



UJAT

UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



Diseño educativo para la
enseñanza de la cinemática
de mecanismo

-Perera-Cortez et al.

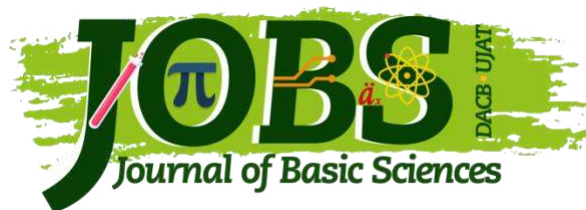
JOBS DACB • UJAT
Journal of Basic Sciences

Volúmen 12
Número 34
mayo-agosto 2026

ISSN:2448-4997
<https://revistajobs.ujat.mx>

OPEN  ACCESS





En el número 34 del Journal of Basic Sciences se presentan ocho contribuciones que reflejan el carácter multidisciplinario de la revista, al abordar temas relacionados con ingeniería y ciencias de materiales, enseñanza de las ciencias, farmacéutica, física y matemáticas. Desde sus respectivas áreas, los trabajos emplean herramientas científicas para ampliar el conocimiento, fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y contribuir a la solución de problemáticas de interés social, tecnológico y académico.

El número inicia con el artículo de López-Zapata et al., en el que se evalúa la corrosión atmosférica del acero al carbono y cobre en el municipio de Cunduacán, Tabasco, considerando la presencia de contaminantes atmosféricos asociados al entorno. Los resultados destacan la importancia de fortalecer las estrategias de control de emisiones y protección de materiales empleados en infraestructura industrial y residencial, particularmente en regiones con actividad petrolera.

Posteriormente, se presentan dos contribuciones relacionadas con la enseñanza de las ciencias. Perera Cortez et al. desarrollan y validan un prototipo didáctico de un mecanismo biela-manivela con corredera para la enseñanza de la cinemática en estudiantes de ingeniería. El dispositivo integra teoría, simulación y mediciones experimentales, favoreciendo una comprensión más interactiva de los conceptos estudiados. Por su parte, López-de Dios et al. analizan el uso y valoración de herramientas informáticas por profesores de la Licenciatura en Química de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco durante la transición hacia la enseñanza virtual ocasionada por la pandemia de COVID-19. Sus resultados resaltan la necesidad de fortalecer no solamente las competencias técnicas digitales, sino también su adecuada integración pedagógica en la enseñanza de disciplinas experimentales.

En el área farmacéutica, Díaz-Martínez et al. comparan la ciclofosfamida y la bendamustina para el tratamiento del cáncer desde una perspectiva farmacoterapéutica y farmacoeconómica. El estudio considera eficacia, costos, reacciones adversas y disponibilidad de los medicamentos, proporcionando elementos para apoyar la toma de decisiones clínicas. Los resultados muestran ventajas económicas para la ciclofosfamida, mientras que la bendamustina representa una alternativa cuando se priorizan aspectos relacionados con tolerabilidad y seguridad.

Dentro del área de física, Rendón et al. estudian la variación de la presión atmosférica con respecto a la altura mediante modelos que incorporan un gradiente lineal de temperatura en las ecuaciones de estado de los gases ideales y de van der Waals. Esta aproximación permite representar de manera más realista el comportamiento de la atmósfera terrestre y explorar posibles comportamientos en Venus, Marte y Titán.

El número incluye además tres contribuciones del área de matemáticas. Balcázar-Araiza y Ojeda presentan una generalización dentro del Cálculo Fraccionario Multivariable mediante

la definición y análisis de integrales y diferenciales de Riemann-Liouville de tipo (α, k, P) , estableciendo propiedades y teoremas fundamentales asociados a estos operadores. Toledo et al. desarrollan un método numérico basado en elementos finitos para resolver ecuaciones diferenciales unidimensionales que involucran la derivada conformable, ofreciendo una herramienta para la aproximación eficiente de este tipo de problemas. Finalmente, Remigio-Juárez et al. presentan una introducción a los complejos de Vietoris-Rips y a la homología persistente, incluyendo el uso de diagramas de persistencia y herramientas computacionales en Python para el análisis de conjuntos de datos, con posibles aplicaciones en diversas áreas científicas.

De este modo, el número 34 del Journal of Basic Sciences reúne investigaciones y contribuciones académicas que muestran la diversidad de enfoques de las ciencias básicas y sus aplicaciones. En conjunto, los artículos fortalecen la difusión y divulgación del conocimiento científico y buscan generar impacto en los ámbitos regional, nacional e internacional.

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

CONSEJO EDITORIAL

- **Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé.** Editora en Jefe. Matemáticas. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-7342-0888>
- **Dr. Adib Abiu Silahua Pavón.** Gestor Editorial. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-5344-1430>

COMITÉ EDITORIAL

- **Dra. Nancy Romero Ceronio. Editora Asociada.** Química. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0001-8169-3811>
- **Dra. María Arely López Garrido.** Editora Asociada. Ciencias Computacionales. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-1780-5748>
- **Dr. José Luis Benítez Benítez.** Editor Asociado. Física. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0009-0000-0561-5029>
- **Dr. Domingo González Martínez.** Editor Asociado. Matemáticas. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-3754-0636>
- **Dr. Carlos Mario Morales Bautista.** Editor Asociado. Química. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-4825-4558>
- **Dr. Jorge Mauricio Paulin Fuentes.** Editor Asociado. Física. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-1433-8083>
- **Dr. Carlos Javier López Victorio.** Editor Asociado. Químico Farmacéutico Biólogo. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0002-0703-7266>
- **Dr. Manuel Salud Antonio Pérez.** Editor Asociado. Geofísica. División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco <https://orcid.org/0009-0003-8844-6604>

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 12, Núm. 34, agosto de 2026, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. <https://revistajobs.ujat.mx>. Editor Responsable de la Revista: Addy Margarita Bolívar Cimé. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 27 de junio de 2026.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación y de esta Casa Editora.

Las publicaciones respaldadas con el sello editorial de la UJAT no podrán utilizarse para entrenar modelos de IA generativa, a menos de que haya una declaración expresa, tanto de la Universidad como de los autores y/o herederos.

CONTENIDO

	Pág.
Corrosión del cobre y el acero en condiciones atmosféricas	1
<i>López-Zapata, O. A., Del Ángel-Meraz, E., Corvo-Pérez, F. E., Valdés-Clemente, C. S.</i>	
Diseño educativo para la enseñanza de la cinemática de mecanismo	15
<i>Perera-Cortez, M. A., Jacobo-Cortés, E. A., Hidalgo-Arcos, W.</i>	
Uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la química universitaria durante la pandemia de COVID-19	31
<i>López-de Dios, C. del C., Montejo-Ramos, R., Acosta-Pérez, L. I.</i>	
Impacto financiero y clínico de la ciclofosfamida y bendamustina en el tratamiento de cáncer en México	48
<i>Díaz-Martínez, I. G., Castro-Georgana, V. F., Vázquez-Cahuich, D. A., De la Cruz-López, J. J., García-Jesús, K. P., Flores-Dorantes, M. T., Pedraza-Montero, P.</i>	
Estimación de la presión en atmósferas planetarias mediante gradientes de temperatura constante y lineal	65
<i>Rendón, F., Pulido-Guerrero, R., Munguía, E.</i>	
On Riemann-Liouville Operators of type (α, k, P) and Related Function Spaces	80
<i>Balcázar-Araiza, R. C., Ojeda, N. R.</i>	

**Finite element method for a one-dimensional conformable
differential equation with Dirichlet boundary condition**

101

*Toledo, P.,
Hernández-Linares, C. A.,
Avendaño-Garrido, M. L.*

Homología persistente

121

*Remigio-Juárez, J.,
Almaguer-Cantú, M. H.,
Domínguez Colín, R.,
Hernández Garibay, J. R.,
Rodríguez Henríquez, L. M. X.*

Homología persistente Persistent homology

Remigio-Juárez, Jair^{1,*} ,
Almaguer Cantú, María Hortensia¹ ,
Domínguez Colín, Raymundo¹ ,
Hernández Garibay, Juan Roberto² ,
Rodríguez Henríquez, Lil María Xibai³ 

¹División Académica de Ciencias Básicas, UJAT.

²División Académica de Ciencias y Tecnologías de la Información, UJAT

³INAOE

*jair.remigio@ujat.mx

Resumen

Presentamos los conceptos necesarios para entender cómo funciona la homología persistente de complejos de Vietoris-Rips. Así como también damos ejemplos de cómo se usa *Python* para el cálculo de los diagramas de persistencia.

Palabras claves: Ciencia de Datos, Homología Persistente, Análisis Topológico de Datos, Python

Abstract

We present the basic notions to understand the persistent homology of Vietoris-Rips complexes. For computations, we introduce examples using some Python libraries.

Keywords: Data Science, Persistent Homology, Topological Data Analysis, Python

Recibido: 30 de junio de 2025. Aceptado: 25 de abril de 2026. Publicado: 31 de agosto de 2026.

1. Introducción

Los grupos de homología son invariantes algebraicos de los espacios topológicos. A pesar de que la homología es un concepto algebraico, es posible obtener de ella información topológica de los espacios en cuestión, en particular, en este trabajo nos concentraremos, en los grupos de homología de los complejos simpliciales. Por otra parte, una filtración es una sucesión anidada de complejos simpliciales y al calcular la homología para cada complejo en la filtración, se puede rastrear el “nacimiento” y la “muerte” de las clases de homología. Esta información se codifica de manera concisa en los **diagramas de persistencia**, que ilustra un conjunto de puntos (x, y) en el plano con $y > x$, donde la coordenada x representa el momento en que una clase de homología nace, mientras que la coordenada y representa el momento en que dicha clase de homología muere. La **persistencia** de una clase de homología se mide por la diferencia entre su tiempo de muerte y su tiempo de nacimiento [4]. Esta técnica es conocida actualmente como **homología persistente** y debido a su versatilidad se ha aplicado en diversas disciplinas, como el análisis de imágenes [3] y la biología [11].

En este artículo, además de la teoría requerida para definir la homología persistente, presentaremos ejemplos de códigos en Python que nos permiten obtener el diagrama de persistencia de un conjunto de datos, así como su interpretación “topológica”. Puesto que actualmente la homología

persistente es usada tanto por matemáticos, como no matemáticos, el objetivo de este artículo es hacer una explicación elemental de la misma y los conceptos a su alrededor.

2. Metodología

El presente trabajo se desarrolla bajo la siguiente metodología teórica-expositiva:

1. *Revisión conceptual y estructuración teórica.*

Se realizó una revisión selectiva de literatura en Análisis Topológico de Datos, a partir de la cual se organizaron los conceptos fundamentales de la homología persistente incluyendo filtraciones, complejos simpliciales y diagramas de persistencia.

2. *Enfoque ilustrativo mediante ejemplos.*

Para facilitar la comprensión de los conceptos, se emplearon ejemplos para resaltar propiedades topológicas específicas (como componentes conexas o ciclos). Estos ejemplos permiten observar, partiendo de los grupos de homología, las características topológicas de un espacio.

3. *Implementación computacional y análisis cualitativo*

Como complemento a la exposición teórica, se incorporó un componente computacional basado en la biblioteca Ripser de Python. En este contexto, se calcularon diagramas de persistencia de conjuntos de datos generados computacionalmente de manera aleatoria y se interpretaron dichos diagramas desde una perspectiva topológica. El objetivo de esta implementación no es realizar un estudio experimental exhaustivo, sino mostrar de manera concreta el flujo de trabajo típico en el Análisis Topológico de Datos.

3. Algunos preliminares algebraicos

Un **grupo abeliano** es un conjunto G con una operación $+$ que cumple las siguientes propiedades:

- $(x + y) \in G$, para cualesquiera $x, y \in G$.
- $(x + y) + z = x + (y + z)$, para cualesquiera $x, y, z \in G$.
- $x + y = y + x$, para cualesquiera $x, y \in G$.
- Existe un elemento neutro en G , usualmente denotado por 0 , tal que $x + 0 = x$, para cualquier $x \in G$.
- Para cada $x \in G$, existe un elemento y de G tal que $x + y = 0$. Por lo regular, al elemento y se le llama inverso aditivo de x y se denota por $-x$.

El conjunto de los números enteros, denotado por $\mathbb{Z}$, con la operación suma usual es un grupo abeliano. Otro ejemplo clásico de grupo abeliano es $\mathbb{Z}_2$, los enteros cíclicos módulo 2, que se obtienen de $\mathbb{Z}$ al definir la relación de equivalencia: $m \sim n$ si y sólo si 2 divide a $(m - n)$. Observemos que de esta relación se obtienen únicamente dos clases de equivalencia, pues todos los números pares se relacionan entre sí y forman la clase de equivalencia $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$; mientras que de los números impares obtenemos la clase de equivalencia $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\}$. De esta

forma, los únicos elementos de $\mathbb{Z}_2$ son las clases $[0]$ y $[1]$. La operación $+$ sobre $\mathbb{Z}_2$ se define de la siguiente manera: $[0] + [0] = [0]$, $[1] + [0] = [1] = [0] + [1]$ y $[1] + [1] = [0]$. Observemos que $-[0] = [0]$ y $-[1] = [1]$. Los lectores interesados en profundizar en los temas de grupos pueden consultar [9] o [7].

Por otra parte, si A es un conjunto cualquiera, consideramos el conjunto

$$C(A, \mathbb{Z}_2) = \{f : A \rightarrow \mathbb{Z}_2 : f(x) = [0], \text{ para todo } x \in A, \text{ excepto para una cantidad finita de ellos}\}.$$

Dados $f, g \in C(A, \mathbb{Z}_2)$, definimos la suma de f y g , denotada por $f + g$, como la función $f + g : A \rightarrow \mathbb{Z}_2$ con regla de correspondencia $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para toda $x \in A$. Es claro que $(f + g) \in C(A, \mathbb{Z}_2)$. Mas aún, debido a las propiedades de grupo de $\mathbb{Z}_2$ tenemos que $(f + g) + h = f + (g + h)$ y $f + g = g + f$, para cualesquiera $f, g, h \in C(A, \mathbb{Z}_2)$. Un elemento distinguible de $C(A, \mathbb{Z}_2)$ es la función cero $0 : A \rightarrow \mathbb{Z}_2$, definida por $0(x) = [0], \forall x \in A$; obviamente dicha función satisface que $f + 0 = f, \forall f \in C(A, \mathbb{Z}_2)$. Finalmente, para cada $f \in C(A, \mathbb{Z}_2)$ se tiene que $-f$, el inverso aditivo de f , es la misma f . Por lo que el conjunto $C(A, \mathbb{Z}_2)$ con la operación $+$ definida es un grupo abeliano, que en lo sucesivo será llamado: **el grupo abeliano generado por A con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$** .

Ahora bien, para cada $a \in A$, tenemos definida la función $f_a : A \rightarrow \mathbb{Z}_2$ con regla de correspondencia

$$f_a(x) = \begin{cases} [1], & \text{si } x = a; \\ [0], & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $\{f_a : a \in A\}$ es un conjunto generador para $C(A, \mathbb{Z}_2)$, es decir, que para cualquier $f \in C(A, \mathbb{Z}_2)$ se tiene que $f = f_{a_1} + \dots + f_{a_k}$, donde $a_1, \dots, a_k$ son todos los elementos x de A para los cuales $f(x) \neq [0]$.

Finalizamos este paréntesis algebraico puntualizando que, como es usual en varios libros de homología o topología algebraica (Ver [8], [13]), en este trabajo aprovecharemos la biyección natural que hay entre los conjuntos $\{f_a : a \in A\}$ y A , escribiendo $f = a_1 + \dots + a_k$ en vez de $f = f_{a_1} + \dots + f_{a_k}$. De esta manera,

$$C(A, \mathbb{Z}_2) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i : a_i \in A, \quad \forall i = 1, \dots, k \right\}.$$

En este contexto, la operación $+$ en $C(A, \mathbb{Z}_2)$ se realiza como si estuviéramos sumando polinomios, pero tomando en cuenta que al hacer la reducción de términos semejantes debemos respetar la aritmética de $\mathbb{Z}_2$, por ejemplo, si $a \in A$ tenemos que $a + a = 0$, pues en esta expresión el coeficiente de cada a es 1, al sumar los coeficientes obtenemos el número par 2, que en $\mathbb{Z}_2$ corresponde con la clase del $[0]$; mientras que $a + a + a = a$, debido a que la suma de coeficientes es el número impar 3, que en $\mathbb{Z}_2$ corresponde con la clase del $[1]$.

4. Complejos Simpliciales

Decimos que los puntos $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ están en **posición general**, si el conjunto $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^N$. Para que esto último ocurra es necesario que $0 \leq n \leq N$. Tampoco es difícil mostrar que el conjunto $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es linealmente independiente si, y solo si, para cualquier $v_{k_0} \in \{v_0, \dots, v_n\}$ se cumple que el conjunto

$\{v_0 - v_{k_0}, \dots, v_{k_0-1} - v_{k_0}, v_{k_0+1} - v_{k_0}, \dots, v_n - v_{k_0}\}$ es linealmente independiente. Debido a lo anterior y usando el hecho de que subconjuntos de conjuntos linealmente independientes también son linealmente independientes, tenemos que subconjuntos de puntos en posición general también están en posición general.

Si $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ son puntos en posición general, definimos el n -**simplejo** (o **simplejo de dimensión n**) generado por $v_0, \dots, v_n$, denotado $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$, como el conjunto

$$\langle v_0, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \quad : \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i = 0, \dots, n \right\}.$$

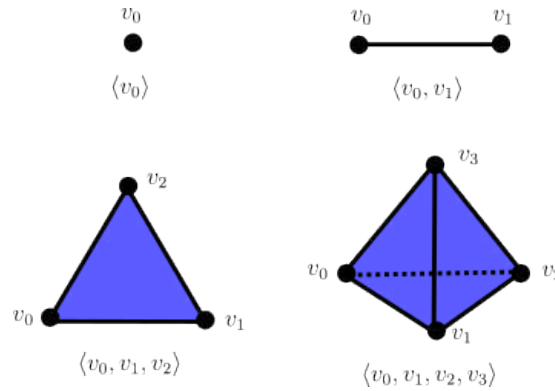


Figura 1: Ejemplos de simplejos.

A los puntos $v_0, \dots, v_n$ les llamamos **vértices** del simplejo $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$. En la Figura 1 podemos ver ejemplos de n -simplejos con $n = 0, 1, 2, 3$.

Una **cara** del simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ es un simplejo $\tau = \langle w_{i_0}, \dots, w_{i_k} \rangle$, donde $\{w_{i_0}, \dots, w_{i_k}\} \subset \{v_0, \dots, v_n\}$. En este caso, escribimos $\tau \prec \sigma$. La dimensión de τ como cara de σ es la misma que la dimensión de τ como simplejo.

La **frontera topológica de un n -simplejo** $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, denotada $Fr(\sigma)$, se define como el conjunto

$$Fr(\sigma) = \left\{ \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \right) \in \sigma \quad : \quad \lambda_j = 0, \text{ para algún } j \in \{0, \dots, n\} \right\}.$$

De la definición se puede observar que $Fr(\sigma)$ consiste precisamente de la unión de todas las caras de σ cuya dimensión es igual a $n - 1$ (Ver Figura 2).

Definición 4.1. Un **complejo simplicial finito** (o simplemente, un **complejo simplicial**) K es un conjunto finito de simplejos que tiene las siguientes propiedades:

- (1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \prec \sigma$, entonces $\tau \in K$.
- (2) Si $\sigma, \rho \in K$ y $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \rho \prec \sigma$ y $\sigma \cap \rho \prec \rho$.

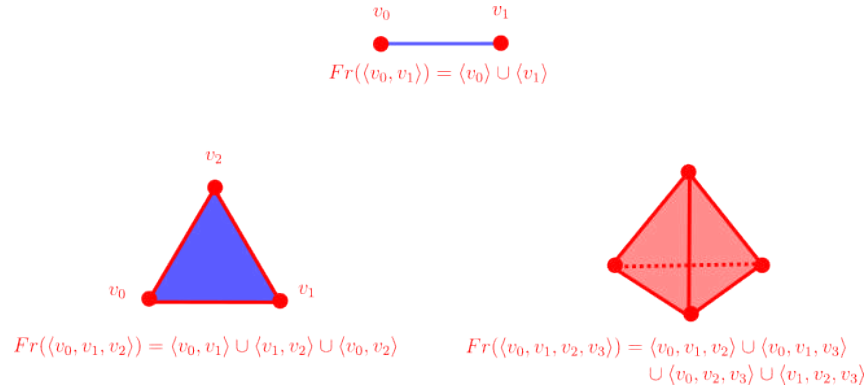


Figura 2: Fronteras topológicas de algunos simplejos.

Sea K un complejo. La **dimensión de** K , denotada $\dim(K)$, se define como el máximo de las dimensiones de los simplejos que pertenecen a K , y a los 0–simplejos de K también les llamamos **vértices** de K . El **poliedro de** K , denotado $|K|$, se define como la unión de todos los simplejos que pertenecen a K , es decir, $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

Ejemplo 4.1.

- (a) Sean $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^2$. Considere $K = \{\langle v_0 \rangle, \langle v_0, v_1 \rangle\}$. El conjunto K no es un complejo simplicial, pues $\langle v_1 \rangle$ es una cara del simplejo $\langle v_0, v_1 \rangle$, que no pertenece a K .
- (b) Si σ es un n –simplejo, entonces el conjunto $K_\sigma = \{\tau : \tau \prec \sigma\}$ es un complejo simplicial, el cual es llamado el **complejo simplicial asociado a** σ . En este ejemplo, la dimensión de K_σ es la misma que la del simplejo σ , el conjunto de vértices de K_σ es igual al conjunto de vértices de σ y $|K_\sigma| = \sigma$.
- (c) Sea $n \in \mathbb{N}$. Dado un n –simplejo σ , el conjunto $K_{Fr(\sigma)} = \{\tau : \tau \prec \sigma \text{ y } \dim(\tau) \leq n - 1\}$ es un complejo simplicial de dimensión $n - 1$. Además, el conjunto de vértices de $K_{Fr(\sigma)}$ coincide con el conjunto de vértices de σ y $|K_{Fr(\sigma)}| = Fr(\sigma)$.

No siempre se tiene que subconjuntos de un complejo simplicial sean también complejos simpliciales, sin embargo, cuando dichos subconjuntos cumplen la primera propiedad de la definición se garantiza que sí lo son. Con la finalidad de que este trabajo sea autocontenido, demostramos este hecho en la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Sea K un complejo simplicial y sea $L \subset K$. Supongamos que para todo $\sigma \in L$ se cumple que cualquier cara de σ también pertenece a L . Entonces L es un complejo simplicial.

Demostración. La primera propiedad que L tiene que cumplir para ser complejo simplicial se sigue por hipótesis. Ahora bien, supongamos que σ y ρ son simplejos en L tales que $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$. Dado que $L \subset K$, tenemos que $\sigma, \rho \in K$ y, en consecuencia, $\sigma \cap \rho \prec \sigma$ y $\sigma \cap \rho \prec \rho$, por ser K un complejo simplicial. Por lo tanto, L es un complejo simplicial. $\square$

Es necesario también puntualizar que el resultado anterior es el puente que conecta a los complejos simpliciales (geométricos) presentados en la Definición 4.1, con los *complejos simpliciales abstractos* que son mas útiles para fines computacionales [5].

5. Homología de un complejo simplicial

Sean K un complejo simplicial y K_r el subconjunto de r –simplejos que pertenecen a K . Denotamos por $C_r(K)$ al grupo libre abeliano generado por K_r con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, es decir,

$$C_r(K) = \left\{ \sum_{i=1}^k \sigma_i : \sigma_i \in K_r, \forall i = 1, \dots, k \right\}.$$

A los elementos de $C_r(K)$ les llamamos **cadenas de K de dimensión r** . La suma en $C_r(K)$ se realiza tal como se definió en la Sección 3, como si las cadenas fueran polinomios pero implementando en los coeficientes la aritmética de $\mathbb{Z}_2$.

Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_r \rangle$, con $r \geq 1$. Se define la r –**ésima frontera** de σ (con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$), denotada por $\partial_r \sigma$, como

$$\partial_r \sigma = \sum_{i=0}^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle,$$

donde $\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle$ denota al simplejo que se obtiene removiendo al punto v_i del conjunto $\{v_0, \dots, v_r\}$. En el caso de un 0–simplejo $\sigma = \langle v_0 \rangle$, definimos $\partial_0 \sigma = 0$. En la Tabla 1 se observan algunos ejemplos de fronteras.

Tabla 1: Algunas fronteras de simplejos

σ	$\partial_r \sigma$
$\langle v_0 \rangle$	0
$\langle v_0, v_1 \rangle$	$\langle v_1 \rangle + \langle v_0 \rangle$
$\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$	$\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$
$\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$	$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle + \langle v_0, v_2, v_3 \rangle + \langle v_0, v_1, v_3 \rangle + \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$

Notemos que si σ es un r –simplejo, entonces $\partial_r \sigma \in C_{r-1}(K)$. Por lo que podemos extender ∂_r a la función $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ definiendo $\partial_r(\sum_{i=1}^k \sigma_i) := \sum_{i=1}^k \partial_r \sigma_i$, para toda cadena $(\sum_{i=1}^k \sigma_i) \in C_r(K)$. Así mismo, definimos $\partial_0 : C_0(K) \rightarrow \{0\}$ como la función cero. Para cada $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función ∂_r recibe el nombre de r –**ésimo operador frontera**. Asociados a los operadores frontera ∂_r tenemos los conjuntos:

$$\text{Ker} \partial_r = \{c \in C_r(K) : \partial_r c = 0\}$$

y

$$\text{Im} \partial_{r+1} = \{c \in C_r(K) : c = \partial_{r+1} d, \text{ para algún } d \in C_{r+1}(K)\}.$$

Mas aún, los operadores frontera satisfacen que cuando hacemos la composición de dos consecutivos, el resultado es la función cero (Ver [8], [13] o [10]), es decir,

$$\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0, \text{ para todo } r = 0, 1, 2, \dots$$

Como una consecuencia de esta propiedad tenemos que $\text{Im} \partial_{r+1} \subset \text{Ker} \partial_r$, para todo $r = 0, 1, 2, \dots$. En $\text{Ker} \partial_r$ definimos la relación de equivalencia:

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \text{existe } c \in C_{r+1}(K) \text{ tal que } \partial_{r+1} c = z_1 + z_2,$$

donde $z_1, z_2 \in \text{Ker} \partial_r$. Cuando dos elementos de $\text{Ker} \partial_r$ están relacionados decimos que son **homólogos**.

Ejemplo 5.1. Sea K un complejo simplicial y sea $\langle v_0, v_1 \rangle$ un 1-simplejo de K . Los 0-simplejos $\langle v_0 \rangle$ y $\langle v_1 \rangle$ son homólogos, pues $\partial_1 \langle v_0, v_1 \rangle = \langle v_1 \rangle + \langle v_0 \rangle$. De hecho, cualesquiera dos 0-simplejos en K que estén conectados por una sucesión finita de 1-simplejos, son homólogos.

Ejemplo 5.2. Considere el 2-simplejo $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$. En K_σ , la 1-cadena $\langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_0 \rangle$ es homóloga a la cadena 0, ya que

$$\partial_2 \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_0, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_0 \rangle + 0.$$

En general, para un r -simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_r \rangle$, la cadena $\sum_{i=0}^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle$ es homóloga a la cadena 0, pues

$$\partial_r \sigma = \sum_{i=0}^r \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r \rangle.$$

Como es usual en matemáticas, denotamos por $[z]$ al conjunto de elementos de $\text{Ker} \partial_r$ que están relacionados con z , es decir,

$$[z] = \{w \in \text{Ker} \partial_r : w \sim z\}.$$

A las clases de equivalencia de la relación de equivalencia $\sim$ definida anteriormente, les llamamos **clases de homología**, y denotamos con $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ al conjunto de dichas clases, es decir, $H_r(K, \mathbb{Z}_2) = \{[z] : z \in \text{Ker} \partial_r\}$.

En $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ la operación $[z_1] + [z_2] := [z_1 + z_2]$ no depende de los representantes de las clases, por lo cual, dicha operación está bien definida. Además esta operación es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene a $[0]$ como elemento neutro y cada clase $[z]$ tiene como inverso aditivo a la misma clase $[z]$, por lo que $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ junto con la operación $[z_1] + [z_2] = [z_1 + z_2]$ forman un grupo abeliano.

Definición 5.1. Sea K un complejo simplicial. Para cada $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el grupo $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ es el r -ésimo grupo de homología de K con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$.

En este punto también nos gustaría hacer énfasis, como se explica implícitamente en el Capítulo IV de [5], que para cada $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el grupo $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ es un grupo finitamente generado, es decir, existe un subconjunto finito E de $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$ tal que si $[z] \in H_r(K, \mathbb{Z}_2)$, entonces $[z] = \sum_{i=1}^k [g_i]$, para algunos $[g_i] \in E$.

En lo sucesivo, con el fin de simplificar la notación, escribiremos $H_r(K)$ en vez de $H_r(K, \mathbb{Z}_2)$.

Ejemplo 5.3. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ un n -simplejo, con $n \geq 1$. Tal como se establece en [8], los grupos de homología de K_σ y $K_{Fr(\sigma)}$ son los siguientes:

$$H_r(K_\sigma) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{si } r = 0, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

y

$$H_r(K_{Fr(\sigma)}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{si } r \in \{0, n-1\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el caso de $H_0(K_\sigma)$ y $H_0(K_{Fr(\sigma)})$, la clase de homología de cualquier vértice funciona como un generador de estos grupos de homología, mientras que para $H_{n-1}(K_{Fr(\sigma)})$ un generador es

$$\sum_{i=0}^n [\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle].$$

Por hechos como los mostrados en los ejemplos 5.1, 5.2 y 5.3 es común pensar que el r -ésimo grupo de homología en cierta manera detecta los “agujeros r -dimensionales” que tiene un espacio topológico.

6. Homología persistente

La homología persistente puede definirse para diversos tipos de complejos simpliciales, sin embargo, con la finalidad de realizar una mejor exposición de la misma, en este artículo sólo abordaremos la homología persistente de los complejos de Vietoris-Rips asociados a un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^k$. Así mismo, para seguir usando la definición que tenemos de complejo simplicial y evitar introducir los complejos simpliciales abstractos, los cuales forman parte del enfoque usual que se sigue en la literatura, presentamos una definición equivalente del Complejo de Vietoris-Rips que nos permite considerar a los elementos de dicho complejo como simplejos geométricos contenidos en un espacio euclidiano. Recomendamos consultar [5] o [2] a los lectores que estén interesados en un tratamiento más profundo de estos temas.

Dados $p \in \mathbb{R}^k$ y $\varepsilon > 0$, se define la **bola cerrada con centro en p y radio r** , denotada por $B_\varepsilon(p)$, como

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^k : \|p - q\| \leq \varepsilon\},$$

donde $\|\cdot\|$ denota a la norma euclidiana.

Definición 6.1. Sea $X = \{p_0, \dots, p_k\}$ un conjunto de $k + 1$ puntos en $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto $VR_\varepsilon(X)$ de la siguiente manera:

Paso 1: Por cada punto p_i de X , elegimos un punto v_i de $\mathbb{R}^k$ de tal forma que los puntos $v_0, \dots, v_k$ estén en posición general en $\mathbb{R}^k$. Estos puntos v_i serán los únicos vértices de $VR_\varepsilon(X)$.

Paso 2: Si $p_{i_0}, \dots, p_{i_m}$ son puntos en X y cualesquiera dos de ellos, digamos p_{i_s} y p_{i_t} , satisfacen que $B_\varepsilon(p_{i_s}) \cap B_\varepsilon(p_{i_t}) \neq \emptyset$, agregamos un m -simplejo a $VR_\varepsilon(X)$ que tenga como vértices a los puntos $v_{i_0}, \dots, v_{i_m}$, donde estos puntos v_{i_j} son como en el punto anterior.

En la Figura 3 mostramos un ejemplo de esta construcción. De la definición 6.1, se sigue que $VR_\varepsilon(X)$ está contenido en K_σ , el complejo simplicial asociado al k -simplejo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$. De hecho, dado que X es finito, existe una constante $C > 0$ para el cual $VR_\varepsilon(X) = K_\sigma$, para todo $\varepsilon > C$.

Teorema 6.1. El conjunto $VR_\varepsilon(X)$ es un complejo simplicial.

Demostración. Dado que $VR_\varepsilon(X) \subset K_\sigma$, basta probar por la Proposición 4.1 que para todo simplejo $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$ de $VR_\varepsilon(X)$ se cumple que sus caras también pertenecen a $VR_\varepsilon(X)$. Sea $\langle w_{j_0}, \dots, w_{j_s} \rangle$ una cara de $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$. Sean $p_{i_0}, \dots, p_{i_m}$ los puntos de X que están en correspondencia con los puntos $v_{i_0}, \dots, v_{i_m}$ de $VR_\varepsilon(X)$, respectivamente. En particular, sean $p_{j_0}, \dots, p_{j_s}$ los puntos en correspondencia con $w_{j_0}, \dots, w_{j_s}$, respectivamente. Por definición de cara, tenemos que $\{w_{j_0}, \dots, w_{j_s}\} \subset \{v_{i_0}, \dots, v_{i_m}\}$ y, en consecuencia, $\{p_{j_0}, \dots, p_{j_s}\} \subset \{p_{i_0}, \dots, p_{i_m}\}$. Por construcción, los puntos $p_{i_0}, \dots, p_{i_m}$ satisfacen que $B_\varepsilon(p_{i_s}) \cap B_\varepsilon(p_{i_t}) \neq \emptyset$, para cualesquiera $p_{i_s}, p_{i_t} \in \{p_{i_0}, \dots, p_{i_m}\}$, por lo que, en particular, cualesquiera dos elementos de $\{p_{j_0}, \dots, p_{j_s}\}$ también satisfacen lo mismo.

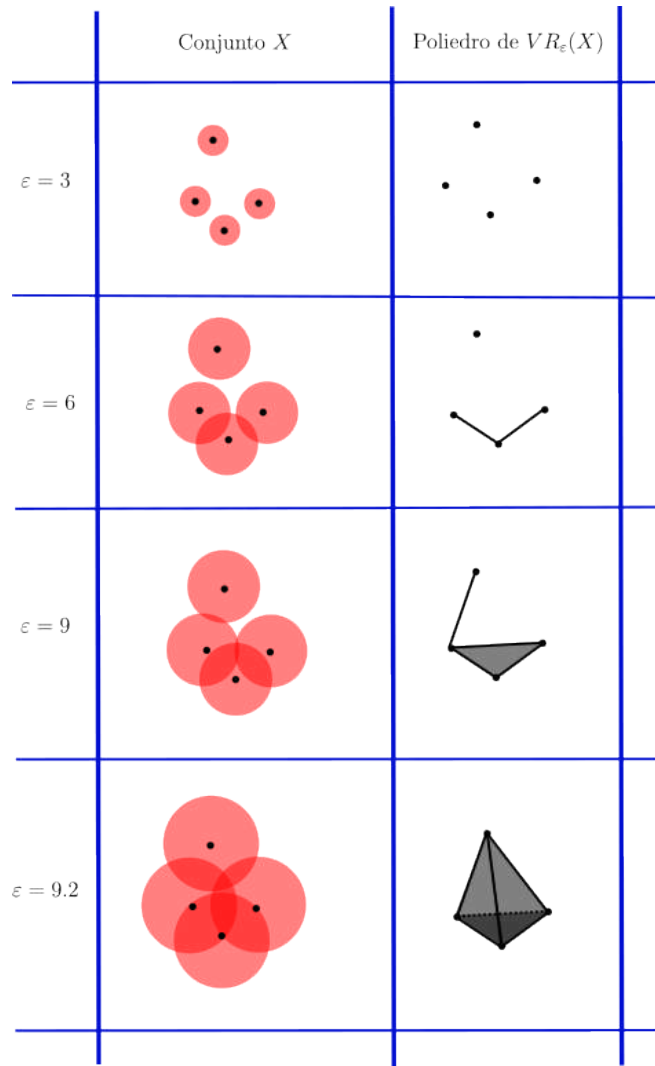


Figura 3: Ejemplo de construcción de $VR_\varepsilon(X)$.

Por lo tanto, $\langle w_{j_0}, \dots, w_{j_s} \rangle$ también pertenece a $VR_\varepsilon(X)$ y, por tanto, $VR_\varepsilon(X)$ es un complejo simplicial. $\square$

Al complejo simplicial $VR_\varepsilon(X)$ se le conoce como el **complejo de Vietoris-Rips de X con radio ε** . La condición $B_\varepsilon(p_{i_s}) \cap B_\varepsilon(p_{i_t}) \neq \emptyset$ en el *Paso 2* de la Definición 6.1, es equivalente a que p_{i_s} y p_{i_t} están a una distancia menor o igual que 2ε , que es como aparece en algunas de las referencias (Ver [5]).

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, y $VR_{\varepsilon_1}(X)$, $VR_{\varepsilon_2}(X)$, los respectivos complejos de Vietoris-Rips de X con radio ε_1 y ε_2 . Notemos que si $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$ es un simplejo de $VR_{\varepsilon_1}(X)$, por construcción, existen puntos $p_{i_0}, \dots, p_{i_m} \in X$ tales que $B_{\varepsilon_1}(p_{i_s}) \cap B_{\varepsilon_1}(p_{i_t}) \neq \emptyset$, para cualesquiera $p_{i_s}, p_{i_t} \in \{p_{i_0}, \dots, p_{i_m}\}$. Luego, puesto que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, tenemos que $B_{\varepsilon_1}(p_{i_j}) \subset B_{\varepsilon_2}(p_{i_j})$, para todo $j = 0, \dots, m$; por lo que $\emptyset \neq B_{\varepsilon_1}(p_{i_s}) \cap B_{\varepsilon_1}(p_{i_t}) \subset B_{\varepsilon_2}(p_{i_s}) \cap B_{\varepsilon_2}(p_{i_t})$. De esta forma, $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_m} \rangle$ también es un simplejo de $VR_{\varepsilon_2}(X)$. Así hemos probado que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $VR_{\varepsilon_1}(X) \subset VR_{\varepsilon_2}(X)$. En

general, tenemos que dados

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_k,$$

éstos inducen una **filtración** en los respectivos complejos de Vietoris-Rips, es decir, tenemos que

$$VR_{\varepsilon_1}(X) \subset VR_{\varepsilon_2}(X) \subset \cdots \subset VR_{\varepsilon_k}(X).$$

Mas aún, las contenciones anteriores inducen funciones $\varphi_j : C_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \rightarrow C_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$, definidos por $\varphi_j \left(\sum_{s=1}^m c_s \right) = \sum_{s=1}^m c_s$, para cada $j \in \{1, \dots, k-1\}$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Algunas de las propiedades importantes de estas funciones φ_j son las siguientes:

1. $\varphi_j(c) = c$, para cada $c \in C_r(VR_{\varepsilon_j}(X))$ y $j \in \{1, \dots, k-1\}$
2. $\varphi_j(c_1 + c_2) = \varphi_j(c_1) + \varphi_j(c_2)$, para cualesquiera $c_1, c_2 \in C_r(VR_{\varepsilon_j}(X))$
3. $\varphi_j(Ker \partial_r) \subset Ker \partial_r$
4. $\varphi_j(Im \partial_{r+1}) \subset Im \partial_{r+1}$.

Por lo anterior, las funciones $\varphi_j : C_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \rightarrow C_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$ a su vez inducen funciones

$$(\varphi_j)_* : H_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \rightarrow H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$$

definidas por $(\varphi_j)_*([c]) = [\varphi_j(c)]$, para cada $c \in Ker \partial_r$.

Notemos que puede ocurrir que una clase $[d]$ de $H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$ no pertenezca a la imagen de $(\varphi_j)_*$, en este caso decimos que la clase $[d]$ **nace** en $VR_{\varepsilon_{j+1}}(X)$. Por otra parte, si $[c]$ es una clase de $H_r(VR_{\varepsilon_j}(X))$, podría ocurrir que $(\varphi_j)_*([c])$ sea igual a una clase $[d]$ de $H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X))$ nacida antes que $[c]$, cuando esto ocurre decimos que la clase $[c]$ **muere** en $VR_{\varepsilon_{j+1}}(X)$. Por construcción, los 0-simplejos $\langle v_0 \rangle, \dots, \langle v_k \rangle$ de $VR_{\varepsilon}(X)$ nacen todos al mismo tiempo, por lo que en este caso, por convención, morirá el vértice que tenga el índice mayor. En la Figura 4 podemos apreciar como al pasar de $\varepsilon = 6$ a $\varepsilon = 9$, el generador $[\langle v_3 \rangle]$ del 0-ésimo grupo de homología se muere.

De esta manera, dados $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_k$, tenemos funciones

$$H_r(VR_{\varepsilon_1}(X)) \xrightarrow{(\varphi_1)_*} \cdots \xrightarrow{(\varphi_{j-1})_*} H_r(VR_{\varepsilon_j}(X)) \xrightarrow{(\varphi_j)_*} H_r(VR_{\varepsilon_{j+1}}(X)) \xrightarrow{(\varphi_{j+1})_*} \cdots \xrightarrow{(\varphi_{k-1})_*} H_r(VR_{\varepsilon_k}(X)),$$

y la homología persistente hace un seguimiento de como van naciendo y muriendo los generadores de los grupos de homología. Esto se realiza, ya sea por medio de un diagrama de persistencia o mediante un código de barras de persistencia. El **diagrama de persistencia** es un conjunto finito de puntos en $[0, \infty) \times [0, \infty]$. La primera coordenada de estos puntos representa el momento en que un generador nace, mientras que la segunda coordenada representa cuando dicho generador muere. Como habíamos mencionado antes, la homología detecta los agujeros del espacio, por lo que los generadores de la homología que **persisten** durante más tiempo, permiten entender la configuración o la forma en la que están distribuidos los puntos del conjunto X en $\mathbb{R}^k$. Por ejemplo, la persistencia de los generadores del 0-ésimo grupo de homología nos indican que tan dispersos están los puntos de X ; en cambio la persistencia de los generadores del primer grupo de homología podría indicar la forma en que dichos puntos estan agrupados. Vale la pena hacer notar que en ocasiones también es interesante hacer un seguimiento de las clases con baja persistencia, pues estas están asociadas con el *ruido* de los datos, ver, por ejemplo, [1].

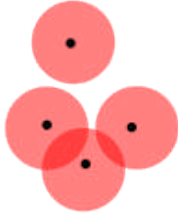
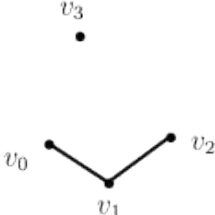
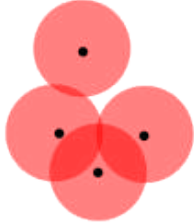
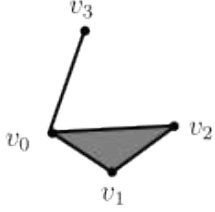
	Conjunto X	Poliedro de $VR_\varepsilon(X)$	Generadores de $H_r(VR_\varepsilon(X))$
$\varepsilon = 6$			$r = 0 : [\langle v_0 \rangle], [\langle v_3 \rangle]$ $r = 1 : [0]$ $r = 2 : [0]$
$\varepsilon = 9$			$r = 0 : [\langle v_0 \rangle]$ $r = 1 : [0]$ $r = 2 : [0]$

Figura 4: Nacimiento y muerte de generadores de $H_r(VR_\varepsilon(X))$.

7. Obtención de diagramas de persistencia usando Python

Python es uno de los lenguajes de programación más usados en la actualidad, por esa razón cuenta con una cantidad enorme de bibliotecas y paquetes con los que puede equiparse [6]. Entre estos podemos encontrar a *Ripser* [12], *Persim* [1], *numpy*, y *matplotlib*. En esta sección nos enfocaremos en el uso de estas bibliotecas para la construcción del diagrama de persistencia. La biblioteca *Ripser*, en particular, para su implementación construye el complejo de Vietoris-Rips de un conjunto de datos X y no permite la construcción de otro tipo de complejos simpliciales (Cech, cúbicos, etc). Todos los códigos de esta sección se encuentran en el repositorio: <https://github.com/amayler/homologiaPersistente>

Ejemplo 7.1. Generadores del 0-ésimo grupo de homología. En este ejemplo aplicamos *Ripser* para obtener el diagrama de persistencia del conjunto *data*, que consiste de 200 puntos en el plano. Las coordenadas de los puntos de *data* varían en un rango de 1-1000 o 2000-3000. El código en Python para realizar todo lo anterior es el siguiente:

```
#####
# Importamos las bibliotecas necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from ripser import ripser
from persim import plot_diagrams
#####
```

```
#####
# Fijamos una semilla para que los resultados sean
# reproducibles
np.random.seed(0)
#####

#####
# Generamos 100 puntos aleatorios en el plano, cuyas
# coordenadas en X y Y varían en el rango 1-1000
# Estos puntos los guardamos en la variable 'data1'
data1=np.random.randint(1,1000,(100,2))

# Generamos 100 puntos aleatorios en el plano, cuyas
# coordenadas en X y Y varían en el rango 2000-3000
# Estos puntos los guardamos en la variable 'data2'
data2=np.random.randint(2000,3000,(100,2))

# Finalmente, con data1 y data2 formamos el conjunto de
# puntos 'data', al cual le aplicaremos las técnicas
# de homología persistente

data=np.vstack((data1,data2))
#####

#####
# Graficamos los puntos del conjunto 'data'
x,y=data.T
plt.plot(x,y,'ro')
plt.show()
#####

#####
# Pedimos a Ripser que haga el diagrama de persistencia
# asociado a los puntos almacenados en 'data'
diagrams=riper(data)['dgms']
plot_diagrams(diagrams,show=True)
#####
```

Compilamos el código anterior y en la Figura 5 presentamos los puntos del conjunto data, mientras que el diagrama de persistencia del conjunto data se muestra en la Figura 6. Tal como puede apreciarse en la Figura 5, los puntos del conjunto data están distribuidos en los rectángulos $[1, 1000] \times [1, 1000]$ y $[2000, 3000] \times [2000, 3000]$. Esto se ve reflejado en el diagrama de persistencia de la Figura 6, pues como se puede apreciar en él hay dos generadores del 0-ésimos grupos de homología que permanecen vivos mucho más tiempo que los otros. Estos puntos están representados por puntos azules de altura mayor a 1500.

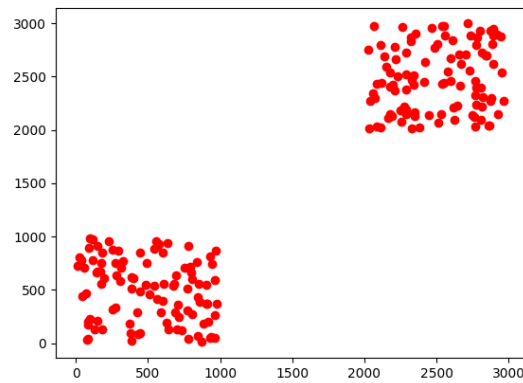


Figura 5: Puntos del conjunto *data* del ejemplo 7.1.

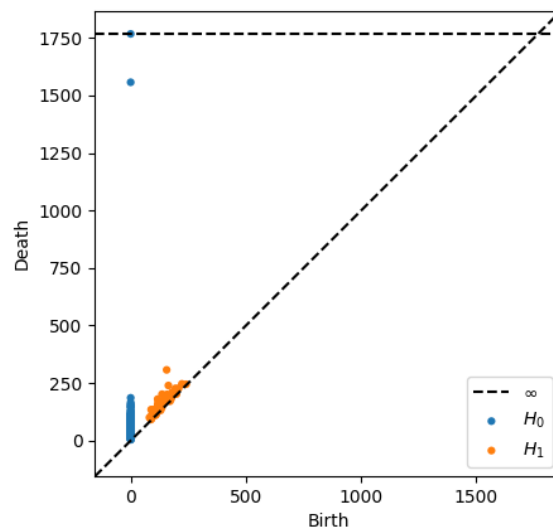


Figura 6: Diagrama de persistencia del conjunto *data* del ejemplo 7.1.

Veamos ahora un ejemplo que nos permita entender cómo funcionan los generadores del primer grupo de homología.

Ejemplo 7.2. *Generadores del primer grupo de homología.* Para este ejemplo usamos el siguiente código:

```
#####
# Importamos las bibliotecas necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from ripser import ripser
from persim import plot_diagrams
#####
```

```
#####
# Fijamos una semilla para que los resultados sean
# reproducibles
np.random.seed(0)
#####

#####
# Generamos un conjunto aleatorio 'data'
x1=np.random.randint(1,100,(100,1))
y1=np.random.randint(100,200,(100,1))
data1=np.vstack((x1.T,y1.T)).T

x2=np.random.randint(100,200,(100,1))
y2=np.random.randint(200,300,(100,1))
data2=np.vstack((x2.T,y2.T)).T

x3=np.random.randint(200,300,(100,1))
y3=np.random.randint(100,200,(100,1))
data3=np.vstack((x3.T,y3.T)).T

x4=np.random.randint(100,200,(100,1))
y4=np.random.randint(1,100,(100,1))
data4=np.vstack((x4.T,y4.T)).T

data_uno=np.vstack((data1,data2)).T
data_dos=np.vstack((data3,data4)).T
data=np.vstack((data_uno.T,data_dos.T))
#####

#####
# Graficamos los puntos del conjunto 'data'
x,y=data.T
plt.plot(x,y,'ro')
plt.show()
#####

#####
# Pedimos a Ripser que haga el diagrama de persistencia
# asociado a los puntos almacenados en 'data'
diagrams=ripser(data)['dgms']
plot_diagrams(diagrams,show=True)
#####
```

Al compilar nuestro código obtenemos los puntos mostrados en la Figura 7. En la Figura 8, los puntos naranjas representan la persistencia de los generadores del primer grupo de homología. En esta misma figura hay un punto naranja que tiene altura mayor a 100, muy distante de los otros puntos naranjas. Dicho punto naranja refleja la existencia de un generador del primer grupo de homología que persiste durante mucho tiempo, esto se debe a que el conjunto data está agrupado alrededor de una elipse, como se muestra en la Figura 9.

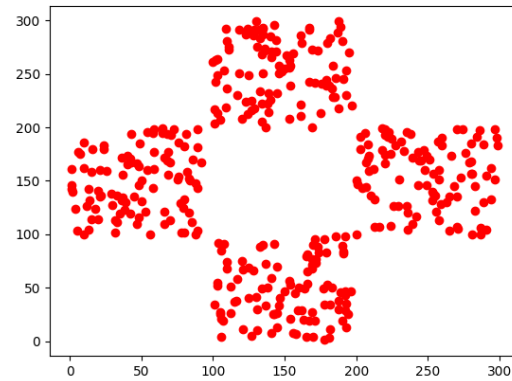


Figura 7: Puntos del conjunto *data* del ejemplo 7.2.

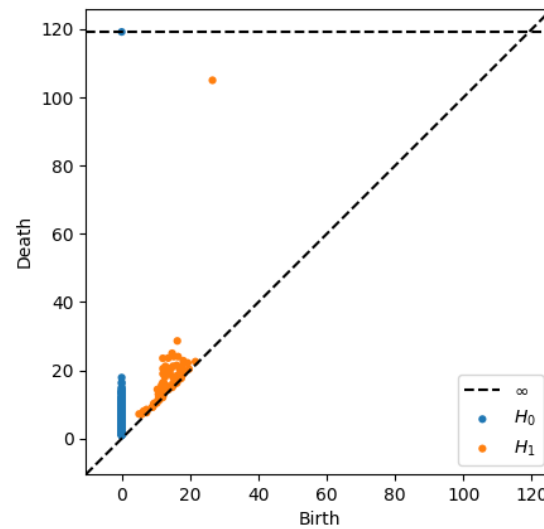


Figura 8: Diagrama de persistencia del conjunto *data* del ejemplo 7.2.

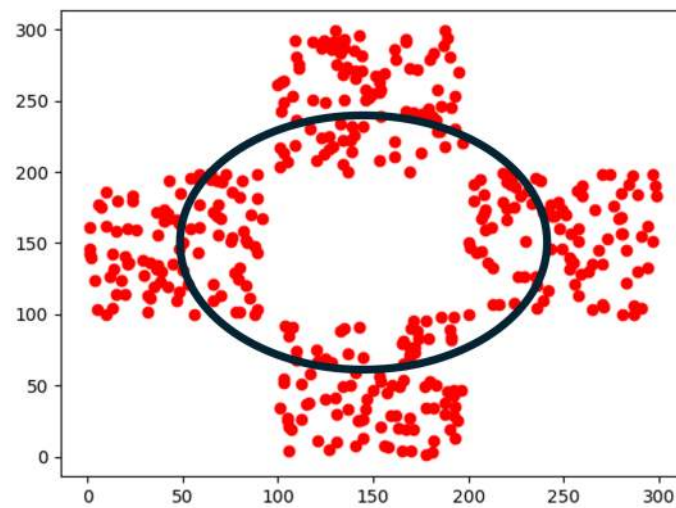


Figura 9: Conjunto *data* del ejemplo 7.2 agrupados en torno a una elipse.

8. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, presentamos los complejos de Vietoris-Rips y la homología persistente asociada a un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^k$. Además, se mostraron un par de ejemplos de cómo se usan algunos paquetes de Python para obtener el diagrama de persistencia de un conjunto de datos y la forma en que se interpreta el diagrama de persistencia. Es necesario mencionar, que a pesar de que en los ejemplos se usaron conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^2$, Ripser es capaz de trabajar con conjuntos de puntos contenidos en espacios euclidianos de dimensiones mayores a 2.

9. Agradecimientos

Los autores agradecen al Lic. en Mat. Ronaldo Álvarez Rivera por las pláticas enriquecedoras sobre complejos simpliciales, y a los revisores de la revista por todas las sugerencias realizadas para el mejoramiento de este trabajo.

10. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

11. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

12. Resumen gráfico

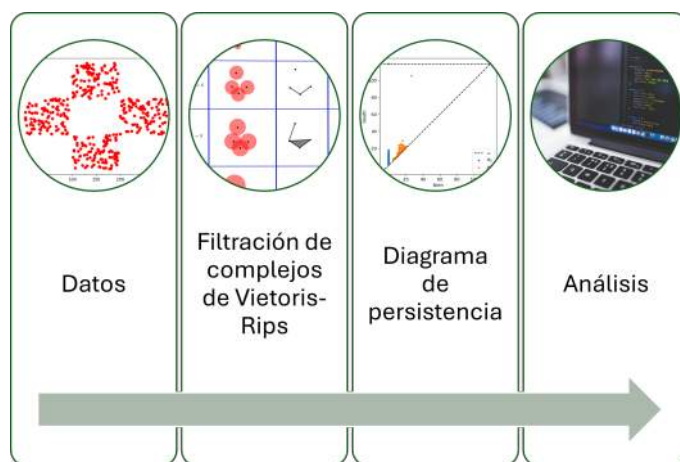


Figura 10: Homología persistente para el análisis de datos

13. Roles de contribución

ROL	AUTORES(AS)
Conceptualización	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Curación de datos	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Juan Roberto Hernández Garibay
Análisis formal	Jair Remigio Juárez Raymundo Domínguez Colín Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Investigación	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Metodología	Jair Remigio Juárez Raymundo Domínguez Colín Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Software	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Validación	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Juan Roberto Hernández Garibay
Visualización	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Juan Roberto Hernández Garibay
Escritura-borrador-original	Jair Remigio Juárez Raymundo Domínguez Colín Lil María Xibai Rodríguez Henríquez
Escritura-revisión-edición	Jair Remigio Juárez María Hortensia Almaguer Cantú Raymundo Domínguez Colín Juan Roberto Hernández Garibay Lil María Xibai Rodríguez Henríquez

Referencias

- [1] Henry Adams, Timothy Emerson, Michael Kirby, Rachel Neville, Chris Peterson, Patrick Shipman, Sofya Chepushtanova, Eric Hanson, Francesco Motta, and Lori Ziegelmeier. Persistence images: A stable vector representation of persistent homology. *Journal of Machine Learning Research*, 18(8):1–35, 2017.

- [2] Gunnar Carlsson. Topology and data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2):255–308, 2009.
- [3] Gunnar Carlsson, Tigran Ishkhanov, Vin De Silva, and Afra Zomorodian. On the local behavior of spaces of natural images. *International journal of computer vision*, 76:1–12, 2008.
- [4] Edelsbrunner, Letscher, and Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete & computational geometry*, 28(4):511–533, 2002.
- [5] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Computational topology: an introduction*. American Mathematical Soc., 2010.
- [6] Python Software Foundation. *Python Programming Language*. Python Software Foundation, USA, 1991.
- [7] John B Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.
- [8] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2005.
- [9] Israel N Herstein. *Abstract algebra*. John Wiley & Sons, 1996.
- [10] William S Massey. *A basic course in algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1991.
- [11] Chad M Topaz, Lori Ziegelmeier, and Tom Halverson. Topological data analysis of biological aggregation models. *PloS one*, 10(5):e0126383, 2015.
- [12] Christopher Tralie, Nathaniel Saul, and Rann Bar-On. Ripser.py: A lean persistent homology library for python. *The Journal of Open Source Software*, 3(29):925, Sep 2018.
- [13] James W Vick. *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, volume 145. Springer Science & Business Media, 2012.