracciones

3.2 Análisis metabólico por CLAR-DAD del extracto hidroalcohólico de *Cecropia* spp

En la **Figura 1**, se muestran los cromatogramas del extracto hidroalcohólico de ambas especies donde se pueden observar 5 picos, los cuales están agrupados de la siguiente manera, cuatro con un tiempo de retención (t_R) entre 8.5 y 9.0 min que corresponden a compuestos de mayor polaridad y uno en 24.9 min que corresponde a un compuesto de menor polaridad. El último pico no se observa en *C. obtusifolia*.

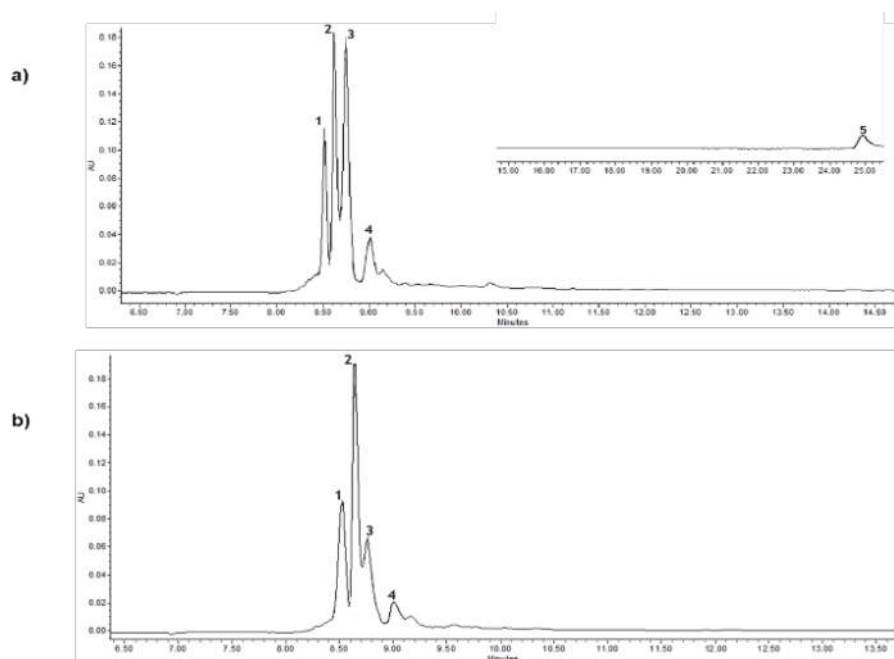


Figura 1. Cromatogramas del extracto hidroalcohólico de *Cecropia peltata* (a) y *Cecropia obtusifolia* (b)

Utilizando los tiempos de retención y las bandas de absorción de los espectros ultravioleta-visible (UV-Vis), se llevó a cabo un análisis preliminar para identificar los compuestos presentes en el extracto hidroalcohólico (**Tabla 3**) de ambas especies, comparando estos datos con estándares y la información reportada en la bibliografía.

Tabla 3. Perfil fitoquímico por CLAR-DAD del extracto hidroalcohólico de *Cecropia* spp

Pico	t_R (min)	Bandas de absorción (nm)	Extractos*	Compuesto identificado	Referencia
1	8.517	216.9, 271.0, 337.4	● ○	Ácido clorogénico	Estándar [6]
2	8.617	215.7, 269.8, 349.4	● ○	Isoorientina	Estándar [6]
3	8.750	214.5, 268.6, 348.2	● ○	Orientina	Estándar [6]
4	9.000	271.0, 331.5	● ○	Análogo de vitexina	Estándar [6]
5	24.917	209.9, 280.5	●	Análogo de catequina	[6]

*Extractos: ● (CpHa) ○ (CoHa)

Al comparar los t_R y bandas de absorción de los picos presentes en los cromatogramas obtenidos contra estándares correspondientes analizados bajo las mismas condiciones experimentales y lo descrito en la bibliografía, se reveló la presencia de los cuatro compuestos característicos del género *Cecropia*, los cuales fueron identificados como ácido clorogénico (**1**), isoorientina (**2**), orientina (**3**) y un análogo de la vitexina (**4**) [8,9]. La caracterización de estos marcadores químicos se describe a continuación.

El pico **1** con un t_R de 8.5 min y bandas de absorción de 216.9, 337.4 nm corresponde a ácido clorogénico. El pico **2** fue identificado como isoorientina debido a que tiene un t_R de 8.6 min y bandas de absorción de 215.7, 350.6 nm. El pico **3** con un t_R de 8.7 min y bandas de absorción de 214.5, 348.2 nm fue identificado como orientina. El pico **4** muestra un t_R de 9.0 min con bandas de absorción de 271.0, 331.5 nm y fue

identificado como un compuesto glicosilado del tipo flavona el cual puede corresponder a un análogo de vitexina según lo descrito en la literatura [6]. Mientras que el cromatograma correspondiente a *Cecropia peltata* muestra al pico **5** en un t_R de 24.9 min con bandas de absorción de 209.9, 280.5 nm el cual muestra similitud con un análogo de catequina [6].

Cabe señalar que, si bien los cuatro marcadores químicos están presentes en las dos muestras analizadas, se observaron intensidades diferentes para las señales de cada uno de ellos lo que llevo a determinar sus proporciones relativas, partiendo de los valores correspondientes al área bajo la curva (ABC) de cada señal. En la **Tabla 4** se muestran estos parámetros, resultado de tres determinaciones, así como el valor promedio correspondiente.

Tabla 4. Áreas bajo la curva y promedios correspondientes de los metabolitos secundarios principales para el género *Cecropia*

Especie	Metabolitos secundarios	ABC ₁	ABC ₂	ABC ₃	Promedio del área bajo la curva
<i>Cecropia peltata</i>	1	298578	311439	301632	303883.00
	2	382843	396908	391223	390324.67
	3	506093	508369	529053	514505.00
	4	142187	129621	105602	125803.33
Especie	Metabolitos secundarios	ABC ₁	ABC ₂	ABC ₃	Promedio del área bajo la curva
<i>Cecropia obtusifolia</i>	1	309181	328324	266970	301491.67
	2	370917	375635	381705	376085.67
	3	87010	98338	109620	98322.67
	4	77700	88081	70823	78868.00

Basándose en los valores promedio del área bajo la curva para cada compuesto, se determinó la proporción relativa entre ellos, estableciendo un valor de 1.00 para el área correspondiente al análogo de vitexina, ya que es el compuesto con el valor más bajo en ambas especies. Las proporciones relativas calculadas para los cuatro compuestos se muestran en la **Tabla 5**.

Tabla 5. Proporciones relativas de los cuatro metabolitos principales para el género *Cecropia*

Especie	Metabolitos secundarios	Promedio	Proporción relativa
<i>Cecropia peltata</i>	1	303883.00	2.42
	2	390324.67	3.10
	3	514505.00	4.09
	4	125803.33	1.00
Especie	Metabolitos secundarios	Promedio	Proporción relativa
<i>Cecropia obtusifolia</i>	1	301491.67	3.82
	2	376085.67	4.77
	3	98322.67	1.25
	4	78868.00	1.00

Con este análisis se mostró efectivamente que los cuatro marcadores químicos se encuentran presentes en ambas especies en diferentes proporciones, destacando que orientina (**3**) se encuentra en mayor proporción relativa en el extracto de *C. peltata*, mientras que ácido clorogénico (**1**) e isoorientina (**2**) están en mayor proporción relativa en *C. obtusifolia*.

3.3 Actividad antimicrobiana del extracto hidroalcohólico de *Cecropia* spp

En la **Tabla 6**, se presentan los resultados obtenidos de la evaluación antimicrobiana del extracto hidroalcohólico de ambas especies de *Cecropia*, donde se pueden observar las concentraciones a las que los microorganismos presentan inhibición.

Tabla 6. Actividad antimicrobiana (CMI µg/ml) de extractos orgánicos de *Cecropia peltata* y *Cecropia obtusifolia*

Grampositivas							
Extracto	Sa ₁	Sa ₂	Se ₁	Se ₂	Se ₃	Sh	Ef
Cp-Ha	200	>200	50	>200	200	200	>100
Co-Ha	<25	>200	<25	50	>200	200	<25
C ₁	*	*	*	*	*	*	*
C ⁺	-	-	-	-	-	-	-
Gramnegativas							Hongo
Extracto	Kp	Pa	Ec ₁	Ec ₂	Sd	Ecl	Ca
Cp-Ha	>200	<25	>200	>200	<25	>200	>200
Co-Ha	50	<25	>200	>200	<25	200	<25
C ₁	*	*	*	*	*	*	*
C ⁺	-	-	-	-	-	-	-

El extracto **CpHa** mostró actividad contra 7 cepas de microorganismos, correspondientes a 5 bacterias grampositivas y 2 gramnegativas en concentraciones iguales o menores a los 200 µg/mL. Este extracto presentó concentraciones mínimas inhibitorias menores a los 50 µg/mL para una bacteria grampositiva (Se₁) y dos bacterias gramnegativas (Pa y Sd).

Por otro lado, el extracto **CoHa** demostró mayor actividad antimicrobiana ya que presentó actividad frente a 10 cepas de microorganismos, correspondientes a 5 bacterias grampositivas, 4 gramnegativas y el hongo en concentraciones iguales o menores a 200 µg/mL. Este extracto fue activo en concentraciones menores a los 50 µg/mL en cuatro cepas grampositivas (Sa₁, Se₁, Se₂ y Ef), 3 cepas gramnegativas (Kp, Pa y Sd) y el hongo Ca.

Al examinar la actividad antimicrobiana de los extractos hidroalcohólicos y compararla con las proporciones relativas de los cuatro metabolitos principales detectados mediante CLAR-DAD, se encontró que el extracto de *C. peltata* presenta una mayor proporción relativa de orientina. Esta característica podría estar vinculada con su selectividad observada contra Se₁, Pa y Sd. En el caso del extracto de *C. obtusifolia*, la presencia predominante de ácido clorogénico e isoorientina podría explicar su inhibición selectiva contra Sa₁, Se₁, Se₂, Ef, Kp, Pa, Sd y Ca. Los metabolitos podrían tener la capacidad de inhibir la síntesis de la pared celular, los ácidos nucleicos o alterar la membrana celular del microorganismo sobre el que actúa [10].

Existen reportes que indican que la orientina, el ácido clorogénico y la isoorientina están asociados con efectos hipoglucemiantes, anticonvulsivos, ansiolíticos y antiinflamatorios, así como potenciales efectos antimaláricos [2, 8, 11].

4. Conclusiones

Cecropia peltata y *Cecropia obtusifolia* muestran un potencial significativo como alternativa a los antimicrobianos disponibles en el mercado, debido a la respuesta inhibitoria favorable observada en el extracto hidroalcohólico. Específicamente, *C. obtusifolia* quien exhibió una actividad antimicrobiana superior contra 10 cepas de microorganismos en concentraciones menores a 50 µg/mL. Asimismo, se identificó la presencia ácido clorogénico, isoorientina, orientina y un análogo de vitexina, en el extracto hidroalcohólico de ambas especies, los cuales han sido establecidos como marcadores químicos en especies de *Cecropia*. Finalmente, la evaluación antimicrobiana con valores menores a 25 µg/mL nos sugieren la posibilidad de realizar diluciones adicionales para determinar la CMI. Estos resultados representan un punto crucial para aislar los compuestos identificados de manera cuantitativa y evaluar su efectividad específica en el modelo antimicrobiano. Esta propuesta abre la puerta a futuras investigaciones y desarrollo de nuevos tratamientos antimicrobianos efectivos.

5. Agradecimientos

Los autores agradecen a Jonathan Orduño e Ixchel Palacios del laboratorio de fitoquímica (CIBIS-IMSS), por el apoyo técnico y analítico en la obtención de los extractos y manejo del equipo de CLAR-DAD; así como a la Dra. Ma. Dolores Pérez-García del laboratorio de microbiología (CIBIS-IMSS) por su apoyo en la evaluación antimicrobiana *in vitro*.

6. Resumen Grafico

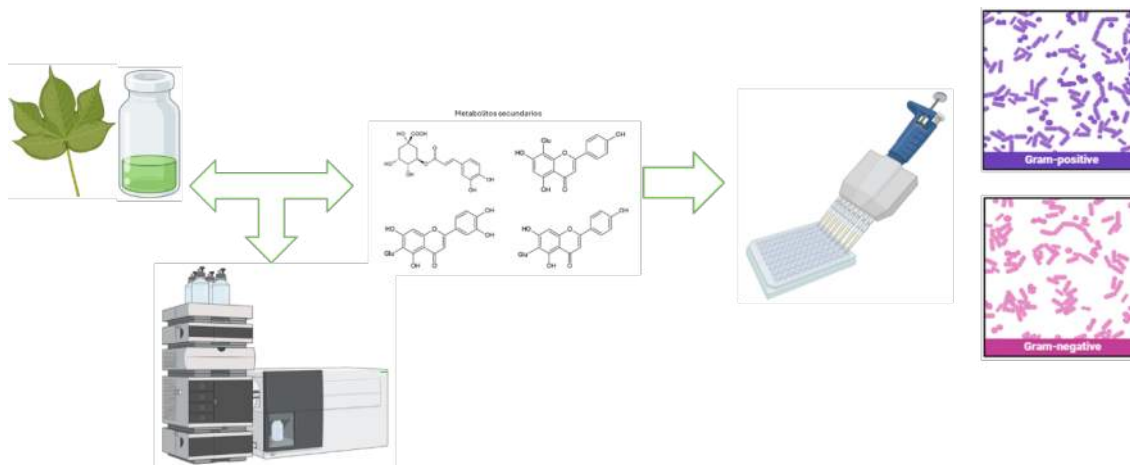


Figura 2. Análisis metabólico y evaluación de la actividad antimicrobiana del extracto hidroalcohólico de *Cecropia* spp (Creación propia realizada en BioRender)

7. Conflicto de Intereses

Los autores declararan no tener conflicto de intereses.

8. Declaratoria del Uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

9. Referencias

- [1] J. H. Carvajal “Análisis fitoquímico y de actividad antimalárica de dos especies del género *Cecropia*”. Tesis de Grado. Universidad Nacional de Colombia. **2012**.
- [2] J. O. Chávez *et al.*, “Perfil neurofarmacológico de la fracción butanólica de las hojas de *Cecropia peltata* L.”, Rev. Colomb. Cienc. Quím. Farm., Vol. 42, pp. 245 – 246, **2013**.
- [3] J. J. Rojas *et al.*, “Screening for antimicrobial activity of ten medicinal plants used in Colombian folkloric medicine: a possible alternative in the treatment of non-nosocomial infections.”, BMC Complement Altern Med, Vol. 2, pp. 6, **2006**, doi: <https://doi.org/doi:10.1186/1472-6882-6-2>
- [4] A. A. Cetto *et al.*, “Hypoglycemic Effect of *Cecropia peltata* L. on N5-STZ type 2 diabetic rats.”, Pharmacologyonline, Vol. 3, pp. 203 – 210, **2007**.
- [5] A. R. Mondragón *et al.*, “Simulated Gastrointestinal Biotransformation of Chlorogenic Acid, Flavonoids, Flavonolignans and Triterpenoid Saponins in *Cecropia obtusifolia* Leaf Extract.”, Plant. Med., Vol. 87, pp. 404 – 416, **2020**, doi: <https://doi.org/10.1055/a-1258-4383>
- [6] E. M. Sánchez *et al.*, “Intra- and Interspecies Differences of Two *Cecropia* Species from Tabasco, Mexico, Determined through the Metabolic Analysis and ¹H-NMR-Based Fingerprinting of Hydroalcoholic Extracts.”, Plants, Vol. 12, **2023**, doi: <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/plants12132440>
- [7] A. G. García *et al.*, “Preliminary Phytochemical Profile and Bioactivity of *Inga jinicuil* Schltdl & Cham. ex G. Don.”, Plants, Vol. 11, pp. 1 – 14, **2022**, doi: <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/plants11060794>
- [8] P. Nicasio *et al.*, “Hypoglycemic Effect and Chlorogenic Acid Content in Two *Cecropia* species.”, Phytother. Res., Vol. 19, pp. 661 – 664, **2005**, doi: <https://doi.org/DOI: 10.1002/ptr.1722>
- [9] A. R. Mondragón *et al.*, “Selection of chemical markers for the quality control of medicinal plants of the genus *Cecropia*.”, Pharm. Biol., Vol. 55, pp. 1500 – 1512, **2017**, doi: <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1080/13880209.2017.1307421>
- [10] S. J. Cavalieri *et al.*, “Manual de pruebas de susceptibilidad antimicrobiana”. American Society for Microbiology, **2005**.
- [11] M. A. Daga *et al.*, “A review of the anti-inflammatory and antimicrobial activities of the components of the *Cecropia* genus.”, Asian J Pharm Clin Res, Vol. 13, pp. 13 – 20, **2020**, doi: <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.22159/ajpcr.2020.v13i8.38031>.

Afectaciones en cultivos de Veracruz y Tabasco por derrame de petróleo en los últimos seis años

Javier-Jiménez, D.G.¹; Alor-Chávez, M. de J.^{1*}; Morales-Bautista, C.M.¹; Méndez-Olán, C.¹; Chablé-Candelerero, R.¹.

¹División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, C.P. 86690 Cunduacán, Tabasco, México.

*maricela.alor@ujat.mx

Resumen

La presente investigación analizó el impacto de los derrames de petróleo en los cultivos de Veracruz y Tabasco, México, del 2017 al 2023. Se centró en recopilar datos de diferentes fuentes bibliográficas, incluyendo estudios previos y reportes gubernamentales, para identificar las causas que ocasionaron estos derrames, tales como falta de mantenimiento, robo de hidrocarburos, etc. así como sus consecuencias en el medio ambiente y la salud humana, específicamente en la afectación de los cultivos. El estudio se enfocó principalmente en los derrames que ocasionan un daño en los cultivos (maíz, coco, cacao, entre otros) y propone alternativas para minimizar futuros derrames y sus impactos negativos. Finalmente, este trabajo enfatiza la vulnerabilidad de los ecosistemas y la población ante este tipo de eventos.

Palabras claves: *Petróleo, derrames, cultivos, contaminación, medio Ambiente*

Abstract

This research analyzed the impact of oil spills on crops in Veracruz and Tabasco, Mexico, from 2017 to 2023. It focused on collecting data from different bibliographic sources, including previous studies and government reports, to identify the causes that caused these spills, such as lack of maintenance, hydrocarbon theft, etc. as well as their consequences on the environment and human health, specifically on the affectation of crops. The study focused mainly on spills that cause damage to crop (corn, coconut, cocoa, among others) and proposes alternatives to minimize future spills and their negative impacts. Finally, this work emphasizes the vulnerability of ecosystems and the population to this type of events.

Keywords: *Oil, spills, crops, pollution, environment*

Recibido: 17 de diciembre de 2024, Aceptado: 27 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introducción

México ocupa el doceavo lugar en la producción de hidrocarburos a nivel mundial, esto por la gran variedad de recursos naturales que se presentan en el territorio mexicano. Entre los estados considerados petroleros destacan dos: Veracruz, que en 2023 cerró con una producción de petróleo crudo de 111,109 mil barriles diarios (Mbd) y Tabasco, que alcanzó una producción de 487,809 mil barriles diarios (Mbd) ambos datos correspondientes a diciembre de ese año, según información de la Secretaría de Energía [1].

El petróleo desempeña un papel crucial en la economía mexicana, no obstante, factores como la falta de mantenimiento de los ductos, el robo de hidrocarburos, los desastres naturales, han provocado derrames desde su explotación en los estados mencionados anteriormente. Estos eventos han contaminado cultivos en las regiones afectadas, causando graves repercusiones en la economía, la salud y el patrimonio de los pobladores [1].

El objetivo del presente artículo fue la recopilación de datos reportados acerca de los derrames de petróleo más relevantes en los suelos de Veracruz y Tabasco, y correlacionar las afectaciones en los cultivos.

Los derrames de hidrocarburos han sido una problemática recurrente, especialmente en regiones con intensa actividad petrolera. Estas situaciones conllevan diversas consecuencias y efectos negativos para las áreas afectadas. Suarez en 2014 menciona que las zonas con actividad petrolera reactivan a la sociedad y economía del lugar como también propicia una mejor calidad de vida de la población local [2]. Sin embargo; estas actividades, pueden provocar un desequilibrio en los ecosistemas, contaminación ambiental y otros impactos negativos. Por su parte, Guerrero-Useda en 2021, sostiene que las actividades que integran la extracción de petróleo y gas deben considerar la biodiversidad, delimitando cuidadosamente las operaciones para minimizar el daño sin interrumpir los ciclos de las especies que habitan y se desarrollan en los ecosistemas locales [3].

Algunos estudios realizados en relación con el objetivo de la investigación son:

Durán-Carmona en 2018, llevó a cabo una síntesis y análisis de una problemática ocurrida en el ejido de Oxiacaque, en el municipio de Nacajuca, Tabasco. La investigación se centró en la explosión de un pozo petrolero y la interacción generada entre este evento y las comunidades locales. Como parte del estudio, se aplicó una encuesta a 500 habitantes de la población afectada, en donde los resultados representan la vida cotidiana de las personas. Algunas de las causas del derrame fueron la exploración y explotación del lugar como distintos ámbitos de la población. Las afectaciones reportadas incluyeron: el suelo (Deterioro de la vegetación terrestre y pérdida de fertilidad en cultivos), la fauna (Impacto negativos en animales de traspatio, peces y ganado) y, la salud (Aparición de enfermedades como dermatitis severa, dolor de cabeza, oído y garganta, así como crisis nerviosa). Los cultivos característicos de la región, como cacao, mango, plátano y tamarindo, resultaron gravemente dañados, afectando la economía local [4].

En la investigación de Muñoz (2019) se llevó a cabo un estudio sobre la evaluación del impacto socioambiental en el municipio de Comalcalco, donde identificaron, analizaron y jerarquizaron los impactos ambientales generados por actividades relacionadas con hidrocarburos. Las posibles causas del derrame en la localidad fueron la falta de mantenimiento de la infraestructura, el transporte de los ductos que atraviesan la comunidad y el robo de hidrocarburos. Estas situaciones derivaron en afectaciones

significativas tanto al medio ambiente (contaminación del suelo, agua y aire) como a la salud (problemas respiratorios, piel y vista), además se reflejó la contaminación a cultivos locales como el cacao y coco.

Almaraz -Leyva (2020) investigó la zona de Tihuatlán, Veracruz. En donde había antecedentes de derrames de hidrocarburos y en donde se realizaron 10 entrevistas cualitativas semi estructuradas a personal de instituciones y 322 encuestas aplicadas a los habitantes de la localidad. La encuesta fue estructurada para la comprensión de adultos y jóvenes en un rango de edad mayor a 17 años, estas preguntas fueron orientadas en afectaciones, lineamientos para contingencia, impacto en el medio ambiente e impacto en actividades productivas, del hogar y recreativas. La investigación reflejó diferentes causas como la exploración, explotación, transporte de petróleo y almacenamiento; las afectaciones contemplaron la contaminación del medio ambiente (contaminación del arroyo Totolapa, suelo, aire y vegetación). También resultaron afectaciones a la fauna (animales de traspatio y especies del entorno) y afectaciones a la salud (dolor de cabeza, temperatura, irritación de ojos, irritaciones y manchas en la piel). Los cultivos afectados fueron maíz, naranja, limón y plátano.

Estos antecedentes destacan las afectaciones provocadas por las actividades petroleras en los estados de Veracruz y Tabasco. Entre los principales impactos identificados se encuentran la contaminación de suelo, agua y aire. Otras se centran en las enfermedades que experimentaron los pobladores debido a los derrames ocurridos. Por esta razón, la presente investigación recopila y analiza las afectaciones registradas en los dos estados antes mencionados, con el objetivo de proponer alternativas útiles que ayuden a minimizar los derrames y, al mismo tiempo, evitar el impacto negativos en los cultivos locales.

2. Materiales y Métodos.

Para el desarrollo del presente artículo bibliográfico, se realizó una exhaustiva búsqueda de información sobre los principales derrames ocurridos en los suelos de los estados mencionados previamente. La información fue recopilada de diversas fuentes, incluyendo artículos, tesis, entrevistas, reportes, entre otros; utilizando buscadores académicos e instancias gubernamentales como (Google Académico, Senado de la República, Gobierno de Veracruz y Tabasco, PEMEX). Adicionalmente, se emplearon otras fuentes propias que contenían datos relevantes. La información recopilada incluyó detalles como: fecha, ubicación, afectaciones, cultivos dañados entre otros aspectos relacionados con los derrames. Algunas de las palabras claves empleadas en la búsqueda son derrame, cultivos y afectaciones.

Con los derrames identificados, se llevó a cabo un análisis y clasificación de diversos parámetros, tales como la fecha, la causa, los efectos, cultivos afectados y otros parámetros. Esta información se utilizó para construir una base de datos. Se empleó el programa Microsoft® Excel® para Microsoft 365 MSO (versión 2501 compilación 16.0.18429.20132) de 64 bits para representar la información y los parámetros más importantes. Como información adicional, se realizaron consultas en la página del INEGI, donde se buscó la población total de la comunidad (censo 2020) y la morbilidad del municipio o zona afectada [7,8].

3. Resultados

En la **tabla 1**, se describen los derrames relevantes en Veracruz y Tabasco del 2017-2023. Estos derrames están clasificados empezando por la Estado, zona, extensión territorial, afectaciones, causas, cultivos afectados por el derrame, consecuencias, fecha y fuente.

Tabla 1. Derrames de petróleo relevantes en Veracruz y Tabasco y cultivos afectados.

Estado, Zona y extensión municipal (Km ²)	Afectaciones	Causas	Cultivos	Consecuencias	Fecha
					Fuente
Estado: Veracruz Zona: Papantla Extensión: 1,458 km ²	Contaminación del suelo: Cultivos de vainilla y cítricos del lugar. Se presentó el desplazamiento de los pobladores, debido a la baja producción de sus parcelas, y optaron por sembrar en otras partes propiciando afectaciones económicas. Los derrames presentados contribuyen en aumentar enfermedades relacionadas con actividades petroleras.	La zona ya había tenido antecedentes de derrames por motivos de exploración y explotación.	Vainilla, naranja.	Desplazamiento de la agricultura local	2017 Chenaut, V. (2017) [9]
Estado: Veracruz Zona: Nanchital de Lázaro Cárdenas del Río Extensión: 63.99 km ²	El derrame del 4 de octubre del 2018 afectó a la fauna (mortandad de armadillos, tortugas, peces, lagartos, víboras y aves, se sospecha que fue por contacto con el agua contaminada. Contaminación del suelo y desplazamiento de los pobladores, ya que tuvieron que irse de sus casas a zonas seguras mientras se realizaba el aseguramiento y saneamiento de la zona.	El derrame de hidrocarburos en la zona de Nanchital no se especifica si fue por falta de mantenimiento o por otras circunstancias. Las lluvias en la zona afectada provocaron que el hidrocarburo se desplazara al arroyo Tepeyac.	Frijol y maíz en grano.	Desplazamiento de personas	4 de octubre del 2018 Senado de la República. (2018). [10]

Estado: Veracruz	Contaminación de suelo (ecotoxicidad a los organismos, limitación en la absorción de agua, disminución en la retención de humedad y nutrientes, compactación, así como cambios en pH y salinidad).	En general la exploración, explotación, transporte de petróleo y almacenamiento ha ocasionado contaminación en la zona afectada durante años a los pobladores.	Maíz, naranja, limón, plátano.	Disminución de la fertilidad para sembrar	18 de octubre del 2018
	Contaminación del agua (Película del hidrocarburo interfiere con el paso de la luz en agua y aumento de la toxicidad). Afectación de la salud: Se presentan casos con dermatitis y efectos psicológicos (síntomas depresivos como ansiedad y estrés). Social: Involucra casos donde los pobladores fueron desplazados de las zonas afectadas por pérdida de empleo u otras razones.				
Zona: Oleoducto Humapa-CAB Tajin, Tihuatlán				Alteración Microbiológica	
Extensión: 828.3 km ²					
Estado: Tabasco	Efectos en el medio ambiente: Contaminación de pequeños arroyos que pasan por la zona afectada, la población dejó de usar el líquido para uso doméstico y de riego.	Falta de mantenimiento de los ductos y robo de hidrocarburos. Explosiones e incendios: Donde se liberan diferentes componentes tóxicos al ambiente. Otras causas pueden ser el transporte y disposición final del petróleo"	Cacao, caña de azúcar, copra, frijol, maíz, melón, naranja, sandía, coco.	Toxicidad Química	2019
	Contaminación de suelo (salinidad). Se generó una fuerte contaminación en la fauna (contaminación de las fuentes				
Zona: Ranchería Lázaro Cárdenas, Comalcalco.				Disminución de especies	
Extensión: 723.19 km ²					

Almaraz Leyva, N. E.
(2020). [6]

	primarias como el agua, su alimentación y muerte de estas especies). Afectación a la salud humana: Las personas expuestas a fuentes contaminadas presentaron problemas en vías respiratorias, piel y vista				Muñoz, Y. P. (2019). [11]
Estado: Veracruz	Se presentó la contaminación de suelo (erosión de la tierra y plantas).				2019
Zona: Arroyo el Frijolillo, ejido Emiliano Zapata, Papantla, Veracruz	También se generó la contaminación de agua, (rio "Frijolillo"), el cual es una fuente vital para los pobladores. Afectación a la salud: los efectos se reflejan en casos relacionados con la piel, las vías respiratorias y dolores de cabeza.	Falta de mantenimiento de ductos: El cual pasa por la comunidad y ha provocado diferentes derrames a lo largo de los años.	Maíz, frijol, chile, vainilla y naranja.	Aumento de enfermedades	
Extensión: 1,458 km ²					Bustamante, J. C. U. (2021). [12]
Estado: Veracruz	Medio ambiente: Las afectaciones involucraron la contaminación del agua que corresponde a la concentración del petróleo en el fondo del río. Como también la contaminación del suelo y otros factores	Un derrame de hidrocarburo originado en la refinería de Minatitlán afectó varios kilómetros del río Coatzacoalcos. Esto por causas desconocidas.	Frijol, limón, maíz en grano y naranja.	Alteración microbiológica Disminución de las especies marinas locales	25 de Junio del 2020
Zona: Minatitlán					
Extensión: 723.19 km ²					

	como los pastos cercanos y manglares del río. En cuanto a Fauna, podemos referirnos a la contaminación de camarones y mojarras, los cuales se comercializaban para consumo humano.				Senado de la República. (2020). [13].
	El derrame alteró al medio ambiente involucrando diferentes efectos (contaminación de flora, fauna y agua). La laguna antes mencionada tiene una extensión de 62 kilómetros cuadrados rodeada de pantanos y vegetación de manglar. Esta laguna es usada para el desarrollo de diferentes actividades tanto sociales, económicas y ambientales. Efectos en la salud: Intoxicación de las personas por medio de los peces y otros alimentos que se utilizan para consumo humano; esto se ve reflejado ya que los pobladores mencionaron el riesgo de más de 40 mil contenedores de ostión que usan para la venta y consumo. Cabe destacar que esta laguna es aledaña a la zona de la refinería olmeca				Pérez M, S. (2020). [14]
Estado: Tabasco		Derrame de hidrocarburo que se extendió a la Laguna de Mecoacán, uno de los lugares más importantes para la pesca y la producción ostrícola a nivel nacional. Hay antecedentes en la laguna de Mecoacán, incluso años atrás por exploración y explotación.			
Zona: Laguna de Mecoacán, ranchería “José María Morelos”, conocida como “El Bellote”, Paraíso.					
Extensión: 577.55 km ²			Coco y cacao.	Cambios biológicos Intoxicación	29 de mayo del 2020

Estado: Tabasco	Ocasiónó daños al medio ambiente como la contaminación del suelo (vegetación propia del lugar y de diferentes terrenos de la comunidad que posiblemente se usaban para el cultivo). Efectos sobre la salud debido a la contaminación de las fuentes primarias.	Derrame de hidrocarburo: La comunidad es una zona donde hay gran actividad petrolera como la exploración, explotación y transporte. Aproximadamente 10 hectáreas de distintos terrenos fueron dañadas.	Cacao, caña de azúcar, copra, frijol, maíz, melón, naranja, sandía, coco.	Desplazamiento de la agricultura local	Junio del 2020	Ramírez, P. (2022). [15]
Zona: Patastal, Comalcalco						
Extensión: 723.19 km ²						
Estado: Tabasco	Las afectaciones provocaron la contaminación de agua en costas en Tabasco. En la fauna se puede reportar: 20 especies de cetáceos (mamíferos), al menos 4 tortugas marinas con alguna categoría de protección, 1,500 especies de peces, y especies en peligro como tiburones ballena y blanco, y las mantarrayas gigantes.	Derrame provocado posiblemente por el uso erróneo en el tamaño de las tuberías. PEMEX mencionó que la tubería tiene 12 pulgadas, pero esto no coincide con el tamaño de las llamas. A menor tamaño, estas aumentan la presión de operación y propicia un mayor riesgo de liberación.	Coco.	Pérdida de biodiversidad, la alteración de la cadena alimenticia y la transmisión de enfermedades	Julio del 2021	Quiroz, Y. (2021). [16]
Zona: Plataforma marina Ku-Maloob-Zap						
Extensión: Sin datos						
Estado: Veracruz	Afectaciones al medio ambiente: La fauna (serpientes y animales nativos), flora, cultivos agrícolas (10 hectáreas) y arroyos. Esta zona es representativa porque alberga comunidades originarias; las cuales fueron afectadas y presentaban preocupación sobre su salud.	"El derrame de petróleo fue derivado de la falta de mantenimiento por un estallido en lo que se supone sea la línea principal del Pozo Santa Agueda 223."	Ajonjolí, café cereza, chile verde, frijol, limón, maíz, naranja, papaya, plátano, sandía, tomate verde y toronja.	Disminución de tierra cultivable a comunidades originarias	Julio del 2022	Valenzuela G, C. A. (2022). [17]
Zonas: comunidades de Santa Agueda, Adolfo Ruiz Cortines y Casa Blanca, Papantla.						
Estado: 1,458 km ²						

Estado: Tabasco	El agua en general no tuvo más efectos negativos debido a las barreras de contención, pero la población de diferentes municipios fue afectada en sus actividades cotidianas. Ya que las bombas de agua fueron cerradas afectando así a las poblaciones.	El derrame se extendió sobre el río Samaria, llegando a algunas partes de Tabasco. Algunas plantas potabilizadoras de Huimanguillo, Cunduacán y El Mango fueron cerradas por presencia de petróleo.	Aguacate, cacao, caña de azúcar, arroz palay, café cereza y copra.	Impacto económico a diferentes sectores	Julio del 2022
Zona: Río Samaria, Huimanguillo y Cunduacán					
Extensión: 3,718.63 km ² en Huimanguillo y de 598.74 km ² en Cunduacán					
					Gobierno de Tabasco. (2022). [18]
Estado: Veracruz	Las zonas afectadas aumentaron por medio de las corrientes marinas. En donde el impacto al ecosistema es cada vez más preocupante para los pobladores del lugar ya que en las costas muchas de las comunidades se mantienen de la actividad pesquera.	El derrame fue ocasionado por el mantenimiento de ductos. La red de ductos de los campos Ek Balam concluyó su periodo de vida útil, por lo que, en forma preventiva se efectúa el cambio por una nueva red.	Coco	Desequilibrio en ecosistemas marinos	6 de julio del 2023
Zona: Costas de Veracruz					
Extensión: Sin datos					
					Viggiano, A. C. (2023). [19]

*Cultivos tomados del Servicio de Información Agroalimentaria y Pesquera (SIAP, 2023).

Los cultivos afectados por los derrames de petróleo se esquematizan en la **figura 1**, destacando aquellos que fueron más frecuentes en el análisis realizado. Entre los cultivos más afectados se encuentran el maíz, coco, caña de azúcar y café. Estos productos agrícolas se mencionaron reiteradamente investigaciones, ya que son cultivos importantes para ambos estados debido al nivel de producción y la similitud en las condiciones climáticas que favorecen su producción (SIAP, 2023) [20].



Figura 1. Cultivos identificados. Elaboración con IA

Los cultivos identificados en las zonas investigadas se pueden clasificar en 4 tipos: perenne, anuales, bienal, temporal (ver tabla 2). Esta clasificación indica que cualquier tipo de cultivos pueden ser afectados durante un derrame de petróleo.

Tabla 2. Clasificación de Cultivos

Tipo de cultivo	Cultivo registrado en la zona
Perenne	Naranja, cacao, plátano, caña de azúcar, Café cereza, vainilla, coco
Anuales o cíclicos	Chile, Maíz, frijol
Bienal	Papaya
Temporal	Limón, Maíz Temporal

Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a la **tabla 2**, se identificó que los cultivos perennes son los más frecuentes, esto debido a que en México ocupan 1,272 mil hectáreas de la superficie total del país, los cuales proporcionan dos terceras partes del volumen de producción porque sus cultivos más importantes tienen un peso más elevado que la mayoría de los cíclicos [20].

Los derrames de petróleo crudo suelen estar acompañados de otros contaminantes; por ejemplo, un estudio realizado en el Activo Petrolero Cinco presidentes (Campos Petroleros Rodador y La Venta). En el cual se caracterizaron las comunidades vegetales en un área afectada por derrames de petróleo, en su estructura y composición florística; se encontraron 52 derrames, de los cuales la mayoría afectó a los suelos Histoles y zonas manglar. Esta zona estaba compuesta por palmar, matorral, selva baja inundables, manglar e hidrófitas, así como pastos tolerantes a la humedad, cultivos múltiples y perennes (plantaciones de coco).

Todas las zonas presentaron contaminación debido a los hidrocarburos y metales pesados como Ni y V [21].

Los derrames pueden provocar pérdida de nutrientes, modificación de las plantas, acumulación de metales en raíces y poco crecimiento entre otros factores. Esto se respalda lo hecho por [22] Ortega-Ortiz et al., 2003, los cuales realizaron una comparación de los cultivos anuales y árboles frutales perennes, donde se encontró que la disminución de nutrientes en los suelos afecta el crecimiento de la raíz y el brote. Otros factores que pueden alterar a estos tipos de cultivos son los elementos químicos como Pb, Cr, Cd, Co, Ni, Cu, Zn, As, Mo, Sn, Ba, Hg los cuales no pueden ser degradados por los cultivos.

4. Conclusiones

Los derrames de hidrocarburos han sido una problemática recurrente, en regiones con intensa actividad petrolera. En Veracruz, los municipios donde se han reportados derrames de petróleo fueron: Papantla, Minatitlán, Nanchital de Lázaro Cárdenas del Río y Tihuatlán. Por otro lado, en Tabasco los municipios con mayores registros de estos incidentes fueron Comalcalco, Cunduacán, Cárdenas, Huimanguillo y Paraíso.

La información obtenida fue organizada y analizada donde se clasificaron las causas y efectos que pueden provocar los derrames. Esta investigación evidenció que los derrames en Veracruz y Tabasco pueden originarse por: Falta de mantenimiento de ductos, robo de hidrocarburos, actividades de exploración, explotación, transporte y almacenamiento. Estos derrames generan múltiples afectaciones que se pueden clasificar en: Medio ambiente (contaminación del suelo, agua, flora y fauna), la salud (enfermedades relacionadas con el sistema digestivo, respiratorio, tegumentario y nervioso) y, sociales y económica (impactos negativos en las comunidades y economía locales). De acuerdo con las causas identificadas y sus afectaciones, se proponen diversas alternativas para minimizarlos los derrames de petróleos, tales como proveer información básica a las personas que habitan en de zonas con probabilidades de derrames, aplicar las normas mexicanas correspondientes, combatir la corrupción, capacitar adecuadamente a los trabajadores y realizar inspecciones periódicamente de la infraestructura.

Veracruz y Tabasco comparten algunos factores determinantes como suelos (Vertisol, Gleysol, Histosol etc.) y los tipos de cultivos presentes en la región: perennes, anuales, bienales y temporales. Estos cultivos suelen verse afectados por la actividad petrolera del lugar, generándose consecuencias como la disminución de la producción, acumulación de metales en los suelos, cambios en la estructura física del suelo y otras afectaciones acerca de la calidad y productividad de los cultivos.

5. Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento a la División Académica de Ciencias Básicas por el apoyo brindado durante la realización de este trabajo de investigación.

6. Declaración de conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

7. Declaración de uso de inteligencia artificial

Los autores declaran que las figuras 1 y 2, fueron modificadas empleando inteligencia artificial a través de ChatGPT para fines ilustrativos de cultivos identificados en el apartado de resultados y en el resumen gráfico para mostrar el efecto de hidrocarburos sobre el cultivo.

8. Resumen gráfico

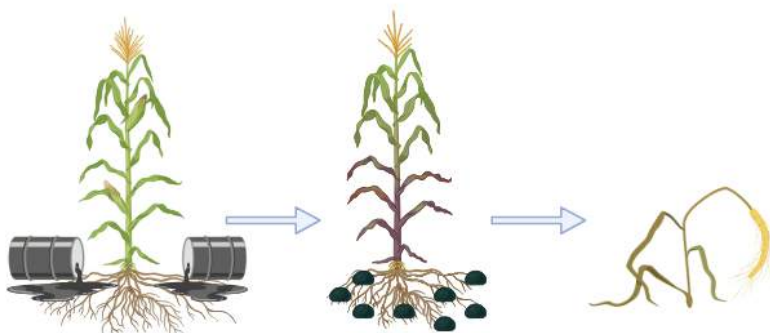


Figura. 2. Efecto del Hidrocarburo sobre el cultivo. Elaboración propia con IA

9. Referencias

- [1] SIE, "Producción de petróleo crudo por entidad federativa," 2023. [En línea]. Disponible en: <https://sie.energia.gob.mx/bdiController.do?action=cuadro&cvecua=PMXB1C02>.
- [2] S. Suárez Tamayo, "El desarrollo industrial y su impacto en el medio ambiente," *Revista Cubana de Higiene y Epidemiología*, vol. 52, no. 3, pp. 357-363, 2014.
- [3] M. Guerrero-Useda, "Equilibrio ambiental, extracción petrolera y riesgo de desastres en el oleoducto trasandino colombiano," *IPSA Scientia, Revista Científica Multidisciplinaria*, vol. 6, no. 3, pp. 86-101, 2021.
- [4] V. Durán-Carmona, "Impacto ambiental por la explosión del pozo Terra 123 en comunidades indígenas de Nacajuca, Tabasco," 2018.
- [5] Y. P. Muñoz, "Evaluación de impacto socioambiental por derrame de petróleo de un ducto en Comalcalco, Tabasco," *Journal of Basic Science*, vol. 5, no. 15, 2019.
- [6] N. E. Almaraz-Leyva, "Percepción de la población respecto a los lineamientos aplicados ante un derrame de petróleo en un sitio afectado de Tihuatlán, Veracruz," Tesis doctoral, Universidad Veracruzana, Facultad de Ciencias Biológicas y Agropecuarias, 2020.
- [7] INEGI, "Archivo histórico de localidades geoestadísticas," 2020. [En línea]. Disponible en: <https://www.inegi.org.mx/app/geo2/ahl/>.
- [8] INEGI, "Morbilidad," 2022. [En línea]. Disponible en: https://www.inegi.org.mx/sistemas/olap/proyectos/bd/continuas/salud/mobhospital.asp?s=est&c=33422&proy=esep_mobhospital.

- [9] V. Chenaut, "Impactos sociales y ambientales de la explotación de hidrocarburos en el municipio de Papantla, Veracruz (México)," *e-cadernos CES*, no. 28, 2017.
- [10] Senado de la República, "Gaceta del Senado," 8 de noviembre de 2018. [En línea]. Disponible en: https://www.senado.gob.mx/65/gaceta_del_senado/documento/85657.
- [11] Y. P. Muñoz, "Evaluación de impacto socioambiental por derrame de petróleo de un ducto en Comalcalco, Tabasco," *Journal of Basic Science*, vol. 5, no. 15, 2019.
- [12] J. C. Bustamante, "La ambivalencia del petróleo: transformaciones paisajísticas de un ejido totonaco en la selva alta del norte de Veracruz (1900-2020)," 2021.
- [13] Senado de la República, "Gaceta Parlamentaria," 8 de julio de 2020. [En línea]. Disponible en: https://www.senado.gob.mx/65/gaceta_del_senado/documento/109796.
- [14] S. Pérez M., "Gaceta Parlamentaria," Senado de la República, 10 de junio de 2020. [En línea]. Disponible en: https://www.senado.gob.mx/65/gaceta_del_senado/documento/108788.
- [15] P. Ramírez, "Pemex registra 176 derrames y fugas de alto impacto ambiental de 2018 a 2021," *Causa Natura Media*, 2022. [En línea]. Disponible en: <https://causanaturamedia.com/periodismo-cn/pemex-registra-176-derrames-y-fugas-de-alto-impacto-ambiental-de-2018-a-2021>.
- [16] Y. Quiroz, "El alto costo de un ecocidio: la explosión de gas en el ducto de Campeche," *Este País*, no. 6, 2021.
- [17] C. A. Valenzuela G., "Gaceta Parlamentaria," Senado de la República, 27 de julio de 2022. [En línea]. Disponible en: https://www.senado.gob.mx/65/gaceta_del_senado/documento/127857.
- [18] Gobierno de Tabasco, "Reanuda CEAS operaciones de plantas potabilizadoras El Mango, Cunduacán y Huimanguillo," 2022. [En línea]. Disponible en: <https://tabasco.gob.mx/noticias/reanuda-ceas-operaciones-de-plantas-potabilizadoras-el-mango-cunduacan-y-huimanguillo>.
- [19] A. C. Viggiano, "Gaceta Parlamentaria," Senado de la República, 2023. [En línea]. Disponible en: https://www.senado.gob.mx/65/gaceta_del_senado/documento/136683.
- [20] Secretaría de Agricultura y Desarrollo, "Cultivos perennes, garantía de alimentación," Gobierno de México, 2015. [En línea]. Disponible en: <https://www.gob.mx/agricultura/es/articulos/cultivos-perennes-garantia-de-alimentacion>.
- [21] E. García-López, Z.-C.-L., "Caracterización de las comunidades vegetales en un área afectada por derrames de hidrocarburos," *Terra Latinoamericana*, vol. 24, no. 1, pp. 17-26, 2006.
- [22] H. Ortega-Ortiz, A. Benavides-Mendoza, y R. A.-G. Alonso, *Fitorremediación de suelos contaminados con metales pesados*, Coahuila, México: Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, 2003.

Evaluación de la resistencia a la insulina mediante el índice TyG: comparación prepandemia y pandemia de COVID-19

Pacheco Velázquez E.M.¹, Trejo Sánchez B.E.² , López Victorio C.J.^{1,5} , Cervera Pereyra S.¹ , Carrillo Hidalgo I.³, Escobar Ramírez A.^{1,5} , García Sánchez J.R.^{4,5} , Olivares Corichi I.M.^{4,5} , González Garrido J.A.^{1,5,*} 

¹División Académica de Ciencias Básicas, Laboratorio de Bioquímica y Biología Molecular, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Cunduacán, Tabasco, México, Cuerpo Académico Bioquímica y Biología Molecular.

²División Académica de Ciencias Básicas, Laboratorio Clínico de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Cunduacán, Tabasco, México.

³Centro de Atención Médica y Beneficencia IS-DOOR A.C. Cunduacán, Tabasco, México.

⁴Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Medicina del Instituto Politécnico Nacional. Laboratorio de Oncología Molecular y Estrés Oxidativo, Instituto Politécnico Nacional, Plan de San Luis y Díaz Mirón, C.P. 11340 Ciudad de México, México.

⁵Red de investigación: RI-0012-2024 Bioquímica y Biología Molecular, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán, Tabasco, México.

*arnold.gonzalez@ujat.mx

Resumen

La resistencia a la insulina (RI) está vinculada a complicaciones graves en la COVID-19. Detectar RI es un estudio especializado no disponible en laboratorios clínicos básicos. Un método reciente y efectivo para evaluarla es el índice triglicérido-glucosa (TyG). Este estudio tuvo como objetivo determinar la RI mediante el índice TyG en los periodos prepandemia (2017-2019) y pandemia de COVID-19 (2020-2022) en jóvenes universitarios de la UJAT en la unidad Chontalpa. Se analizaron 6318 jóvenes, clasificados por IMC, sexo y periodo de COVID-19. Los resultados del índice TyG indican la presencia de RI en sujetos obesos de ambos periodos, en los hombres durante la pandemia se observó una disminución, aunque siguen presentando resistencia a la insulina. La incorporación del índice TyG en laboratorios clínicos básicos podría facilitar la detección de la RI, mejorando así el diagnóstico, control y tratamiento de los pacientes afectados.

Palabras claves: Resistencia a la insulina, índice triglicérido y glucosa, IMC, jóvenes, COVID-19.

Abstract

Insulin resistance (IR) is linked to serious complications in COVID-19. Detecting IR is a specialized study not available in basic clinical laboratories. A recent and effective method to assess it is the triglyceride-glucose index (TyG). This study aimed to determine RI using the TyG index in the pre-pandemic (2017-2019) and pandemic periods of COVID-19 (2020-2022) in young university students of the UJAT in the Chontalpa unit. A total of 6318 young people were analyzed, classified by BMI, sex and COVID-19 period. The results of the T&G index indicate the presence of IR in obese subjects of both periods, in men during the pandemic a decrease was observed, although they still present insulin resistance. The incorporation of the T&G index in basic clinical laboratories could facilitate the detection of IR, thus improving the diagnosis, control and treatment of affected patients.

Keywords: Insulin resistance, triglyceride and glucose index, BMI, young people, COVID-19.

Recibido: 20 de noviembre de 2024, Aceptado: 27 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introducción

Clínicamente, la Resistencia a la Insulina (RI) se define como la reducción de los niveles de insulina, ya sea endógena o exógena, con el fin de aumentar la captación y utilización de glucosa en un individuo [1]. La insulina es el regulador maestro del metabolismo de la glucosa, los lípidos y las proteínas. Con la ingestión de una carga oral de glucosa o una comida mixta, la concentración plasmática de glucosa aumenta, se estimula la secreción de insulina por las células beta y la hiperinsulinemia, trabajando en conjunto con la hiperglucemia [2]. Después de la ingesta de alimentos, la insulina secretada por las células β pancreáticas promueve el anabolismo y suprime los programas catabólicos. Durante el metabolismo de la glucosa, la insulina estimula varios tejidos consumidores de glucosa, como el músculo esquelético y los tejidos adiposos, para absorber glucosa y luego promueve la síntesis de glucógeno y lípidos en el hígado, el músculo esquelético y el tejido adiposo [3]. En la resistencia a la insulina, se producen alteraciones en las vías de señalización que modulan la captación de glucosa en las células, especialmente en las células del músculo esquelético, lo que da lugar a una alteración de la homeostasis de la glucosa. [4].

A nivel molecular, la RI se caracteriza por la alteración de la capacidad de la insulina para activar el transporte de glucosa en las células musculares y adiposas debido a una falla del sistema de transporte de glucosa en esos tejidos [1]. El exceso de ácidos grasos libres en condiciones de obesidad, incrementan el estrés del retículo endoplasmático, lo que conduce a la inhibición o atenuación de la vía de señalización de la insulina, por activación de dos cinasas las cuales provocan la fosforilación de la IRS (sustrato receptor de insulina) en residuos de serina y no de tirosina como se realiza en condiciones normales, anulando la cascada de señalización que debía activarse por la unión insulina-receptor [5].

La RI relacionada con la obesidad implica la vía fosfatidilinositol 3-quinasa (PI3-K) que confiere los efectos metabólicos de la insulina. Numerosas y complejas vías patogénicas vinculan la obesidad con el desarrollo de RI, incluyendo inflamación crónica, disfunción mitocondrial (con la producción asociada de especies reactivas de oxígeno y estrés del retículo endoplasmático), disbiosis de la microbiota intestinal y remodelación de la matriz extracelular adiposa [6]. El desarrollo de la RI está determinado por los hábitos nutricionales, el estilo de vida y el estado de actividad física de los individuos. Se ha demostrado que una dieta sana y equilibrada mejora la homeostasis de la glucosa y la insulina [7].

La obesidad es una enfermedad multifactorial que implica interacciones entre factores hormonales, genéticos y ambientales que aumentan la adiposidad o grasa y es considerado como un factor de riesgo de complicaciones graves en la COVID-19, evidente por las tasas de hospitalización y mortalidad [8].

Los pacientes se vuelven particularmente resistentes a la insulina durante el curso de la infección por COVID-19, debido a esto, las personas ingresadas a hospitales requieren una mayor cantidad de insulina, alcanzando dosis superiores a las 100 U/día debido a los excesivos niveles de citoquinas proinflamatorias. [9]. Las personas con RI tienen una actividad reducida de las células asesinas naturales, lo que podría hacerlos más susceptibles a COVID-19 más grave [10]. En este sentido, la detección temprana de la RI es primordial para evitar complicaciones en la salud. La resistencia a la insulina y el control alterado de la glucemia debido a la COVID-19 han sido problemas importantes en el manejo de pacientes diabéticos con hiperglucemia cuando ingresan con neumonía por COVID-19 [11].

El índice de resistencia a la insulina más utilizado es el modelo de evaluación de la homeostasis de la resistencia a la insulina (HOMA-IR), sin embargo, se ha sugerido que el índice de triglicéridos-glucosa

(TyG) es un índice alternativo fiable [12]. A diferencia de los métodos tradicionales de evaluación de RI, como la técnica de pinza hiperinsulinémica-euglucémica y la evaluación del modelo de homeostasis para RI, el índice TyG es accesible para cualquier laboratorio clínico básico, funcionando de manera similar al HOMA-IR [13]. En este contexto, el objetivo de este trabajo fue determinar la resistencia a la insulina utilizando el índice TyG, observando su evolución durante los periodos de 2017 a 2019 como etapa prepandemia y de 2020 a 2023 como etapa pandemia. Un índice TyG elevado puede aumentar la incidencia de enfermedad renal crónica entre los adultos con enfermedad renal crónica grave, en particular entre los más jóvenes. La intervención temprana puede ayudar a reducir la incidencia de enfermedad renal crónica [14].

2. Metodología Experimental

2.1 Población de estudio

Este estudio se realizó con los datos obtenidos de estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco pertenecientes a las Divisiones de DACB, DAIA, DACYTI y DAMJM, de 2017 a 2019 como etapa prepandemia y de 2020 a 2022 como etapa pandemia. Los datos de los participantes que acudieron al Laboratorio Clínico de Ciencias Básicas de la División Académica de Ciencias Básicas (DACB) fueron recolectados y clasificados, por su Índice de Masa Corporal (IMC) conforme a los criterios de la OMS: normopeso (< 24.99), sobrepeso (25.00 a 29.99) y obesidad (≥ 30.00). La fórmula utilizada para la obtención del IMC fue: peso (kg)/estatura² (m²) [15]. El ensayo se llevó a cabo siguiendo los principios éticos de la Declaración de Helsinki de 1975, revisada en 1983, y se ajustó a las Directrices de Buena Práctica Clínica.

2.2 Tipo de estudio:

Se realizó un estudio transversal analítico, en el que se recolectaron datos de 6,318 individuos. Los datos recolectados fueron: talla (cm), peso (kg), glucosa (mg/dL), colesterol (mg/dL) y triglicéridos (mg/dL).

2.3 Determinación del índice TyG

El índice TyG se calculó como el logaritmo natural (Ln) del producto de glucosa y triglicéridos entre dos de acuerdo con la fórmula: $\text{Ln} (\text{Triglicéridos [mg/dL]} \times \text{glucosa [mg/dL]}/2)$ [16].

2.4 Análisis estadístico

El análisis estadístico se realizó en programa Prism 5.0. Los datos se expresaron como la media $\pm$ desviación estándar. La comparación intergrupar se realizó con una prueba de ANOVA y una *t* de Student. Los resultados se consideraron estadísticamente significativos con un valor de $p \leq 0.05$.

3. Resultados

En la Tabla 1 se presentan los resultados de las características clínicas de los participantes en ambos periodos. La edad media fue de 18 años y el IMC promedio de 25.62. Según la OMS [15], un IMC superior a 25 clasifica a las personas en sobrepeso, lo que indica que la población de este estudio tiene sobrepeso.

La circunferencia abdominal (CA) es otro indicador relevante para la detección de la obesidad. La Secretaría de Salud (SSA) [17] establece como valor normal para hombres ≤ 90 cm y para mujeres ≤ 80 cm. En este estudio son las mujeres, en ambos periodos, las que promedian 82.7 cm. Con base en esto, se ha reportado que la obesidad abdominal se asocia con el deterioro de la ventilación en la base de los pulmones, la disminución de la saturación de oxígeno de la sangre y la secreción anormal de citoquinas y adipocinas. Estas condiciones pueden afectar la respuesta inmunitaria y tener efectos adversos en el parénquima pulmonar y los bronquios [18].

Los promedios de los niveles de la glucosa y colesterol de los participantes de este estudio se encuentran dentro de los rangos normales, de acuerdo con la NOM-037-SSA2-2012 (triglicéridos ≤ 150 mg/dL, glucosa ≤ 100 mg/dL y colesterol total ≤ 200 mg/dL) [19]. Sin embargo, durante el periodo de pre-pandemia, el valor medio de los triglicéridos en hombres fue mayor que en el periodo de pandemia (Tabla 1).

Tabla 1. Características clínicas en los periodos de prepandemia y pandemia en jóvenes universitarios.

	<i>Prepandemia</i> 2017-2019 n=4,569		<i>Pandemia</i> 2020-2022 n=1,751	
	M	F	M	F
Sexo				
Edad (Años)	18 $\pm$ 1.93	18 $\pm$ 1.46	18 $\pm$ 1.46	18 $\pm$ 1.09
Talla (cm)	1.7 $\pm$ 0.06	1.57 $\pm$ 0.06	1.7 $\pm$ 0.06	1.6 $\pm$ 0.05
Peso (Kg)	73.5 $\pm$ 16.58	62.6 $\pm$ 14.49	75.4 $\pm$ 18.69	62.3 $\pm$ 14.90
CA (cm)	87.8 $\pm$ 12.51	82.09 $\pm$ 11.29	89.7 $\pm$ 15.89	83.3 $\pm$ 17.08
IMC (Kg/m²)	25.7 $\pm$ 5.26	25.2 $\pm$ 5.23	26.4 $\pm$ 5.98	25.2 $\pm$ 5.39
Glucosa (mg/dL)	94.8 $\pm$ 15.16	90.9 $\pm$ 12.04	94.5 $\pm$ 10.88	92.9 $\pm$ 19.28
Colesterol(mg/dL)	156.6 $\pm$ 40.96	156.3 $\pm$ 33.72	162.1 $\pm$ 34.58	163.4 $\pm$ 37.65
Triglicéridos(mg/dL)	*116.7 $\pm$ 86.43	95.2 $\pm$ 53.78	109.8 $\pm$ 95.29	94.8 $\pm$ 73.02
M=Masculino; F=Femenino. Los datos son representados como los promedios $\pm$ desviación estándar. * Se realizó la prueba de <i>t</i> de Student con <i>p</i> valor < 0.05, Prepandemia vs Pandemia.				

En la Tabla 2 se observa que, en el grupo de prepandemia, la prevalencia de sobrepeso-obesidad fue de 46.59% y en el caso de la pandemia fue del 50.42%, lo que implica un incremento de 3.82%. Estos resultados en ambos periodos son superiores al 41.1% de sobrepeso-obesidad reportado en la Encuesta Nacional de Salud y Nutricional (ENSANUT) en el año 2022 [20]. Sin embargo, se destaca un aumento en la prevalencia de obesidad en el periodo de pandemia, lo cual puede asociarse a los cambios en el estilo de vida provocados por el confinamiento, donde muchas familias experimentaron inseguridad alimenticia [21]. Datos preliminares de COVID-19, procedentes de Wuhan (China), detectaron que, entre los pacientes críticos fallecidos, el 88.24% presentaban un IMC > 25 kg/m² respecto al 18.95% de los supervivientes [22]. Esta información sugiere que la resistencia a la insulina puede estar relacionada con un mayor riesgo de contraer SARS-CoV-2 [23,24].

En la Tabla 3 se evaluó la resistencia a la insulina en los participantes. El índice TyG mostró un promedio de 4.65 en el grupo de sobrepeso-obesidad en el periodo de prepandemia (4.69 para hombres y 4.56 para mujeres) y un promedio de 4.6 durante la pandemia (4.63 para hombres y 4.56 para mujeres).

Investigaciones realizadas en personas de 19 años determinaron valores de corte para la resistencia a la insulina del índice TyG ≥ 4.55 para mujeres y ≥ 4.68 para hombres [25,26]. En comparación con nuestros resultados, se observa que el grupo de obesidad en ambos sexos y periodos presentan resistencia a la insulina. Aunque se evidencia una disminución en el índice TyG durante la pandemia en los hombres con obesidad, permanecen en resistencia a la insulina. Otros estudios reportan que en personas de 15 años se registra un índice TyG de 4.56 [27] y de 4.75 en individuos de 43 años [28], lo que denota un aumento del índice asociado a la edad. En este contexto, resulta primordial abordar la búsqueda de herramientas para la prevención, diagnóstico y control del desarrollo de resistencia a la insulina en personas con sobrepeso y obesidad dentro de la comunidad universitaria.

En 2020, se lanzó una campaña llamada “Corta por lo Sano” impulsada por la Alianza por la Salud Alimentaria, con el objetivo de reducir el alto consumo de bebidas y alimentos con excesos de azúcares, grasas saturadas, sodio y calorías, al tiempo que se promovía un mayor consumo de alimentos naturales. Esta iniciativa buscó combatir la obesidad y la diabetes, y fortalecer a las personas frente al COVID-19 [29]. En julio del 2020, a través de la plataforma U-Report, se realizó una encuesta para evaluar los hábitos alimenticios de los jóvenes durante el confinamiento, revelando un aumento en el consumo de bebidas azucaradas y alimentos poco saludables [30]. Posteriormente, después del levantamiento del confinamiento, se invitó a diferentes escuelas a diseñar rutinas de actividades físicas y hábitos alimenticios para mitigar las consecuencias de dicho encierro, lo que resultó en un incremento de las cifras de sobrepeso-obesidad (75%) y diabetes (14%) [31]. En comparación, los resultados obtenidos indican un promedio del 46.59% para sobrepeso-obesidad en la etapa de prepandemia y frente al 50.42% registrado durante la etapa de pandemia, lo que refleja un comportamiento similar reportado en el estudio previo. A principios del año 2023, la Secretaría de Salud de la Ciudad de México (SEDESA), lanzó una campaña titulada “Salud en tu Vida, Salud para el Bienestar”, que busca fomentar en los jóvenes una alimentación adecuada y la práctica de actividades físicas, con la finalidad de prevenir enfermedades asociadas con el sobrepeso-obesidad [32]. En consecuencia, resulta fundamental continuar realizando investigaciones que contribuyan a mejorar la prevención de estos problemas de salud y permitan evaluar el impacto de las diversas campañas en la población.

Tabla 2. Prevalencia de sobrepeso-obesidad en los periodos de prepandemia y pandemia en jóvenes universitarios.

<i>Sexo</i>	<i>Prepandemia</i> 2017-2019 n=4569		<i>Pandemia</i> 2020-2022 n=1,751	
	M	F	M	F
NP	52.15%, n=1,631	56.1%, n=809	47.32%, n=557	54.18%, n=311
SP	29.64%, n=927	26.9%, n=388	28.54%, n=336	29.26%, n=168
OB	18.19%, n=569	16.99%, n=245	24.12%, n=284	16.55%, n=95

NP=Normopeso; SP=Sobrepeso; OB=Obesidad; M=Masculino; F=Femenino. Se realizó la prueba de χ^2 .

Tabla 3. Determinación de la RI por el índice de TyG en los periodos de prepandemia y pandemia en jóvenes universitarios.

<i>Sexo</i>	<i>Prepandemia</i> 2017-2019 n=4,569		<i>Pandemia</i> 2020-2022 n=1,751	
	M	F	M	F
NP	4.46 ±0.25 ⁺	4.40 ±0.23 ⁺	4.43 ±0.22 ⁺	4.39 ±0.21 ⁺
SP	4.60 ±0.28 ⁺⁺	4.54 ±0.23 ⁺⁺	4.57 ±0.24 ⁺⁺	4.53 ±0.25 ⁺⁺
OB	4.75 ±0.31 ⁺⁺⁺	4.59 ±0.26 ⁺⁺⁺	*4.69 ±0.29 ⁺⁺⁺	4.59 ±0.26 ⁺⁺⁺

NP= Normopesó; SP=Sobrepeso; OB=Obesidad; M=Masculino; F=Femenino. *Se realizó la prueba de *t* de Student (Prepandemia vs Pandemia) y ANOVA (⁺ NP vs SP, ⁺⁺SP vs OB, ⁺⁺⁺NP vs OB) con *p* valor < 0.05. De acuerdo Guerrero-Romero et al., valores de RI del Índice TyG ≥4.55 para mujeres y ≥4.68 para hombres [25].

4. Conclusiones

El índice TyG permite evaluar la resistencia a la insulina en laboratorios clínicos básicos y se ha observado que este índice aumenta con el IMC. Durante la pandemia, la prevalencia de sobrepeso y obesidad ha incrementado, sugiriendo un aumento en personas con resistencia a la insulina. Aunque los datos muestran una disminución de esta resistencia en hombres, los valores siguen indicando problemas en ambos sexos, lo que genera preocupación por la vulnerabilidad de un segmento de la población a complicaciones graves por SARS-CoV-2.

5. Conflicto de Intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

6. Declaratoria del uso de Inteligencia Artificial.

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

7. Resumen Grafico

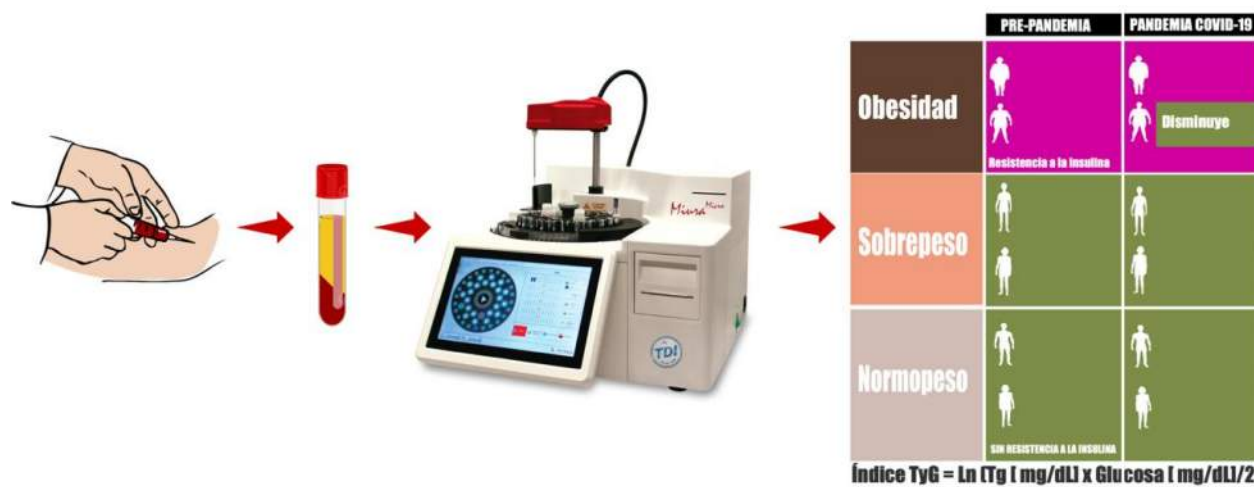


Figura 1. Determinación de la resistencia a la insulina mediante el índice TyG en jóvenes universitarios de la Unidad Chontalpa en el periodo prepandemia y pandemia COVID-19.

8. Referencias

- [1] ES. Lozano, “Resistencia a Insulina: Revisión de literatura”, *Revista Médica Hondureña*, vol. 90, núm. 1, págs. 63–70, junio de 2022, doi: 10.5377/rmh.v90i1.13824.
- [2] L. Norton, C. Shannon, A. Gastaldelli y RA DeFronzo, “Insulina: el regulador maestro del metabolismo de la glucosa”, *Metabolism*, vol. 129, pág. 155142, enero de 2022, doi: 10.1016/j.metabol.2022.155142.
- [3] S.-H. Lee, S.-Y. Park y CS. Choi, “Resistencia a la insulina: de los mecanismos a las estrategias terapéuticas”, *Diabetes & Metabolism Journal*, vol. 46, n.º 1, págs. 15–37, diciembre de 2021, doi: 10.4093/dmj.2021.0280.
- [4] S. Whillier, “Ejercicio y resistencia a la insulina”, *Advances in Experimental Medicine and Biology*, págs. 137–150, enero de 2020, doi: 10.1007/978-981-15-1792-1_9.
- [5] M. Del Cisne Narvaez Ramos, RS. Rmos y HFO. Castillo, “Resistencia a la insulina en adultos con sobrepeso y obesidad”, *REVISTA EUGENIO ESPEJO*, vol. 18, núm. 2, págs. 18–33, mayo de 2024, doi: 10.37135/ee.04.20.03.
- [6] TM. Barber, I. Kyrou, H. S. Randeva, y MO. Weickert, “Mechanisms of Insulin Resistance at the Crossroad of Obesity with Associated Metabolic Abnormalities and Cognitive Dysfunction”, *International journal of molecular sciences*, vol 22, pp 546, 2021, <https://doi.org/10.3390/ijms22020546>.
- [7] Z. Caferoglu, B. Erdal, N. Hatipoglu y S. Kurtoglu, “Los efectos de la calidad de la dieta y la carga ácida de la dieta sobre la resistencia a la insulina en niños y adolescentes con sobrepeso”, *Endocrinología Diabetes Y Nutrición (Ed. inglesa)*, vol. 69, núm. 6, pp. 426–432, jun. 2022, doi: 10.1016/j.endien.2022.06.001.
- [8] A. Anand, R. Kumar y N. Shalimar, “Obesidad y mortalidad en COVID-19: ¿causa o asociación?”, *Gastroenterology*, vol. 164, núm. 7, págs. 1351–1352, sep. 2020, doi: 10.1053/j.gastro.2020.08.055.
- [9] L. Wu, CM. Girgis y NW. Cheung, “COVID-19 y diabetes: los requerimientos de insulina son paralelos a la gravedad de la enfermedad en pacientes gravemente enfermos”, *Clinical Endocrinology*, vol. 93, n.º 4, págs. 390–393, julio de 2020, doi: 10.1111/cen.1428.
- [10] JM. De Miguel-Yanes *et al.*, “Impacto de la diabetes mellitus tipo 2 en la incidencia y evolución de la COVID-19 Necesidad de ingreso hospitalario según SEXO: Estudio de cohorte retrospectivo utilizando

datos de altas hospitalarias en España, año 2020”, *Journal of Clinical Medicine*, vol. 11, no. 9, p. 2654, mayo 2022, doi: 10.3390/jcm11092654.

[11] EV. Manoharan, NK. Sridharan, B. Kesavan, GA. Andrews, GS. Venkatesan y P. Kesavan, “Neumonía por COVID-19 y aumento del requerimiento de insulina en pacientes diabéticos conocidos: un estudio observacional prospectivo”, *Cureus*, diciembre de 2023, doi: 10.7759/cureus.50239.

[12] D.-H. Son, HS. Lee, Y.-J. Lee, J.-H. Lee y J.-H. Han, “Comparación del índice de triglicéridos-glucosa y HOMA-IR para predecir la prevalencia e incidencia del síndrome metabólico”, *Nutrition Metabolism and Cardiovascular Diseases*, vol. 32, n.º 3, págs. 596–604, diciembre de 2021, doi: 10.1016/j.numecd.2021.11.017.

[13] Q. Zhang, S. Xiao, X. Jiao y Y. Shen, “El índice triglicéridos-glucosa es un predictor de mortalidad cardiovascular y por todas las causas en pacientes con ECV y diabetes o prediabetes: evidencia de NHANES 2001-2018”, *Cardiovascular Diabetology*, vol. 22, n.º 1, octubre de 2023, doi: 10.1186/s12933-023-02030-z.

[14] S. Wei *et al.*, “Correlación entre el índice de triglicéridos-glucosa y la enfermedad renal crónica entre adultos con enfermedad del hígado graso asociada al metabolismo: seguimiento de catorce años”, *Frontiers in Endocrinology*, vol. 15, mayo de 2024, doi: 10.3389/fendo.2024.1400448.

[15] OMS, “Obesidad y sobrepeso”, *Organización Mundial de la Salud*, 01 de marzo de 2024, <https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/obesity-and-overweight>.

[16] J. Alizargar, N.-C. Hsieh y S.-FV Wu, “La fórmula correcta para calcular el índice de triglicéridos-glucosa (TyG)”, *Journal of Pediatric Endocrinology and Metabolism*, vol. 33, núm. 7, págs. 945–946, julio de 2020, doi: 10.1515/jpem-2019-0579.

[17] SSA, “Indicadores de sobrepeso y obesidad”, *Secretaría de Salud del Gobierno de México*, julio de 2016, <https://www.gob.mx/salud/articulos/indicadores-de-sobrepeso-y-obesidad?idiom=es>.

[18] CBR. Orlando, “Generalidades sobre las consecuencias del sobrepeso corporal y de la obesidad en la salud”, *Rev cubana Endocrinol*, vol 31, n.º 1, abril de 2020, http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1561-29532020000100001&lng=es&tlng=es.

[19] “Norma Oficial Mexicana NOM-037-SSA2-2012: Para la prevención, tratamiento y control de las dislipidemias”. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0188-21982012000300001#:~:text=Esta%20Norma%20Oficial%20Mexicana%20tiene,perif%C3%A9rica%2C%20adem%C3%A1s%20de%20brindar%20una

[20] T. Shamah-Levy *et al.*, “Prevalencias de sobrepeso y obesidad en la población escolar y adolescente de México. Ensanut Continua 2020-2022”, *Salud Pública De México*, vol. 65, págs. s218-s224, junio de 2023, doi: 10.21149/14762.

[21] S. Rodríguez-Ramírez, EB Gaona-Pineda, B. Martínez-Tapia, M. Romero-Martínez, V. Mundo-Rosas, and T. Shamah-Levy, “Inseguridad alimentaria y percepción de cambios en la alimentación en hogares mexicanos durante el confinamiento por la pandemia de Covid-19”, *Salud Pública De México*, vol. 63, núm. 6, noviembre-dic, págs. 763–772, noviembre de 2021, doi: 10.21149/12790.

[22] Y. Peng *et al.*, “[Características clínicas y resultados de 112 pacientes con enfermedad cardiovascular infectados por 2019-nCoV],” *Chinese Journal of Cardiovascular Diseases*, vol. 48, núm. 6, págs. 450–455, marzo de 2020, doi: 10.3760/cma.j.cn112148-20200220-00105.

[23] CR. Eduardo, CD. Ileana y DD. Oscar, “COVID-19: Importancia de la resistencia a la insulina en la respuesta a la terapia antiviral con interferón”, *Rev cubana Endocrinol*, vol 31, n.º 2, noviembre de 2020, http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1561-29532020000200008&lng=es&nrm=iso

[24] AP. Stoian, Y. Banerjee, AA. Rizvi y M. Rizzo, “Diabetes y la pandemia de COVID-19: cómo los conocimientos adquiridos a partir de experiencias recientes podrían orientar el tratamiento futuro”,

Metabolic Syndrome and Related Disorders, vol. 18, n.º 4, págs. 173-175, abril de 2020, doi: 10.1089/met.2020.0037.

[25] F. Guerrero-Romero *et al.*, “Triglicéridos en ayunas e índice de glucosa como prueba diagnóstica para resistencia a la insulina en adultos jóvenes”, *Archives of Medical Research*, vol. 47, núm. 5, págs. 382–387, julio de 2016, doi: 10.1016/j.arcmed.2016.08.012.

[26] M. Vega-Cárdenas *et al.*, “Distribución del índice TyG y evaluación del modelo de homeostasis de la resistencia a la insulina para la evaluación de la sensibilidad a la insulina en la adolescencia tardía en mexicanos”, *Nutrición Hospitalaria*, enero de 2022, doi: 10.20960/nh.04120.

[27] JC. Locateli *et al.*, “El índice triglicéridos/glucosa es un marcador alternativo confiable para la resistencia a la insulina en niños y adolescentes sudamericanos con sobrepeso y obesidad”, *Journal of Pediatric Endocrinology and Metabolism*, vol. 32, núm. 10, págs. 1163–1170, agosto de 2019, doi: 10.1515/jpem-2019-0037.

[28] L.-K. Er *et al.*, “El índice de masa corporal-glucosa-triglicéridos es un marcador sustituto simple y clínicamente útil para la resistencia a la insulina en individuos no diabéticos”, *PLoS ONE*, vol. 11, n.º 3, pág. e0149731, marzo de 2016, doi: 10.1371/journal.pone.0149731.

[29] Alianza por la salud alimentaria. “Corta por lo sano”, *Etiquetados Claros*, febrero de 2024, <https://etiquetadosclaros.org/campanas/corta-por-lo-sano/>

[30] K. León, y JP Arguello *et al.*, “Efectos de la pandemia por la COVID-19 en la nutrición y actividad física de adolescentes y jóvenes”, *UNICEF*, julio de 2020, <https://www.unicef.org/lac/efectos-de-la-pandemia-por-la-covid-19-en-la-nutricion-y-actividad-fisica-de-adolescentes-y-jovenes>

[31] Conahcyt, “COVID-19, OBESIDAD y ENFERMEDADES CRÓNICAS EN MÉXICO”, *Conahcyt*, septiembre de 2021, <https://conahcyt.mx/covid-19-obesidad-y-enfermedades-cronicas-en-mexico/>.

[32] SEDESA, “12.ene.2023 presenta SEDESA campaña de 'salud en tu vida, salud para el bienestar' en redes sociales”, *Secretaría De Salud De La Ciudad De México*, enero de 2023, <https://www.salud.cdmx.gob.mx/boletines/12ene2023-presenta-sedesa-campana-de-salud-en-tu-vida-salud-para-el-bienestar-en-redes-sociales>.

Relationship between risk factors and prevalence of Chagas disease in young people in Tabasco, Mexico

Alejandro-Castillo H.A.¹, González-Garrido J.A.^{1,2} , López-Victorio C.J.^{1,2} , Zenteno-Galindo E.³ , Escobar-Ramírez A.^{1,2*} 

¹Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Ciencias Básicas, Cunduacán, Tabasco, México.
Cuerpo Académico: UJAT-CA-292 Bioquímica y Biología Molecular, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán, Tabasco, México.

²Red de investigación: RI-0012-2024 Bioquímica y Biología Molecular, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán, Tabasco, México.

³Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Medicina, Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México.

*adelma.escobar@ujat.mx

Resumen

La tripanosomiasis americana o enfermedad de Chagas es ocasionada por el parásito *Trypanosoma cruzi*; tiene síntomas sólo en estado crónico. Actualmente, no existen medidas de prevención temprana. El presente trabajo se centra en identificar las causas o factores de riesgo para prevenir esta enfermedad en población joven. Se aplicó una encuesta sobre factores de riesgo a una población de 517 estudiantes, se tomaron muestras de sangre para frotis sanguíneo, gota gruesa y ensayo de Hemaglutinación Indirecta (HAI). Se identificó que 52% de estudiantes tiene mascotas, 92% casa de cemento, el 4 % casa con techo de palma y 1% tiene casa de adobe. Posteriormente el 10% presentó recuento elevado de eosinófilos en frotis de sangre, y no se identificó forma parasitaria alguna en frotis de sangre y gota gruesa. Además, no se obtuvieron muestras positivas del ensayo de Hemaglutinación Indirecta (HAI), con muestras elevadas en eosinófilos y factores de riesgo. En conclusión, de 517 estudiantes encuestados, 52% tenía mascotas, 4% vivía en casas con techos de palma y 1% residía en casas de adobe. A pesar de tener contacto con mascotas o vivir en casas con techos de palma o casas de adobe hábitat, de triatominos, los frotis de sangre y gotas gruesas no mostraron la presencia de tripomastigotes. Además, ninguna de las 80 muestras de suero evaluadas en el ensayo de hemaglutinación indirecta (HAI) arrojó resultados positivos. Esto sugiere que no hay relación entre los factores de riesgo y la prevalencia de la enfermedad de Chagas en jóvenes.

Palabras claves: *Trypanosoma cruzi*, enfermedad de chagas, factores de riesgo para enfermedad de Chagas.

Abstract

American trypanosomiasis, or **Chagas disease**, is caused by the parasite *Trypanosoma cruzi* and presents symptoms only in its chronic stage. Currently, there are no early prevention measures. This study focuses on identifying the causes or risk factors to help prevent this disease in young populations. A survey on risk factors was conducted among a population of 517 students. Blood samples were taken for blood smear, thick drop, and Indirect Hemagglutination Assay (IHA). It was found that 52% of the students have pets, 92% live in cement houses, 4% in houses with palm roofs, and 1% in adobe houses. Subsequently, 10% showed elevated eosinophil counts in the blood smear, and no parasitic forms were identified in the blood smear or thick drop. In addition, no positive samples were obtained in the Indirect Hemagglutination Assay (IHA), even among those with elevated eosinophils and risk factors. In conclusion, among the 517 students surveyed, 52% had pets, 4% lived in houses with palm

roofs, and 1% resided in adobe houses. Despite contact with pets or living in houses with palm roofs or adobe walls habitats for triatomines the blood smears and thick drops, no showed presence of trypomastigotes. Furthermore, none of the 80 serum samples tested in the IHA yielded positive results. This suggests that there is no relationship between the risk factors and the prevalence of Chagas disease in young people.

Keywords: *Trypanosoma cruzi*, Chagas disease, risk factors for Chagas disease.

Recibido: 04 de noviembre de 2024, Aceptado: 28 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introduction

American trypanosomiasis or Chagas disease is a fatal disease caused by the parasite *Trypanosoma cruzi*, a flagellated protozoan found in armadillos, marsupials, rodents, bats, and wild primates, as well as in certain domestic animals, such as dogs, cats, and even rats [1], [2]. Zoonotic diseases, primarily restricted to wild animals, become zoonoses when they manage to infect humans and domestic animals, integrating them into the transmission chain [3]. Triatomines thrive in environments characterized by warm and humid climates. In Mexico, there are 32 distinct species of triatomines. The detection of various vector species has revealed several transmission routes, varying depending on the state [4]. Over the past decade, the state of Tabasco, Mexico, has registered 129 transmission routes, with an average of 13 events annually, mainly in rural and marginalized areas. Only 3% of urban and peri-urban areas are in precarious conditions. Currently, this disease is recognized in 13 of the 17 municipalities of the state of Tabasco [5]. Most of the state of Tabasco (95.5%) has a warm-humid environment ideal for triatomines [6]. Likewise, industrial development in rural areas has favored the movement of triatomines towards inhabited areas, allowing them to take refuge in precarious dwellings. These conditions not only sustain their survival but also serve as reservoirs for the triatomines [7], [8].

1.1 Life cycle

T. cruzi is a protozoan, infects vertebrate and invertebrate hosts. Via a primary vector (triatomine), ingesting circulating trypomastigotes into the bloodstream of an infected mammalian host. In the midgut of the vector, the trypomastigotes are transformed via an intermediate form known as spheromastigote, which subsequently transform into epimastigotes, which represent the main replication stage in the invertebrate host [9].

Epimastigotes migrate to the vector's upper intestine and transform into infective metacyclic trypomastigotes, which are then excreted through the vector's feces⁹. In the human host, metacyclic trypomastigotes enter through the wound generated by the itching sensation at the insect's bite site [10], [11]. Subsequently, the trypomastigotes replicate within the cell and become modified to the intracellular amastigote form. There they reproduce within 12 hours for 4 to 5 days and, finally, transform into trypomastigotes¹². Then, the host cell ruptures and the trypomastigotes are released into the circulation. The circulating parasites invade new cells to initiate new replication cycles and become available to infect vectors that feed on the host (Fig. 1) [12].

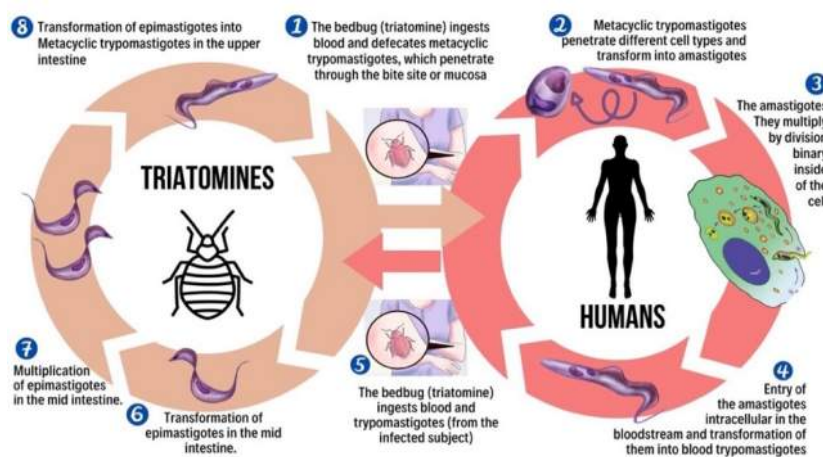


Figure 1. Life cycle of *Trypanosoma cruzi*.

In the present investigation, the risk factors related to Chagas disease in a student population from the Academic Division of Basic Sciences (DACB) at the Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT) were identified using a survey. We evaluated the parasitic forms present in the blood using blood smears and the thick drop technique, as the stage of the disease (acute or chronic) was unknown for the students. Additionally, the indirect hemagglutination assay technique was employed to corroborate and validate our results.

2. Methods

A survey was conducted among students at DACB-UJAT. The sampling method employed was non-probabilistic, and the sample comprised 517 individuals aged between 18 and 30 years. The questionnaire was based on the knowledge on Chaga's disease and/or being affected by the disease to define the risk factors present in the households; the survey covered a total of 14 items. Personal information about the subject, housing conditions, living with animals, family history of Chagas infection, transfusions, organ transplants, and place of origin were requested (supplementary material 1).

The questionnaire had three sections. Section 1 assessed risk factors, where personal data, construction material of the dwelling were analyzed (Supplementary material 1). Clinical, epidemiological, and family data were considered to assess the subject's health status, level of exposure, and risk of Chagas disease. Section 2 corresponded to epidemiological and family data. Section 3 comprised knowledge of the disease (supplementary material 1).

The informed consent was obtained from the subjects participating in the study, in accordance with the "Ethical Principles for Medical Research Involving Human Subjects", in accordance with the principles of Declaration of Helsinki, 1964, as revised in 1975, 1983, 1989, 1996 and 2000, and the research protocol was reviewed by the Ethics Committee of the Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Mexico.

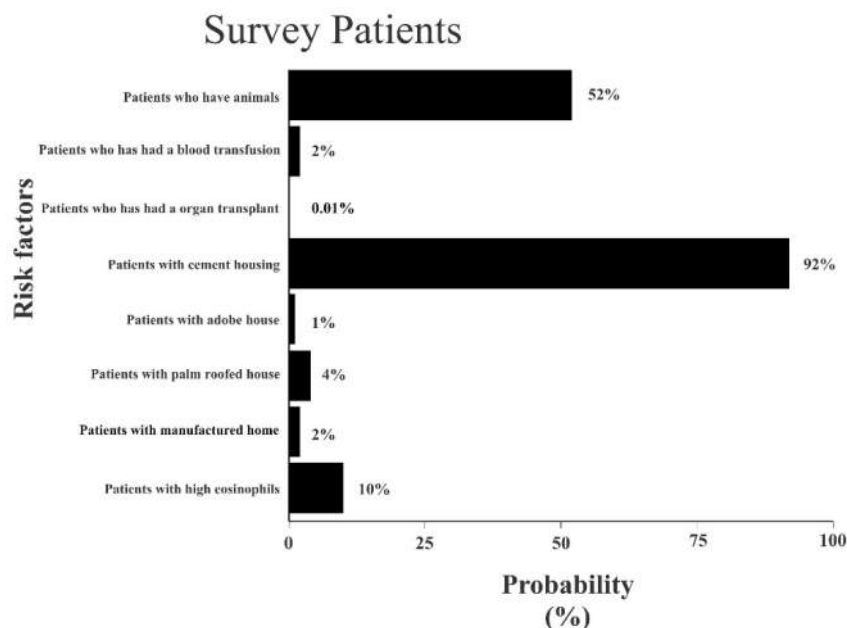
To identify the presence of the free form of the parasite, an aliquot of blood obtained by venous puncture with EDTA was taken. A smear was made using the two-slide method, allowing the sample to dry, which was fixed with 100% methanol for 5 min. Subsequently, Giemsa staining was performed, and the samples were observed under the light microscope at 40X and 100X. The thick drop smear was conducted to assess the presence of the intracellular form of the parasite (trypomastigote), spread in a circular fashion from the

corner of the slide to cause cell lysis. To identify antibodies (Ac) against *T. cruzi*, an aliquot of serum was taken. The Wiener Chaga test HAI test was used. The kit provides positive and negative controls, sensitized erythrocytes; and U-bottom polycubes not provided, Chaga test HAI, 1293205, Wiener lab.

This test is used to verify the presence of Ac against *T. cruzi* in the subject's serum that reacted with the antigen (Ag) (freeze-dried ram red blood cells sensitized with cytoplasmic antigens of *T. cruzi*), using indirect hemagglutination, considering that proteins adsorb on the surface of ram red blood cells, which act as carriers for the Ag. If antibodies against *T. cruzi* are present in the serum, and mantle, corresponding to hemagglutination, will be formed; if they are not present, the red blood cells precipitate.

3. Results

The average age of the subjects was 18 years, and they were grouped according to the risk factors to which they were exposed. Most of the subjects had more than one risk factor, thus, each subject was considered in the corresponding group. The results showed that 92% of the analyzed subjects lived in a house made of concrete, 52% lived with animals, 4% lived in a house with a palm roof, 1% in an adobe house, 2% have manufactured house and of the latter, 0.01% had received transplants or transfusions, and 2% blood transfusion (Graph 1).



Graph. 1. It shows the percentage of young people who presented risk factors out of the total of 517.

The thick drop test did not reveal the presence of circulating trypomastigote in the blood, considering that this test allows to detect the parasites in their intracellular form. Blood smears allowed to select 54 subjects (10.45%), who showed eosinophil content in their differential analysis. Among them, 10.06% displayed a content exceeding the reference value of > 4 . Only 0.39% demonstrated a concentration within the normal range (0-4%), while most of the population (89.55%) exhibited no eosinophil content.

The Chagas HAI test was used to assess 80 patients selected based on their exposure to risk factors and those who had previously exhibited elevated eosinophil levels. In all the samples and the negative control, a negative reaction was observed as a ring-shaped sediment. While a positive test should have exhibited

hemagglutination, this was only observed in the positive control provided by the test kit, figure 2. Notably, no antibodies to *T. cruzi* were detected in any of the examined subjects.

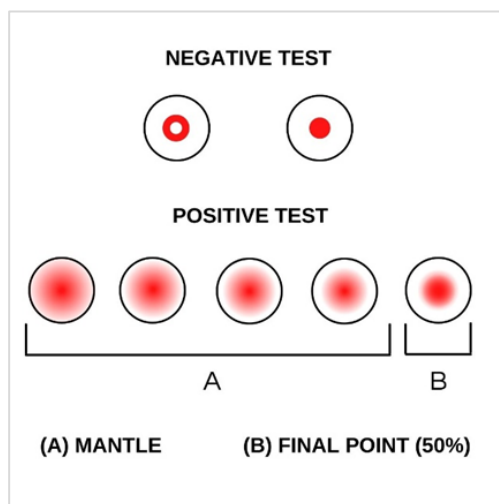


Figure 2. Show the interpretation of the Wiener Chaga test indirect hemagglutination test, in positive and/or negative cases.

In the contingency Table 1, a conditional probability calculation was performed for each of the risk factors analyzed. For the people that met any of the risk factors analyzed, a 0% probability of having Chagas disease occurred. The statistical analysis was performed, using Excel software, with the data obtained from the survey and blood tests, applying the calculation of the conditional probability for each of the risk factors considered in the study.

Table 1. Contingency table to analyze the risk factors by presenting Chagas disease.

Probably of having Chagas Disease		Chagas (+)	Chagas (-)	Total
Patient with high eosinophils	High eosinophils	$(1 \cdot 10^{-1}(0))$	0.1	0.1
	No high eosinophils	$(9 \cdot 10^{-1}(0))$	0.9	0.9
	Total	0	1	1
Patient with palm-roofed house	Adobe house	$(3.8 \cdot 10^{-2}(0))$	3.80E-02	3.80E-02
	No adobe house	$(9.6 \cdot 10^{-1}(0))$	9.60E-01	9.60E-01
	Total	0	1	1
Patients with cement house	Cement housing	$(7 \cdot 10^{-3}(0))$	7.00E-03	7.00E-03
	No cement housing	$(9.93 \cdot 10^{-3}(0))$	9.03E-01	9.03E-01
	Total	0	1	1
Patient with manufactured home	Manufactured home	0.03*0	0.93	0.93
	No manufactured home	0.97*0	0.07	0.07
	Total	0	1	1
Patient who have animals	Have animals	0.52*0	0.52	0.52
	Don't have animals	0.48*0	0.48	0.48
	Total	0	1	1
Patients who has had a blood transfusion	Blood transfusion	0.02*0	0.02	0.02
	No blood transfusion	0.98*0	0.98	0.98
	Total	0	1	1
Patient who has had on organ transplant	Organ transplant	0.01*0	0.01	0.01
	No organ transplant	0.99*0	0.99	0.99
	Total	0	1	1

The following equation (Eq. 1) was applied to data treatment, as well as to the contingency table (Table 1).

$$P = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{Eq. 1}).$$

4. Discussion

In America, Chagas disease is one of the 14 diseases of backwardness listed by the WHO [16, 17]. However, the increase in the number of positive cases in recent years, along the favorable environmental conditions of habitat for the triatomine species, and the permanent damage caused by *T. cruzi*, have prompted the evaluation of risk factors that are strongly implicated in the development of the disease [1].

Currently there is little information about the potential risk of acquiring *T. cruzi* infection. In this sense, promoting early prevention through knowledge of risk factors would prevent the patient from reaching the acute or chronic phase of the disease. Considering that Chagas disease is asymptomatic in the early stages. The risk factors on living conditions observed among the participants were: 4% had palm roofs, 1% had adobe house, at least 8% had non-concrete houses, 48% had no animals, 98% had not received any blood transfusion, and only 0.01% had received an organ transplant. It should be noted that these data indicated vulnerable subjects. However, Chagas disease was not confirmed in any of them. Despite 52% of participants showed cohabitation with animals, none of them exhibited positive results for parasitosis. Reyes, et al., in 2002, showed a 50% seroprevalence in dogs and of 20% in peridomestic animals [15], [16]. However, no further studies were performed to corroborate the presence of the disease.

Our study demonstrates that the absence of *T. cruzi* in individuals cohabiting with animals indicates that home infestation is not influenced by the presence of animals but rather by the hygienic and environmental conditions of the surroundings. The results of this study showed a lack of knowledge regarding the risk factors that lead to the existence of the disease in patients. Avila, in 1998, revealed the low level of knowledge in this regard in people from rural areas [17].

The immunological status of the subjects at this age was excellent in most, and its important underlying that in this age not studies had been realized, however, it could be convenient in the future to include more blocks of subjects of different ages.

This is important because, the chronic phase can occur up to 20 to 30 years after infection; in this period, the parasites become internalized in the tissues, mainly in the cardiac and digestive muscle, causing severe affectations and even death [11], [18], [19].

The findings related to lifestyle-related factors did not show significant prevalence, so the subjects' health level was evaluated, considering the concentration of eosinophils, a value that is linked to parasitic helminth infections when it is elevated [24]. Therefore, the blood smear was evaluated to confirm or rule out whether there was an association between the *T. cruzi* parasite and elevated eosinophils that would allow us to select positive samples.

The history of each participant was also analyzed to confirm or rule out any surgical procedure (transplant) and/or blood transfusion that could increase the risk of infection. According to Mexican regulations (NOM-253-SSA1-2012), all units of collected blood must be typed with the serological test against Chagas disease in a mandatory manner regardless of the type of procedure. This is essential for detecting markers of infectious agents transmissible through transfusion [19], [20].

In addition to the blood smear, the thick drop test was used to confirm the presence or absence of intracellular parasites [8], [21], [22]. The HAI serological method allowed evaluate the presence or absence of circulating antibodies in the serum of subjects against *T. cruzi* [8]. This test was used because it has a specificity of 95-98% and because it reveals the absence or presence in positive case of antibodies against *T. cruzi*, it was not necessary to use another type of confirmatory test [23], [24]. All blood samples selected confirmed the absence of *T. cruzi* parasites in the tested student population.

The calculation of the conditional probability allowed us to estimate how certain the assertion is that an event might take place; this value was used given that the data obtained in the survey were qualitative. Hence, our research sought to predict the percentage of risk that could compromise the subjects to generate a percentage estimate of the outcomes according to the level of exposure to each of the risk factors.

By corroborating this information with the tests performed, we obtained that the probability of undergoing Chagas disease was "0%" as well as the incidence level.

Based on the obtained results and existing literature, we believe that the timely detection of risk factors and early treatment would prevent the disease in 100% of the population [25]. Accordingly, we recommend the timely detection of risk factors., should be detected in a timely manner.

Expanding the number of subjects involved, as well as the different age ranges would allow in the future to evaluate the risk factors involved. This will help to prevent the disease and develop an adequate therapeutic follow-up to prevent reaching the chronic stage. Additionally, improving the quality of housing would control the domiciliary transmission of Chagas disease.

The relevance of our study lies in the type of data that were included to evaluate the risk factors and the tests used that allowed detecting the parasite in blood. The serological test confirmed our results and allowed us to demonstrate the presence or absence of the disease. Finally, given the diversity of triatomine species existing in Mexico, it is necessary to carry out more studies of this type to help prevent Chagas disease. This will help prevent patients from being diagnosed in chronic stages of the disease, when it is no longer feasible to find timely treatment[25]. The contribution of the results obtained in this study will allow the development of programs focused on the prevention and diagnosis of Chagas disease for the benefit of the population.

5. Conclusion

Chagas disease is a silent illness that can lead to the patient's death if not detected in time. It is caused by the intracellular parasite *Trypanosoma cruzi*.

Tabasco has a 95.5% warm-humid climate and is rich in flora and fauna, which creates favorable conditions for the survival of Triatomines, the vectors that transmit *Trypomastigotes* from an infected animal to another or to humans. In this context, the present research focused on studying the risk factors that could be important for the timely detection of parasitic forms that infect humans, thereby enabling the prevention of Chagas disease at an early stage.

The survey conducted on 517 patients showed that 52% had pets, 92% lived in cement houses, 4% lived in houses with palm roofs, 1% lived in adobe houses, 2% had manufactured homes, 0.01% had received transplants, and 2% had received blood transfusions.

Regarding the exploration of parasites in the blood, the thick drop test did not reveal the presence of trypomastigotes. It is worth mentioning that this test was performed because we did not know the stage the patients were in at the time of sampling.

The blood smear allowed for the selection of 54 patients, representing 10.45%, who showed the presence of eosinophils in their differential analysis. Of these, 10.06% showed eosinophil levels higher than the reference value ($>4\%$), only 0.36% had a concentration within the normal range (0-4%), and 89.55% showed no eosinophil content.

On the other hand, a total of 80 patients were also selected, those with significant exposure to risk factors and those with elevated eosinophil levels. The sera from these patients were subjected to the Chagas HAI Test. The indirect hemagglutination reaction was only observed in the positive control but not in the patients' sera, where only the precipitation of erythrocytes was observed, corresponding to a negative reaction, similar to that of the negative control.

Subsequently, Equation 1 was used to construct the contingency table with each of the analyzed risk factors to evaluate the conditional probability, which predicts the risk of developing or not developing the disease. The most significant risk factor was living with companion animals; however, it was not determinant for presenting Chagas disease. The fact that 92% of patients lived in cement houses reduced the risk of contact with triatomines and, consequently, the likelihood of contracting the disease.

On the other hand, the 4% of patients who lived in houses with palm roofs, where triatomines could potentially live, was also not a determining factor for developing the disease. The age of the surveyed patients was important in our study because, at the age range of 18 years, the immune system is very active. As a result, even if risk factors are present, the immune system's activity limits the occurrence of Chagas disease. A broader age range could help establish a stronger relationship between risk factors and the prevalence of Chagas disease in Tabasco in the future.

Conflicts of interest

"The author(s) declare(s) that there is no conflict of interest regarding the publication of this article".

Declaration of the use of artificial intelligence

The authors declare that they have not used any software application, web pages of generative artificial intelligence in the writing of the manuscript, in the design of tables and figures, nor in the analysis and interpretation of the data.

Funding statement

Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP) Project number UJAT-PTC-259

Acknowledgments

We would like to thank PhD. Aydé Mendoza-Oliva (UT Southwestern Medical Center, Dallas Tx, USA) for critical reading of this manuscript, to patients, Q.F.B Blanca E. Trejo Sánchez, and Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Division Académica de Ciencias Básicas for the facilities granted.

Supplementary materials

Annex 1. Questionnaire for the determination of risk factors in a young population. (Modified from [26]).

Graphical abstract

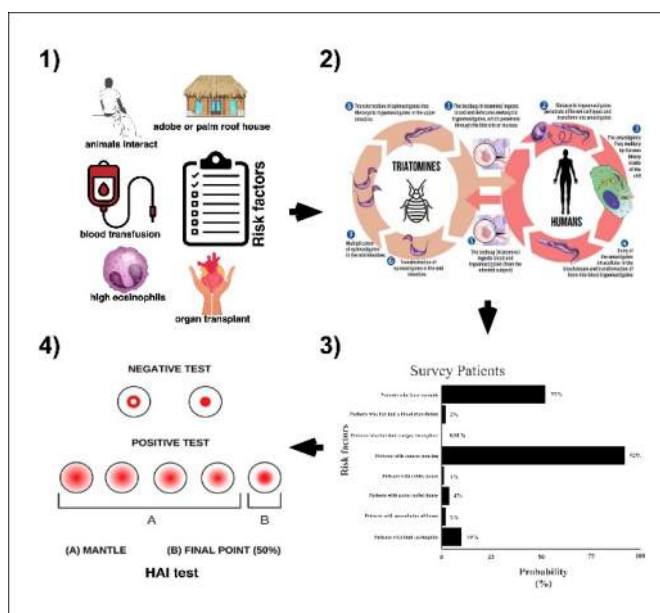


Figure 3. 1) Questionnaire for the determination of risk factors in young population, 2) biological cycle that show the infectives forms at the vector and humans 3) Graphics that show the percentage of risk factors in patients 4) Indirect Hemagglutinations Assay realized with serum of patients that confirm the non-existence of antibodies versus *Trypanosoma cruzi*.

6. References

- [1] A. A. Campos *et al.*, "Enfermedad de Chagas: vectores," *Ciencia - Academia Mexicana de Ciencias*, vol. 68, no. 1, pp. 30–33, 2017.
- [2] F. Ochoa-Cortes, M. M. Martinez-Morales, E. R. Franco-Hernandez, G. I. Hernandez-Hernandez, M. A. Hernandez-Bedolla, and A. Barajas-Espinosa, "Enfermedad de Chagas y Células Gliales Entéricas," *Ciencia Huasteca Boletín Científico de la Escuela Superior de Huejutla*, vol. 8, no. 16, pp. 40–51, Jul. 2020, doi: 10.29057/ESH.V8I16.5699.
- [3] D. Georgia Lucila Pelegrino Callis, I. Zoon Ana Bubaire Odio, I. C. Reinaldo Reyes Mediaceja III Rosa Delia Duconger Castellanos IV, P. Docente, C. Torres Restrepo, and S. de Cuba, "Reemergencia de la rabia animal a partir de 2007 en el municipio de Santiago de Cuba," *MEDISAN*, vol. 21, no. 8, pp. 978–986, 2017, Accessed: Sep. 01, 2024. [Online]. Available:

http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1029-30192017000800003&lng=es&nrm=iso&tlng=es

- [4] P. M. Salazar-Schettino *et al.*, “Revista de la Facultad de Medicina, Universidad Nacional Autónoma de México,” *Revista de la Facultad de Medicina (México)*, vol. 59, no. 3, pp. 6–16, 1959, Accessed: Sep. 01, 2024. [Online]. Available: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0026-17422016000300006&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- [5] F. Guhl, “Enfermedad de Chagas: Realidad y perspectivas”, Accessed: Sep. 01, 2024. [Online]. Available: www.medigraphic.org.mx
- [6] I. Molina, F. Salvador, and A. Sánchez-Montalvá, “Actualización en enfermedad de Chagas,” *Enferm Infecc Microbiol Clin*, vol. 34, no. 2, pp. 132–138, Feb. 2016, doi: 10.1016/j.eimc.2015.12.008.
- [7] Sanchez-Tejeda G, Correa-Morales F, Ibarra-López JJ, Rodríguez-Atanacio A, Davalos-Becerril E, and Ruíz-Rodríguez MA, “MANUAL DE PROCEDIMIENTOS PARA LA ENFERMEDAD DE CHAGAS EN MÉXICO,” *SSA*, pp. 1–23, 2019, Accessed: Sep. 08, 2024. [Online]. Available: www.gob.mx/salud/
- [8] M. Sanmartino and L. Crocco, “Conocimientos sobre la enfermedad de Chagas y factores de riesgo en comunidades epidemiológicamente diferentes de Argentina,” *Rev Panam Salud Publica/Pan Am J Public Health*, vol. 7, no. 3, 2000.
- [9] R. Aguilar *et al.*, “ARTÍCULO ORIGINAL,” *Medicina (B Aires)*, pp. 154–158, Oct. 2020.
- [10] T. Carrada-Bravo, “Trypanosoma cruzi: Historia natural y diagnóstico de la enfermedad de Chagas,” *Revista Mexicana de Patología Clínica y Medicina de Laboratorio*, vol. 51, no. 4, pp. 205–219, 2004.
- [11] G. Escamilla-Guerrero *et al.*, “Trypanosoma cruzi: seroprevalence detected in the blood bank of the Instituto Nacional de Pediatría, Mexico City, in the period 2004 through 2009,” *Transfusion (Paris)*, vol. 52, no. 3, pp. 595–600, Mar. 2012, doi: 10.1111/J.1537-2995.2011.03322.X.
- [12] R. Lewinsohn, “The discovery of trypanosoma cruzi and of american trypanosomiasis (Foot-notes to the history of chagas’s disease),” *Trans R Soc Trop Med Hyg*, vol. 73, no. 5, pp. 513–522, Jan. 1979, doi: 10.1016/0035-9203(79)90042-7/2/73-5-513.PDF.GIF.
- [13] C. David. Jenkins, “Mejoremos la salud a todas las edades: un manual para el cambio de comportamiento,” p. 427, 2005.
- [14] L. Reyes, E. Silesky, C. Cerdas, M. Chinchilla, and O. Guerrero, “Presencia de anticuerpos contra Trypanosoma cruzi en perros de Costa Rica PRESENCE OF ANTIBODIES AGAINST Trypanosoma cruzi IN COSTA RICAN DOGS”.
- [15] C. David. Jenkins, “Mejoremos la salud a todas las edades: un manual para el cambio de comportamiento,” p. 427, 2005.
- [16] I. V. Herbert and T. S. Smith, “Sarcocystosis,” *Parasitology Today*, vol. 3, no. 1, pp. 16–21, Jan. 1987, doi: 10.1016/0169-4758(87)90092-5.
- [17] A. M. Mejía-Jaramillo, G. J. Fernández, M. Montilla, R. S. Nicholls, and O. Triana-Chávez, “Sensibilidad al benzonidazol de cepas de Trypanosoma cruzi sugiere la circulación de cepas naturalmente resistentes en Colombia,” *Biomédica*, vol. 32, no. 2, pp. 196–205, 2012, Accessed: Sep. 08, 2024. [Online]. Available: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-41572012000200007&lng=en&nrm=iso&tlng=es
- [18] J. L. Domínguez, A. R. Ligonio, A. C. Mendoza, M. del C. M. Díaz, V. A. R. Cruz, and A. L. Monteon, “EL DIAGNÓSTICO PARA LA ENFERMEDAD DE CHAGAS: A MÁS DE 110 AÑOS DE SU DESCUBRIMIENTO,” *Kuxulkab’*, vol. 27, no. 58, pp. 31–39, Apr. 2021, doi: 10.19136/KUXULKAB.A27N58.3850.
- [19] M. C. Ruiz-Colorado, V. Rivas-Acuña, R. Gerónimo-Carrillo, G. H.- Ramírez, M. Soancatl-Castro, and R. Damian-Pérez, “Nivel de conocimiento y factores de riesgo de la enfermedad de Chagas en

- una comunidad de Cárdenas, Tabasco, México,” *Salud en Tabasco*, vol. 22, no. 3, pp. 61–69, 2016, Accessed: Sep. 08, 2024. [Online]. Available: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=48754565002>
- [20] “NORMA Oficial Mexicana NOM-253-SSA1-2012, Para la disposición de sangre humana y sus componentes con fines terapéuticos. | Centro Nacional de la Transfusión Sanguínea | Gobierno | gob.mx.” Accessed: Sep. 08, 2024. [Online]. Available: <https://www.gob.mx/cnts/documentos/norma-oficial-mexicana-nom-253-ssa1-2012-para-la-disposicion-de-sangre-humana-y-sus-componentes-con-fines-terapeuticos>
- [21] E. Ferrer, M. Lares, M. Viettri, and M. Medina, “Comparación entre técnicas inmunológicas y moleculares para el diagnóstico de la enfermedad de Chagas,” *Enferm Infecc Microbiol Clin*, vol. 31, no. 5, pp. 277–282, May 2013, doi: 10.1016/J.EIMC.2012.09.007.
- [22] Ops and Oms, “Guía para el diagnóstico y el tratamiento de la enfermedad de Chagas,” 2018, Accessed: Sep. 08, 2024. [Online]. Available: www.paho.org
- [23] I. Martínez, A. Cervantes-Landín, and B. Espinoza, “Diagnóstico molecular de la enfermedad de Chagas Gaceta Médica de México. 2013;149:363-5 Biología moleCular y meDiCina Correspondencia”, doi: 10.1371/journal.pntd.0000931.
- [24] C. Náquira and R. Cabrera, “Breve reseña histórica de la enfermedad de Chagas, a cien años de su descubrimiento y situación actual en el Perú,” *Rev Peru Med Exp Salud Publica*, vol. 26, no. 4, pp. 494–504, Dec. 2009, doi: 10.17843/RPMESP.2009.264.1412.
- [25] A. Ramos-Ligonio, M. E. Ramírez-Sánchez, J. C. González-Hernández, J. L. Rosales-Encina, and A. López-Monteon, “Prevalencia de anticuerpos contra Trypanosoma cruzi en donadores de sangre del IMSS, Orizaba, Veracruz, México,” *Salud Publica Mex*, vol. 48, no. 1, pp. 13–21, 2006, Accessed: Sep. 08, 2024. [Online]. Available: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0036-36342006000100004&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- [26] S. Argentina de Cardiología Argentina Marconcini, “Urbanización de la enfermedad de Chagas: Encuesta SOSPEECHA,” *Rev Argent Cardiol*, vol. 76, no. 2, pp. 123–126, 2008, Accessed: Sep. 08, 2024. [Online]. Available: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=305326974009>

Metodología eficiente y compacta para la síntesis de Poliuretanos y Poliuretano-Ureas Segmentados

López-Aguilar C.D.¹, Sánchez-Lombardo I., Paulin-Fuentes J.M.¹, López-González R.², Saavedra-Díaz R.O.^{1*}, Hernández-Córdova R.^{1}** 

¹Laboratorio de Ciencias Biomédicas y Química-Física, División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, CP. 86690 Cunduacán, Tabasco, México.

²Laboratorio de Nanotecnología, División Académica de Ingeniería y Arquitectura, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, CP. 86690 Cunduacán, Tabasco, México.

*rafael.saavedra@ujat.mx, **roberto.hernandezc@ujat.mx

Resumen

Los poliuretano-ureas segmentados (PUU) son polímeros termoplásticos empleados en ingeniería de tejidos, debido a su biocompatibilidad, biodegradabilidad y propiedades mecánicas ajustables. La síntesis de PUU se realiza mediante el método de prepolímero. En este trabajo, se desarrolló una metodología eficiente y compacta para la síntesis de PUU, utilizando PCL-diol, HMDI y BDA, optimizando tiempos mediante un secado rápido y condiciones controladas de síntesis. Los resultados mostraron un material flexible, homogéneo y semicristalino. El análisis por FTIR confirmó la estructura del PUU, destacando las bandas características de los grupos uretano y urea. Por su parte el análisis térmico (TGA) evidenció una alta estabilidad térmica, identificando etapas de descomposición relacionadas con los segmentos rígidos y suaves. La metodología propuesta logró reducir el tiempo, obteniendo materiales con propiedades estructurales y térmicas equivalentes a las reportadas en la literatura, lo que la posiciona como alternativa eficiente para la obtención de PUU para aplicaciones biomédicas.

Palabras claves: *Análisis térmico; poliuretano-urea; termoplástico.*

Abstract

Segmented polyurethane-ureas (PUU) are thermoplastic polymers used in tissue engineering due to their biocompatibility, biodegradability, and adjustable mechanical properties. PUU synthesis is carried out using the prepolymer method. In this work, an efficient and compact methodology for PUU synthesis was developed, employing PCL-diol, HMDI, and BDA, optimizing time through rapid drying and controlled synthesis conditions. The results revealed flexible, homogeneous, and semicrystalline material. FTIR analysis confirmed the PUU structure, highlighting the characteristic bands of urethane and urea groups. Thermal analysis (TGA) demonstrated high thermal stability, identifying decomposition stages associated with rigid and soft segments. The proposed methodology significantly reduced the synthesis time, producing materials with structural and thermal properties equivalent to those reported in the literature, positioning it as an efficient alternative for PUU production in biomedical applications.

Keywords: *Thermal analysis; polyurethane-urea; thermoplastic.*

Recibido: 09 de diciembre de 2024, Aceptado: 28 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introducción

La ingeniería de tejidos es un campo enfocado en restaurar, mantener o mejorar tejidos u órganos dañados mediante el uso de células, moléculas de señalización y materiales que funcionen como andamios [1]. Uno de los principales retos de esta disciplina ha sido el reemplazo parcial de tejidos perdidos por accidentes o padecimientos médicos, utilizando una combinación de células vivas y andamios para fomentar la formación de nuevo tejido [2]. En la actualidad, los materiales más utilizados están constituidos a partir de polímeros que imitan las características del órgano o tejido original. Estos materiales deben cumplir con propiedades clave, como biocompatibilidad, biodegradabilidad y propiedades mecánicas similares a las del órgano o tejido de origen [1], [3].

Desde década de 1960, se han empleado polímeros de origen natural en aplicaciones biomédicas. Sin embargo, en la actualidad, los polímeros sintéticos son ampliamente utilizados debido a su alta viabilidad, reproducibilidad y prolongado tiempo de vida útil. Entre los más utilizados se encuentran los poliésteres alifáticos lineales, como el alcohol polivinílico (**PVA**), la poli(ϵ -caprolactona) (**PCL**) y el ácido poliláctico (**PLA**), entre otros. Estos polímeros pueden combinarse con otros compuestos para desarrollar nuevos materiales con propiedades específicas que los hacen aptos para la ingeniería de tejidos, como los poli(uretanos) segmentados (**PU**) y los poli(uretano-ureas) segmentados (**PUU**) [4].

Los PU y PUU son polímeros termoplásticos cuyas propiedades dependen de los componentes utilizados en su composición. Para obtener polímeros lineales, es indispensable utilizar monómeros difuncionales. Estos materiales se sintetizan mediante la reacción entre grupos hidroxilo (**-OH**) e isocianato (**-NCO**), mientras que las poliureas se sintetizan a partir de la reacción entre una amina primaria (**-NH₂**) e isocianato (**-NCO**). En aplicaciones biomédicas, su estructura está compuesta por una disposición lineal y alternada de segmentos rígidos (*hard segment*, **HS**) y segmentos suaves (*soft segment*, **SS**). Los HS, responsables de conferir rigidez a la estructura, están formados por isocianatos y extensores de cadena de bajo peso molecular, los cuales pueden ser dioles o diaminas en el caso de los uretanos y las ureas, respectivamente. Por otro lado, SS proporcionan flexibilidad y están compuestos por dioles de alto peso molecular [5], [6].

En general, la reacción entre un alcohol y un isocianato se ven favorecidas con temperaturas entre 80°C - 100°C, sin embargo, con el uso de un catalizador la cantidad de tiempo y energía utilizada disminuye considerablemente; los catalizadores básicos promueven la reacción al interactuar con H del alcohol, en cambio, los catalizadores ácidos se unen al isocianato para que se produzca un ataque nucleofílico, para este trabajo se ha optado por un catalizador metálico que funcione como ácidos de Lewis.[7]

La concentración del catalizador y la temperatura son aspectos que influyen en las propiedades finales del PUU, debido a la alta reactividad de los isocianatos estos pueden generar reacciones secundarias con los grupos NH de los uretanos y ureas formados produciendo grupos alofanatos y biurets, estas son reacciones promovidas por temperaturas superiores a los 110°C y el exceso de catalizador, la presencia de estas estructuras son indeseables para la mayoría de casos incluyendo esta investigación, sin embargo, al sintetizar PU con estas estructuras de manera planificada se ha visto un aumento considerable en la resistencia, elasticidad y tenacidad del material.[8], [9].

La síntesis de PUU puede realizarse mediante dos enfoques principales: el método de un paso y el método de prepolímero. El método de un paso consiste en hacer reaccionar todos los reactivos simultáneamente, lo que resulta en un proceso más rápido, aunque con menor control sobre la estructura final. Por el contrario,

el método de prepolímero implica primero la formación de cadenas cortas constituidas por la unión entre el macrodiol y el isocianato, seguido de la adición del extensor de cadena. Este último método permite un mayor control estructural, aunque incrementa el tiempo de reacción [1]. Adicionalmente, las condiciones de síntesis son determinantes para el resultado final, debido a la alta reactividad del isocianato. Este compuesto reacciona fácilmente con alcoholes y aminas, lo que resulta ideal para la formación del polímero deseado; sin embargo, también puede reaccionar con agua presente en el ambiente, generando ácido carbámico, el cual es inestable y se descompone en amina y dióxido de carbono. Por esta razón, es crucial mantener un entorno de síntesis controlado, libre de humedad y oxígeno [10].

La síntesis convencional de PU y PUU se realiza típicamente en reactores de tres bocas, requiriendo etapas preliminares de secado de reactivos que incrementan significativamente el consumo de materiales (hasta un 15 a 20 % adicional) y prolongan el proceso a aproximadamente 72 h, incluyendo la preparación inicial. Ante esta problemática, el presente estudio propone desarrollar un protocolo optimizado para la síntesis de PUU que reduzca sustancialmente el tiempo de reacción, mientras mantenga un control preciso de los parámetros de polimerización. La validación del método se realiza mediante análisis comparativo de las propiedades estructurales (FTIR) y térmicas (TGA) del polímero obtenido con respecto a los resultados reportado en la literatura, evaluando principalmente los grupos característicos y la estabilidad térmica.

2. Metodología Experimental

2.1 Materiales

Se utilizaron los siguientes reactivos, Policaprolactona-diol (**PCL-diol**, $M_n \sim 2000$), Metilenbis(ciclohexil isocianato) (**HMDI**), 1,4-diaminobutano (**BDA**), dimetilformamida anhidra (**DMF**) y octoato de estaño-II (**Sn(Oct)₂**), todos de la marca Sigma-Aldrich.

2.2 Métodos

2.2.1 Síntesis de PUU

La síntesis del PUU se llevó a cabo utilizando el método de prepolímero mostrado en la Figura 1, siguiendo el procedimiento descrito a continuación:

Previo al inicio de la síntesis, la PCL-diol se secó en una línea de Schlenk bajo presión reducida a 90 °C durante 30 minutos. Para la síntesis, se utilizó un matraz balón de dos bocas de 250 mL, equipado con un tapón y un adaptador conectado a atmosfera inerte de N₂ mediante la línea de Schlenk, y sumergiendo en un baño de aceite. La reacción se llevó a cabo empleando una relación molar de 1:2:1 (PCL-diol:HMDI:BDA). La PCL-diol seca se disolvió en DMF al 10 % p/v, mezclado con catalizador de estaño al 0.01 % en peso, manteniendo la mezcla a 40 °C durante 30 minutos para garantizar su homogeneización. Posteriormente se añadió el HMDI por goteo, calentando la mezcla a 75 °C durante 3 horas. Luego, se dejó a temperatura ambiente por 1 hora, tras lo cual se agregó la BDA como extensor de cadena, dejando la reacción por 1 hora adicional. Finalmente, la reacción se completó calentándola a 75 °C durante una hora más. El PUU se precipitó en agua fría y se sometió a tres lavados con una solución de etanol y agua al 50%. Finalmente, se secó a 80 °C durante 12 horas.

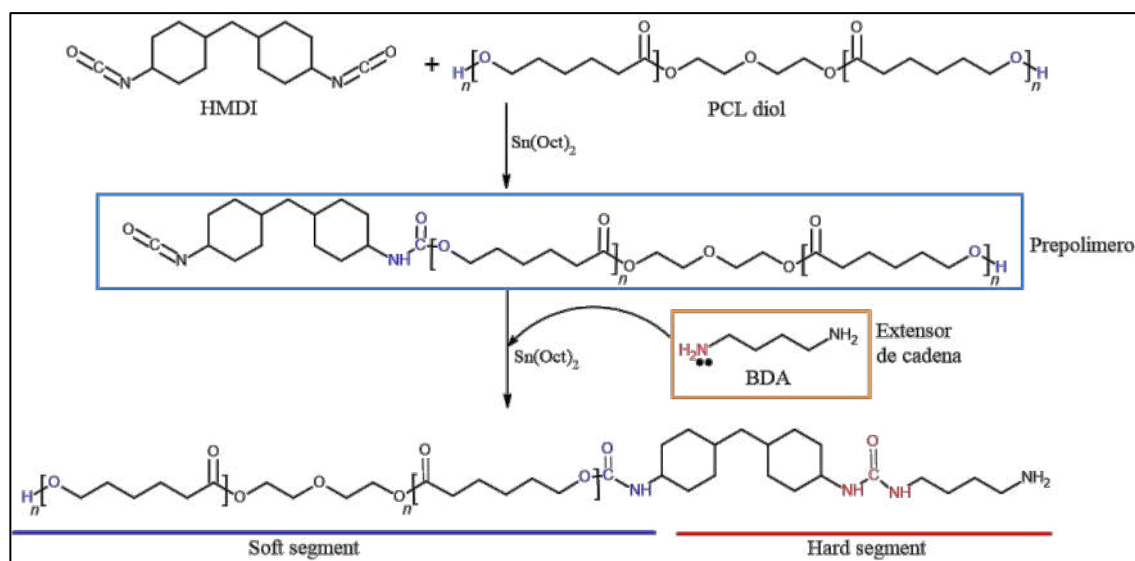


Figura 1. Mecanismo de reacción para la síntesis de PUU.

2.2.2 Obtención de película de PUU

El PUU (previamente seco) se disuelve en DMF a una concentración del 5 % a 80 °C durante 1 hora, manteniendo la solución con agitación vigorosa. Posteriormente, se trasladó a un baño ultrasónico a 70 °C por 30 minutos. La solución se vierte en un molde de silicona y se seca en horno a 60 °C durante 24 horas.

2.2.3 Caracterización FTIR

Se obtuvieron los espectros de las películas formadas, utilizando el equipo Thermo Scientific Nicolet™ iS™ 50 FTIR, mediante la técnica de Reflectancia Total Atenuada (ATR-FTIR), en un intervalo de 400 – 4000 cm^{-1} con 60 scans.

2.2.4 Caracterización TGA

La caracterización termogravimétrica se realizó en un equipo Setaram Labsys EVO 1110. Muestras de película de entre 7 y 10 mg fueron analizadas en el intervalo de temperatura de 35 a 600 °C a una velocidad de calentamiento de 10 °C/min. Se utilizó gas argón para mantener una atmósfera inerte.

3. Resultados y Discusión

3.1 PUU Sintetizado y Película Obtenida

En la Figura 2 A) se presenta el polímero precipitado al final de la síntesis. Se observa un material blanquecino y homogéneo con una consistencia bastante elastomérica. Se obtuvo un material alifático y soluble en DMF y DMSO. En la Figura 2 B) se muestra la película obtenida. Se observa que es traslúcida sin porosidad a simple vista, homogénea y altamente flexible, además presenta buena resistencia mecánica para su manipulación manual.

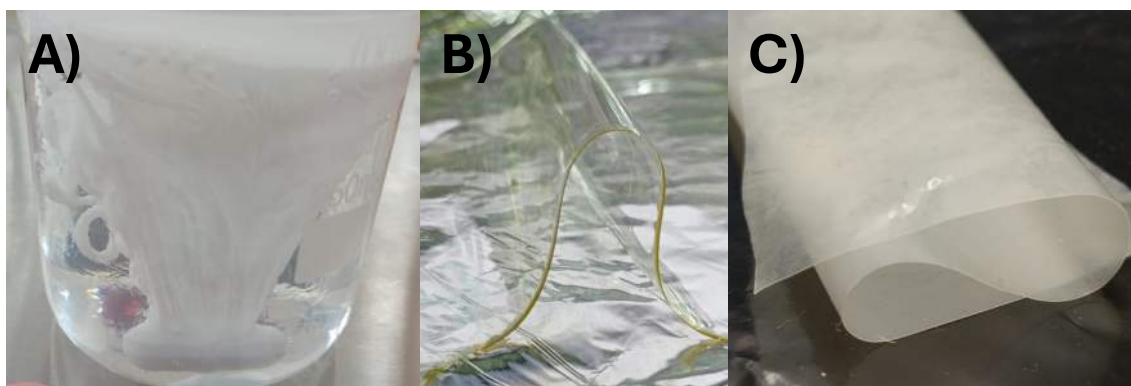


Figura 2. Polímero precipitado A), Película obtenida de PUU B), Película PUU después de dos semanas de almacenamiento C).

En la figura 2 C) se presenta la película después de al menos 2 semanas de almacenamiento. Es posible apreciar un color opaco, como se menciona en la literatura el opacamiento se debe al reacomodo de los segmentos rígidos que provocan dominios cristalinos en el bulk del material, por lo que el PUU obtenido es semicristalino[11].

3.2 Análisis por FTIR

La Figura 3 presenta el espectro FTIR de la película de PUU. Destaca la región de 1700 cm^{-1} , asociada al grupo carbonilo ($\text{C}=\text{O}$), característico de los grupos uretano y urea. Además, se observan bandas en 1525 , 1640 y 3330 cm^{-1} , que revelan interacciones de los carbonilos causadas por un estiramiento debido a enlaces de hidrógeno; también se identifica un pico característico del grupo urea (N-H) y las interacciones por puentes de hidrógeno entre los enlaces N-H y $\text{C}=\text{O}$, respectivamente. Estas interacciones están directamente relacionadas con el contenido de segmentos rígidos, lo cual concuerda con resultados previos [8]. Por otro lado, las bandas en 2863 y 2932 cm^{-1} corresponden a las vibraciones de los grupos C-H alifáticos, mientras que las bandas en 1044 , 1161 y 1239 cm^{-1} están asociadas a los grupos éster.

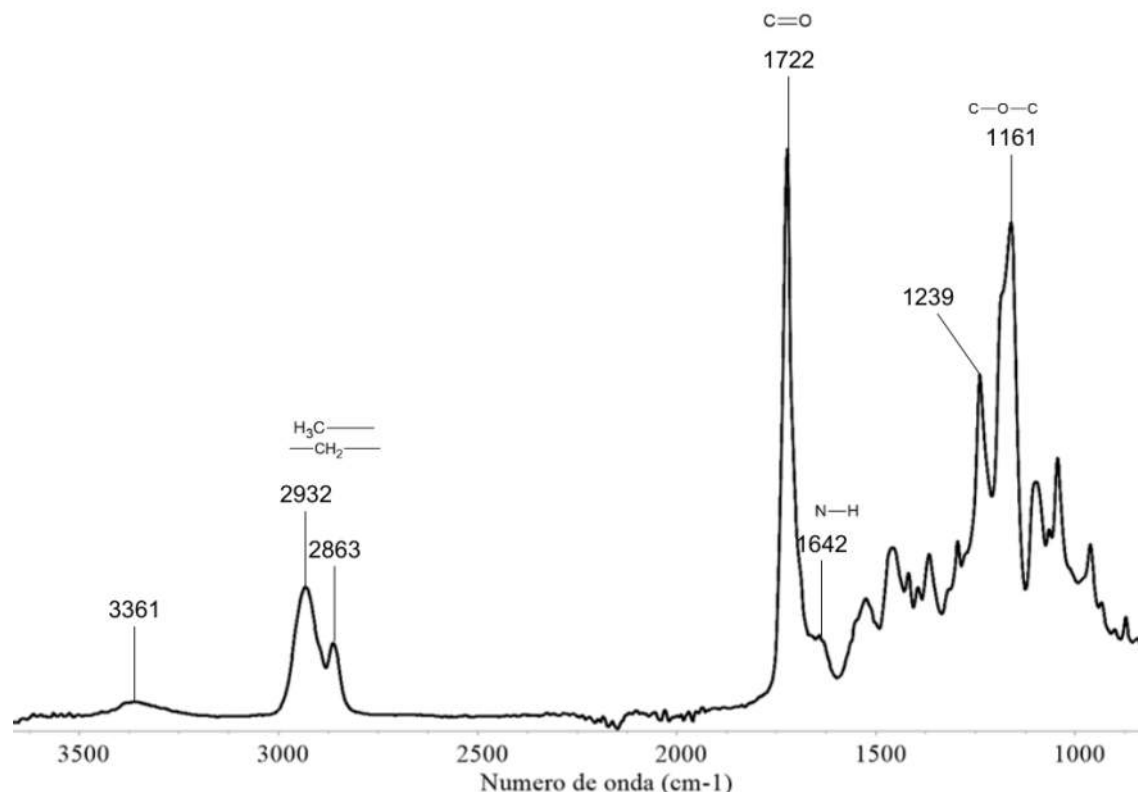


Figura. 3 Espectro ATR-FTIR de la película de PUU.

En comparación con la bibliografía consultada, donde se ha trabajado con poli(urea) y poli(uretano-ureas) con variaciones en los extensores de cadena, isocianatos o macrodioles; las bandas observadas y sus respectivas regiones son bastante similares, lo que confirma la correcta síntesis de nuestro PUU. En particular, se detecta en 1722 cm⁻¹ una señal intensa correspondiente al estiramiento de los carbonilos libres (C=O). Aunque se ha reportado que puede observarse una banda en 1964 cm⁻¹ asociada a los carbonilos enlazados (C=O con enlace de hidrógeno) [12]. Por otro lado, la presencia de dos bandas diferenciadas en 1239 y 1161 cm⁻¹, con mayor intensidad en la primera, se atribuye a los estiramientos simétrico y asimétrico del grupo éster (C-O-C).

La ausencia de bandas entre 2275 a 2250 cm⁻¹ confirma que no hay grupos isocianato sin reaccionar dentro del PUU. Sin embargo, aunque las bandas sean similares, las diferencias en los valores específicos del número de onda, dependen de la estructura química de las cadenas y de las interacciones entre los grupos funcionales que lo conforman [13], [14]. Al comparar nuestro resultado con el FTIR de la referencia base [11], se observa una similitud con el PUU que presenta un contenido de 23% de HS, el objetivo a replicar. Los números de onda 1630 y 3366 cm⁻¹ tienen intensidades de banda que dependen directamente del contenido de HS, presentando una variación de $\pm 10\%$.

3.3 Análisis Térmico

El análisis térmico mostrado en la Figura 4, reveló una temperatura de descomposición inicial de 314 °C, característica de los termoplásticos a base de uretano-urea. Los resultados del análisis DTG indican que la

descomposición ocurre en tres etapas principales. Las dos primeras etapas, entre 250 °C y 335 °C, se atribuyen a los grupos uretano y urea, respectivamente. El grupo uretano presenta una temperatura de descomposición inicial cercana a los 250 °C, mientras que el grupo urea muestra una descomposición en el intervalo 320 – 335 °C [12], [13], [14]. La segunda etapa corresponde a la ruptura de los enlaces poliéster de la PCL. Finalmente, en el intervalo 400 – 500 °C, se observa la formación de alquenos de cadena corta como resultado de la etapa previa [18]. En la tabla 1 se presentan los detalles de los eventos térmicos, así como el proceso con el cuál están relacionados.

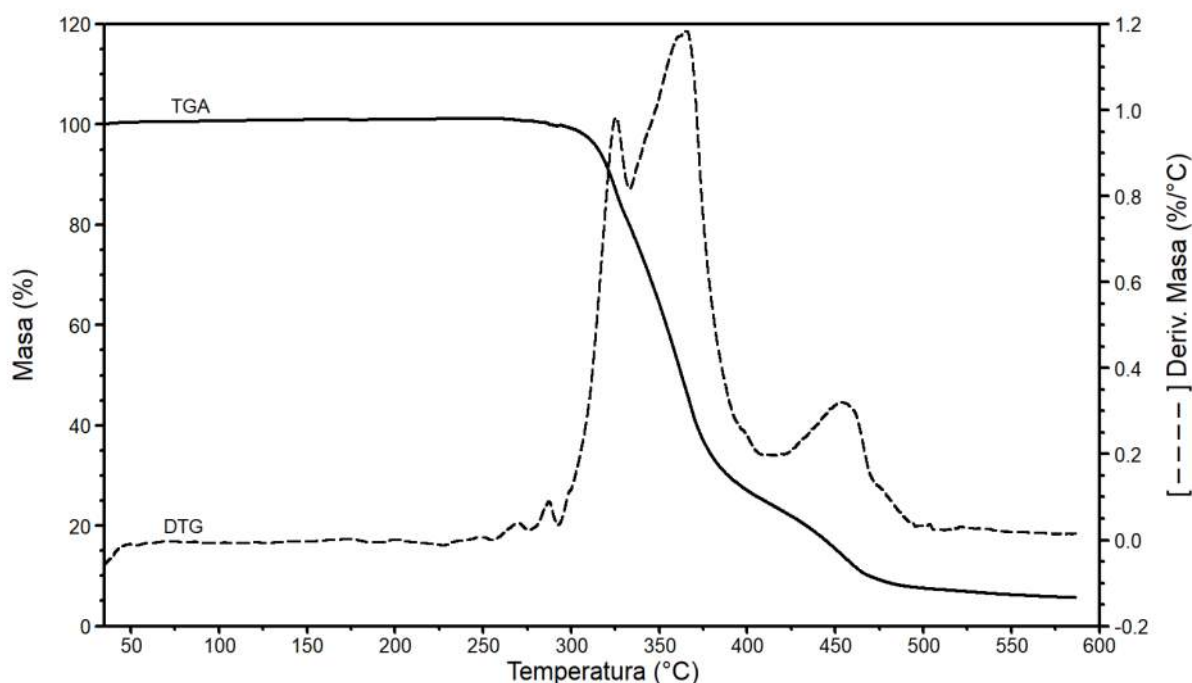


Figura 4. Análisis Termogravimétrico de la película de PUU.

Cabe destacar que las temperaturas obtenidas en el DTG pueden explicarse por las interacciones moleculares entre los HS y los SS, las cuales contribuyen a retrasar la descomposición térmica del PUU. Al final, se obtuvo un residuo de 5.63 %, correspondiente a la materia calcinada.

La pérdida de masa en las dos primeras etapas es aproximadamente 21 %, un valor ligeramente inferior al esperado teóricamente, lo cual se correlaciona con el contenido de HS. En general, los resultados muestran una notable estabilidad térmica del material.

Tabla 1. Resultado del análisis térmico.

Étapas	Rango de temperatura (°C)	Temperatura máx. (°C)	Pérdida de peso (%)	Descripción
1	254-293	287.4	1.308	Ruptura de enlaces uretano
2	293-332	325.26	19.50	Ruptura de enlaces urea
3	332-409	385.01	55.21	Ruptura de enlaces éster
4	409-496	456.73	17.41	Restos de ϵ -caprolactona

4. Conclusiones

La metodología de síntesis permitió obtener un PUU en un tiempo significativamente menor al reportado en la literatura. Logramos una reducción del 90 % en el tiempo requerido para el secado de la PCL-diol, lo cual no solo optimizó la eficiencia del proceso, sino que también contribuyó a una disminución considerable de los costos asociados. Además, el método facilita la introducción de modificaciones para mejorar aún más el rendimiento.

Se obtuvo una película de PUU traslúcida y flexible, cumpliendo con las propiedades establecidas al inicio. Estas características fueron confirmadas mediante los estudios de ATR-FTIR y TGA, cuyos resultados mostraron concordancia con los datos referenciados en trabajos previos.

El análisis ATR-FTIR corroboró la estructura química y las interacciones de los componentes del polímero. En particular, se destacaron las bandas características asociadas al contenido de HS, con un valor cercano al 23%. Por su parte, el análisis TGA evidenció las etapas principales de descomposición, las cuales corresponden a los segmentos rígidos y blandos presentes en el material sintetizado, validando su estructura y comportamiento térmico. La estabilidad térmica del PUU supera los requisitos para esterilización ($>121^{\circ}\text{C}$), mientras que su perfil de degradación controlada lo hace competitivo frente a la PCL en aplicaciones de soporte tisular [4].

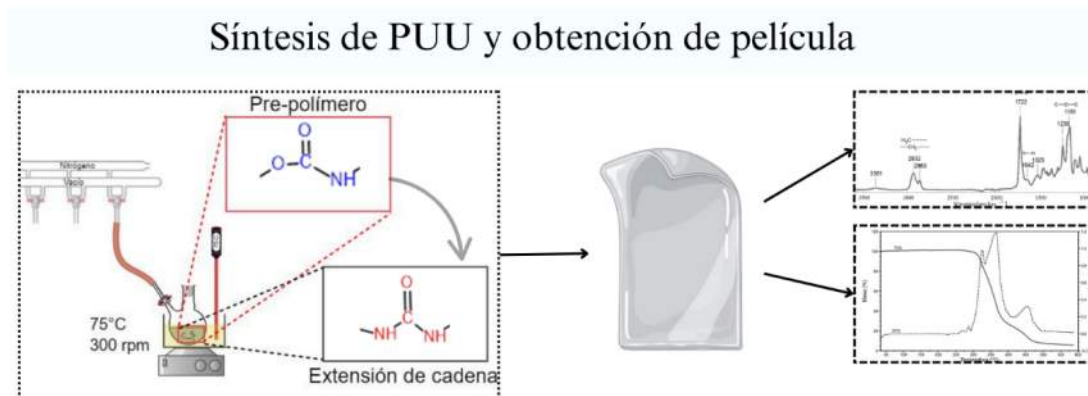
En general, los resultados obtenidos demuestran que nuestra metodología es eficiente y produce materiales con propiedades adecuadas para aplicaciones potenciales en diversas áreas.

Esto nos permite explorar nuevos trabajos de investigación en la que se busque la optimización del proceso de síntesis enfocado en química verde que contribuyan a los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), en específico en ODS 12: Producción y Consumo Responsable al centrar el diseño de polímeros biodegradables que reduzcan el impacto ambiental de los materiales sintéticos, además de producir nuevos materiales basados en PUU aplicables en ingeniería de tejidos que sean seguros y funcionales para la salud humana que formen de las metas del ODS 3: Salud y Bienestar.[19]

5. Agradecimientos

Los autores expresamos nuestro agradecimiento al Centro de Investigación de Ciencia y Tecnología Aplicada de Tabasco (CICTAT) de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco por su invaluable ayuda en los análisis de FTIR y TGA, realizados a través del proyecto INFR-2016-01-269701.

6. Resumen Gráfico



7. Referencias

- [1] C. Xu y Y. Hong, “Rational design of biodegradable thermoplastic polyurethanes for tissue repair”, *Bioact. Mater.*, vol. 15, pp. 250–271, sep. 2022, doi: 10.1016/j.bioactmat.2021.11.029.
- [2] A. K. Saxena, “Tissue engineering: Present concepts and strategies”, *J. Indian Assoc. Pediatr. Surg.*, vol. 10, núm. 1, p. 14, mar. 2005, doi: 10.4103/0971-9261.16069.
- [3] J. Chen, R. Dong, J. Ge, B. Guo, y P. X. Ma, “Biocompatible, Biodegradable, and Electroactive Polyurethane-Urea Elastomers with Tunable Hydrophilicity for Skeletal Muscle Tissue Engineering”, *ACS Appl. Mater. Interfaces*, vol. 7, núm. 51, pp. 28273–28285, dic. 2015, doi: 10.1021/acsami.5b10829.
- [4] D. Ozdil y H. M. Aydin, “Polymers for medical and tissue engineering applications”, *J. Chem. Technol. Biotechnol.*, vol. 89, núm. 12, pp. 1793–1810, 2014, doi: 10.1002/jctb.4505.
- [5] A. Santamaria-Echart, I. Fernandes, F. Barreiro, M. A. Corcuera, y A. Eceiza, “Advances in Waterborne Polyurethane and Polyurethane-Urea Dispersions and Their Eco-friendly Derivatives: A Review”, *Polymers*, vol. 13, núm. 3, Art. núm. 3, ene. 2021, doi: 10.3390/polym13030409.
- [6] M. Sobczak, “Biodegradable Polyurethane Elastomers for Biomedical Applications – Synthesis Methods and Properties”, *Polym.-Plast. Technol. Eng.*, vol. 54, núm. 2, pp. 155–172, ene. 2015, doi: 10.1080/03602559.2014.955201.
- [7] A. Delavarde *et al.*, “Sustainable polyurethanes: toward new cutting-edge opportunities”, *Prog. Polym. Sci.*, vol. 151, p. 101805, abr. 2024, doi: 10.1016/j.progpolymsci.2024.101805.
- [8] T. Stern, “Single-Step Synthesis and Characterization of Non-Linear Tough and Strong Segmented Polyurethane Elastomer Consisting of Very Short Hard and Soft Segments and Hierarchical Side-Reacted Networks and Single-Step Synthesis of Hierarchical Hyper-Branched Polyurethane”, *Molecules*, vol. 29, núm. 7, Art. núm. 7, ene. 2024, doi: 10.3390/molecules29071420.
- [9] E. Delebecq, J.-P. Pascault, B. Boutevin, y F. Ganachaud, “On the Versatility of Urethane/Urea Bonds: Reversibility, Blocked Isocyanate, and Non-isocyanate Polyurethane”, *Chem. Rev.*, vol. 113, núm. 1, pp. 80–118, ene. 2013, doi: 10.1021/cr300195n.
- [10] A. Mouren y L. Avérous, “Sustainable cycloaliphatic polyurethanes: from synthesis to applications”, *Chem. Soc. Rev.*, vol. 52, núm. 1, pp. 277–317, 2023, doi: 10.1039/D2CS00509C.
- [11] L. May-Hernández, F. Hernández-Sánchez, J. L. Gomez-Ribelles, y R. S. Serra, “Segmented poly(urethane-urea) elastomers based on polycaprolactone: Structure and properties”, *Journal of Applied*

Polymer Science, vol. 119, 2010. Consultado: el 24 de septiembre de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/app.32929>

[12] Y. Shi, X. Zhan, Z. Luo, Q. Zhang, y F. Chen, “Quantitative IR characterization of urea groups in waterborne polyurethanes”, *J. Polym. Sci. Part Polym. Chem.*, vol. 46, núm. 7, pp. 2433–2444, 2008, doi: 10.1002/pola.22577.

[13] F. Callejas, “Tablas de Espectroscopía Infrarroja”. Departamento de Física y Química, UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México), 2000.

[14] J. Mattia y P. Painter, “A Comparison of Hydrogen Bonding and Order in a Polyurethane and Poly(urethane-urea) and Their Blends with Poly(ethylene glycol)”, *Macromolecules*, vol. 40, núm. 5, pp. 1546–1554, mar. 2007, doi: 10.1021/ma0626362.

[15] D. K. Chattopadhyay y D. C. Webster, “Thermal stability and flame retardancy of polyurethanes”, *Prog. Polym. Sci.*, vol. 34, núm. 10, pp. 1068–1133, oct. 2009, doi: 10.1016/j.progpolymsci.2009.06.002.

[16] W. H. Awad y C. A. Wilkie, “Investigation of the thermal degradation of polyurea: The effect of ammonium polyphosphate and expandable graphite”, *Polymer*, vol. 51, núm. 11, pp. 2277–2285, may 2010, doi: 10.1016/j.polymer.2010.03.033.

[17] K. Mizera, K. Sałasińska, J. Ryszkowska, M. Kurańska, y R. Kozera, “Effect of the Addition of Biobased Polyols on the Thermal Stability and Flame Retardancy of Polyurethane and Poly(urea)urethane Elastomers”, *Materials*, vol. 14, núm. 7, Art. núm. 7, ene. 2021, doi: 10.3390/ma14071805.

[18] S. T. McKenna y T. R. Hull, “The fire toxicity of polyurethane foams”, *Fire Sci. Rev.*, vol. 5, núm. 1, p. 3, abr. 2016, doi: 10.1186/s40038-016-0012-3.

[19] Naciones Unidas, “Objetivos y metas de desarrollo sostenible”, Desarrollo Sostenible. Consultado: el 27 de marzo de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/sustainable-development-goals/>