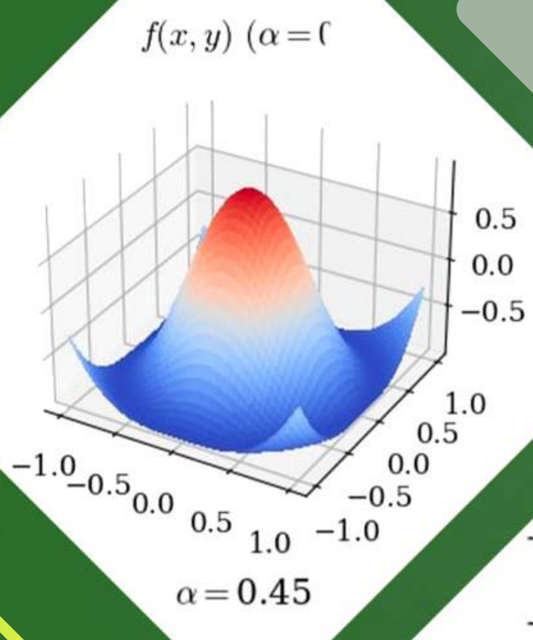
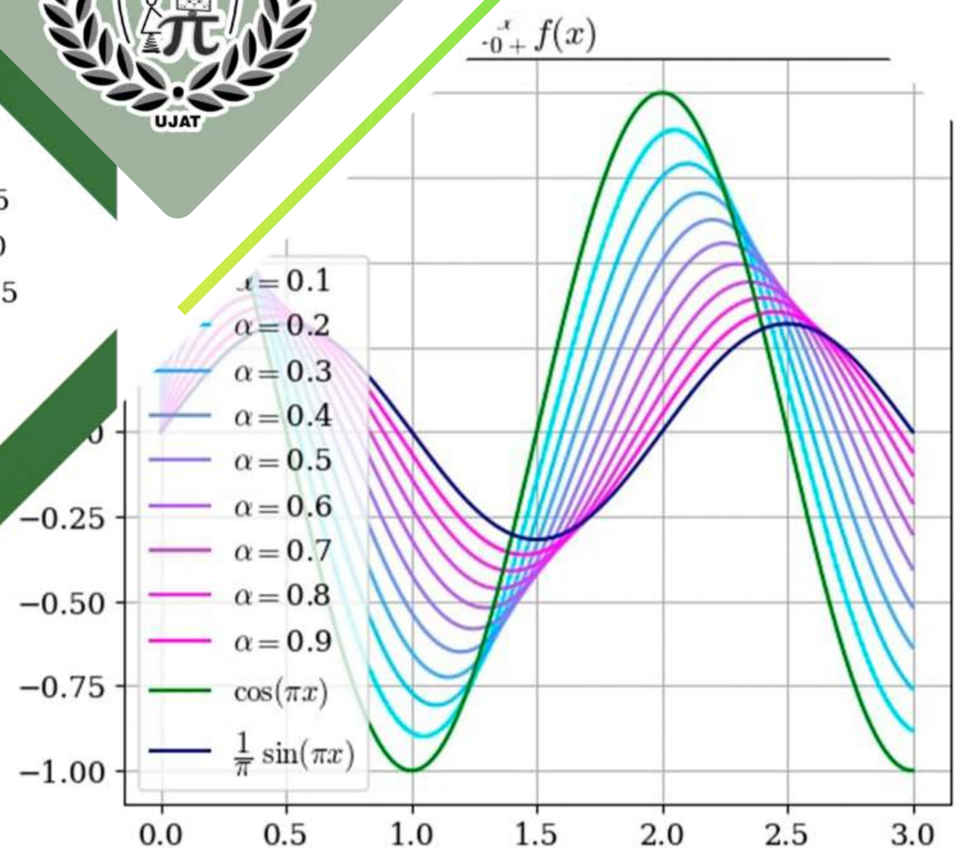
Volumen 11 número 30 enero-abril 2025

UJAT
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"

JOBS
Journal of Basic Sciences
DACB · UJAT





ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

UJAT
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"
JOBS Journal of Basic Sciences

Con el número 30 del Journal of Basic Sciences, se inicia el volumen 11 de esta revista correspondiente al año 2025. El carácter multidisciplinario de esta revista, permite enriquecer su contenido con perspectivas variadas que abordan diversas problemáticas en el área de las ciencias básicas y disciplinas afines.

De esta forma, se presenta una contribución que desarrolló generalizaciones en cálculo multivariable para llegar a nuevas diferenciales totales fraccionarias, las cuales juegan un papel importante en la modelación de gran número de fenómenos. Por otro lado, se incluye también una aportación que trata sobre el desarrollo de un método para resolver la ecuación de transporte conservativa en dominios específicos, incluyendo su validación y prueba para demostrar sus capacidades.

Se incluye además, un reporte encaminado a mejorar la calidad de imágenes, mediante técnicas de discretización numérica presentando una evaluación cualitativa y cuantitativa de los resultados obtenidos. En otro orden de ideas, se centra la atención hacia el estudio de sistemas aleatorios y la complejidad en su modelación, mostrando un estudio inferencial para un proceso de Poisson mixto, que lleva a la obtención de expresiones para densidad predictiva.

Es innegable que el aprendizaje de las matemáticas representa un reto actual que no debe soslayarse. En este sentido, se incluye un estudio que muestra la relación entre el desarrollo de la memoria de trabajo y el aprendizaje de identidades trigonométricas por parte de jóvenes del nivel medio superior, mostrando los subcomponentes necesarios en el razonamiento para el aprendizaje de este tema. En otra contribución relativa a la matemática educativa, se presenta una propuesta para atender el aprendizaje de los polígonos por estudiantes de bachillerato, mediante una serie de actividades diseñadas ex profeso que permiten una mejora en la comprensión de la temática.

En un contexto diferente, está el estudio dirigido a evaluar la actividad antibacteriana de extractos de plantas del género Cecropia, de uso tradicional en el sureste mexicano, correlacionando esta propiedad con el perfil fitoquímico analizado. Se presenta además, una contribución encaminada a analizar el impacto, que en los últimos años, han ocasionado derrames petroleros en el sureste mexicano, con especial énfasis en la afectación a cultivos agrícolas.

La atención de problemas de salud está dada a través de dos artículos que forman parte de este número. Por un lado, se comparó la resistencia a la insulina a través de índices específicos en momentos anteriores y durante la pandemia de COVID-19; en otro aporte, se analiza la relación entre diversos factores de riesgo asociados a la población joven y la enfermedad de Chagas. Mientras que en el área de la ciencia de los materiales, se incluye una propuesta para la obtención de derivados de poliuretano, con un método eficiente y compacto.

De esta forma el Journal of Basic Sciences acerca a sus lectores al amplio panorama del quehacer científico.

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional
División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 30, abril de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.

CONTENIDO

ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

Vol. 11(30), p. 45–59, enero-abril 2025, e-ISSN: 2448-4997
JOURNAL OF BASIC SCIENCES

Inferencia bayesiana sobre el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto-gamma

Pérez-Reyes L.[1,*], **Argáez-Sosa J.**[1], **Pantí-Trejo H.**[1]

[1] *Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. Anillo Periférico Norte, Tablaje Cat. 13615, Colonia Chuburná Hidalgo Inn, Mérida, Yucatán, México*

[*] *l.g.perez@outlook.com*

Resumen

En este trabajo, considerando un intervalo de tiempo fijo como periodo de observación, se realiza un estudio inferencial para estimar el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto, bajo el supuesto que la densidad *a priori* es gamma. Se calculan los estimadores de densidad *a posteriori* y de Bayes para el parámetro de intensidad. De igual forma, se obtienen expresiones para la densidad predictiva para un nuevo tiempo entre ocurrencias, la distribución del número de eventos que ocurren en el intervalo de observación y la densidad conjunta de los tiempos entre ocurrencias de eventos.

Palabras claves: *Estadística Bayesiana, Proceso de Poisson mixto, Distribución gamma.*

Abstract

In this paper, considering a fixed time interval as the observation period, an inferential study is carried out to estimate the intensity parameter of a mixed Poisson process, under the assumption that the *a priori* density is gamma. The *a posteriori* density and Bayes estimators for the intensity parameter are calculated. Similarly, expressions are obtained for the predictive density for a new time between occurrences, the distribution of the number of events that occur in the observation interval and the joint density of the times between occurrences of events.

Keywords: *Bayesian statistics, Mixed Poisson process, Gamma distribution.*

Recibido: 2 de diciembre de 2024. Aceptado: 11 de marzo de 2025. Publicado: 30 de abril de 2025.

1. Introducción

En el estudio de sistemas o fenómenos cuyo comportamiento es aleatorio a través del tiempo, la teoría de procesos estocásticos ha sido fundamental para modelarlos. La mayoría de los modelos estocásticos son caracterizados por parámetros y las cantidades de interés son determinadas por estos parámetros. En las aplicaciones, estos parámetros son desconocidos por lo que se requieren metodologías o procedimientos para su estimación.

De la gran variedad de modelos estocásticos que han sido estudiados, el proceso de Poisson homogéneo ha recibido especial atención. El proceso de Poisson homogéneo es mayormente utilizado como modelo para contar el número de eventos que han ocurrido en un sistema, usualmente a través del tiempo. Además de las propiedades que lo definen, el proceso de Poisson homogéneo está definido por un solo parámetro, el cual es llamado intensidad y se interpreta como la tasa o promedio en la que estos eventos ocurren y se supone que es constante. Sin embargo, debido a que existen sistemas en los cuales la tasa a la cual ocurren los eventos no se puede suponer constante, es pertinente considerar la intensidad aleatoria. Cuando esto ocurre, el proceso estocástico resultante es conocido como proceso de Poisson mixto. Al suponer que en un proceso de Poisson la intensidad es aleatoria, se considera una distribución de probabilidad para la tasa del proceso de Poisson. Lo anterior motiva para abordar el estudio inferencial para el proceso de Poisson mixto bajo un enfoque bayesiano, considerando una distribución *a priori* para la intensidad.

En este artículo se estudia el proceso de Poisson mixto suponiendo que la intensidad del proceso sigue una distribución *a priori* gamma y se considera que el proceso de Poisson mixto es observado en un intervalo de longitud fija $[0, T^*]$. Se realizará inferencia para el parámetro de intensidad, esto es, se calculará la distribución *a posteriori*, la distribución predictiva para un nuevo tiempo entre ocurrencias y la distribución del número total de eventos que ocurren en el intervalo $[0, T^*]$.

El artículo está organizado como sigue: en la Sección 2 se presentan las definiciones y resultados que se utilizarán en la siguiente sección. En la Sección 3 se calcula la densidad *a posteriori*, las reglas de Bayes y la distribución predictiva del nuevo tiempo entre ocurrencias de un evento. Finalmente en la Sección 4 se escriben algunas conclusiones de este trabajo.

2. Preliminares

En esta sección se proporcionan los elementos principales que serán utilizados en este trabajo, los cuales corresponden a la densidad gamma, la densidad beta-prima, el proceso de Poisson homogéneo y el proceso de Poisson mixto. Se enunciarán y en algunos casos se demostrarán las propiedades más importantes que serán utilizadas en este artículo.

Distribución gamma

Se dice que una variable aleatoria Λ sigue una distribución gamma con parámetros $\alpha, \beta > 0$, si su función de densidad está dada por

$$f_\Lambda(\lambda \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}, \quad \lambda > 0,$$

donde $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ es la función gamma.

Los momentos de una variable aleatoria gamma de orden k existen y están dados por

$$\mathbb{E}(\Lambda^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\beta^k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta^k. \tag{1}$$

Al igual, la media y varianza son:

$$\mathbb{E}(\Lambda) = \alpha\beta, \quad \mathrm{Var}(\Lambda) = \alpha\beta^2. \tag{2}$$

Finalmente, la moda está dada por

$$\mathrm{Moda}(\Lambda) = \beta(\alpha-1), \quad \alpha > 1. \tag{3}$$

Distribución beta-prima

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución beta-prima con parámetros $a, b > 0$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(x \mid a, b) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1+x)^{-a-b}, \quad 0 < x < \infty,$$

donde $B(a,b) := \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ es la función beta.

La función de distribución acumulada de una variable beta-prima está dada por

$$F_X(x \mid a, b) = \frac{\int_0^{\frac{x}{1+x}} y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy}{B(a,b)}.$$

Los momentos de orden k, la media y la varianza son:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^k) &= \frac{B(a+k, b-k)}{B(a,b)}, \quad b > k, \\
\mathbb{E}(X) &= \frac{a}{b-1}, \quad b > 1, \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}, \quad b > 2.
\end{aligned}$$

Para mayor información de estos resultados, ver [1].

Proceso de Poisson homogéneo

Para definir un proceso de Poisson mixto, primero definimos un proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$ (también llamada tasa). Un proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ es un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados $E = \{0, 1, \ldots\}$, para el cual se cumplen las siguientes condiciones (ver [2]):

(i) $X_0 = 0$;

(ii) Para cualesquiera tiempos $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, los incrementos del proceso

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son variables aleatorias independientes;

(iii) Para $s \geq 0$ y $t > 0$, la variable aleatoria $X_{s+t} - X_s$ tiene distribución Poisson con parámetro λt, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(X_{s+t} - X_s = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

De manera resumida, el proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$ es un proceso estocástico que inicia en cero cuyos incrementos son independientes y estacionarios. Además, si X_t representa el número de eventos ocurridos hasta el instante t, debido a que X_t es una variable aleatoria Poisson con parámetro λt, se sigue $\mathbb{E}(X_t) = \lambda t$, por lo que λ se interpreta como la tasa con la cual ocurren los eventos por unidad de tiempo.

Ahora bien, si los eventos de interés ocurren en los tiempos aleatorios $T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n, \cdots$, donde por convención $T_0 = 0$, los tiempos entre ocurrencias de los eventos del proceso son definidos por:

$$W_n = T_n - T_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

de tal forma que el tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento se puede escribir como:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i, \quad n \geq 1.$$

Entonces X_t se puede escribir como:

$$X_t = \text{máx}\{m : T_m \leq t\} = \text{máx}\left\{m : \sum_{k=1}^{m} W_k \leq t\right\}, \quad t > 0.$$

Ya que en el proceso de Poisson homogéneo se supone que $W_1, W_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes exponenciales con media λ^{-1}, entonces el proceso de Poisson homogenéo es un proceso de contar con tiempos entre ocurrencias de eventos independientes exponenciales con media λ^{-1}. Es conocido que la distribución exponencial cumple la propiedad de pérdida de memoria, a saber, si W es una variable aleatoria exponencial con media λ^{-1}, entonces

$$\mathbb{P}(W > t + s \mid W > s) = \mathbb{P}(W > t), \quad s, t > 0. \tag{4}$$

La propiedad de pérdida de memoria de una variable aleatoria exponencial permite establecer el Teorema 2.1, el cual se utilizará en la Sección 3 para calcular la distribución predictiva de la siguiente observación del proceso. Este resultado es ampliamente utilizado en la teoría de procesos de Poisson, sin embargo, en la revisión realizada por los autores, no se encontró prueba alguna del mismo, por tal razón, se escribe su demostración.

Teorema 2.1. *Sean $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$, T_n el tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento, W_{n+1} el tiempo entre las ocurrencias del n-ésimo y el $(n+1)$-ésimo eventos y $T^* > 0$. Entonces:*

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t \mid W_{n+1} > T^* - T_n,\, T_n \leq T^*) = \mathbb{P}(W_{n+1} > t), \quad t > 0.$$

Demostración. Por definición de la probabilidad condicional,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t \mid W_{n+1} > T^* - T_n,\, T_n \leq T^*) \\
&= \frac{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t,\, W_{n+1} > T^* - T_n,\, T_n \leq T^*)}{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n,\, T_n \leq T^*)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t,\, T_n \leq T^*)}{\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n,\, T_n \leq T^*)}.
\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad del numerador es:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t,\, T_n \leq T^*) \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t,\, T_n \leq T^* \mid T_n = s) f_{T_n}(s) ds \\
&= \int_0^{T^*} \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - s + t) f_{T_n}(s) ds \\
&= \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^* - s + t)} f_{T_n}(s) ds \\
&= e^{-\lambda t} \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^* - s)} f_{T_n}(s) ds \\
&= \mathbb{P}(W_{n+1} > t) \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^* - s)} f_{T_n}(s) ds,
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se utilizó que W_{n+1} es independiente de $T^* - T_n$, ya que $T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$ y las W_i son independientes, y en la tercera igualdad que W_{n+1} es exponencial con parámetro λ^{-1}. Ahora bien, la probabilidad del denominador es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n,\, T_n \leq T^*) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n, T_n \leq T^* \mid T_n = s) f_{T_n}(s) ds \\ &= \int_0^{T^*} \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - s) f_{T_n}(s) ds \\ &= \int_0^{T^*} e^{-\lambda(T^* - s)} f_{T_n}(s) ds.\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo las probabilidades se obtiene

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - T_n + t \mid W_{n+1} > T^* - T_n,\, T_n \leq T^*) = \mathbb{P}(W_{n+1} > t), \quad t > 0,$$

lo que concluye la prueba. □

Proceso de Poisson mixto

La definición que habitualmente se presenta de un proceso de Poisson mixto involucra un proceso puntual, sin embargo, en este artículo debido a que se usarán las principales propiedades de un proceso de Poisson homogéneo, la definición de proceso de Poisson mixto que se proporcionará, considera un proceso de Poisson homogéneo (ver [3]).

Definición 2.1. *Sea Λ una variable aleatoria que toma valores en los números reales positivos. Sea $\{\widetilde{X}_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad 1 e independiente de Λ. Sea $X_t = \widetilde{X}_{\Lambda t}$, entonces el proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es llamado proceso de Poisson mixto.*

De la definición se sigue que si $\mathbb{E}(\Lambda)$ es finito, entonces $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\Lambda)t$. De esta manera, para un proceso de Poisson mixto, $\mathbb{E}(\Lambda)$ se interpreta como la tasa esperada de ocurrencia de eventos por unidad de tiempo.

Para un valor fijo de la intensidad Λ del proceso de Poisson mixto, los tiempos de ocurrencias y tiempos entre ocurrencias de eventos, siguen distribuciones conocidas, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad Λ. Entonces, condicionando a que $\Lambda = \lambda$, para todo $n \geq 1$:*

a) $W_1, \ldots, W_n$ son independientes y $W_i \sim Exp(\lambda^{-1})$ para todo $i \geq 1$, i.e.,

$$f_{W_1,\ldots,W_n|\Lambda=\lambda}(w_1, \ldots, w_n \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda w_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} w_i}, \quad w_1, \ldots, w_n > 0.$$

b) $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k \sim Gamma(n, \lambda^{-1})$, i.e.,

$$f_{T_n|\Lambda=\lambda}(t \mid \lambda) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que dado $\Lambda = \lambda$, $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo con parámetro de intensidad λ y las afirmaciones a) y b) son válidas para esta clase de procesos (ver [2]). $\square$

Si Λ es una variable aleatoria gamma con parámetros α y β, se tiene que el vector aleatorio $(W_1, \ldots, W_n)$ tiene función de densidad dada por

$$f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1, \ldots, w_n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\beta^{-n}\Gamma(\alpha)} \left(1 + \beta \sum_{i=1}^{n} w_i\right)^{-(n+\alpha)}. \tag{5}$$

En efecto, aplicando el Teorema 2.2

$$\begin{aligned} f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1, \ldots, w_n) &= \int_0^\infty f_{W_1,\ldots,W_n|\Lambda=\lambda}(w_1, \ldots, w_n \mid \lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n w_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda(\beta^{-1} + \sum_{i=1}^n w_i)}\, d\lambda. \end{aligned}$$

Completando una densidad gamma con parámetros $n + \alpha$ y $(\beta^{-1} + \sum_{i=1}^n w_i)^{-1}$ se sigue (5).

Para concluir esta sección, se establece un resultado sobre el comportamiento en tiempo finito ($t < \infty$) y a largo plazo ($t \to \infty$) del proceso de Poisson mixto. Este teorema asegura que si $t < \infty$ es suficientemente grande, entonces es posible observar la ocurrencia de al menos un evento (pero no la ocurrencia de un número infinito de eventos).

Teorema 2.3. *Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con intensidad $\Lambda > 0$ y sea $f_\Lambda(\lambda)$ la función de densidad de Λ. Entonces, se cumple que:*

a) $\mathbb{P}(X_t < \infty) = 1$ *para todo* $t \geq 0$,

b) $X_t \overset{c.s.}{\to} \infty$, *cuando* $t \to \infty$.

Demostración. Para cualquier $t > 0$:

$$\mathbb{P}(X_t < \infty) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(X_t \leq k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X_t = j).$$

Luego, por el Teorema de Probabilidad Total, el Teorema de Fubini y el Teorema de Convergencia Monótona, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t < \infty) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t = j|\Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X_t = j|\Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X_t = j|\Lambda = \lambda) \right) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = j|\Lambda = \lambda) \right) f_\Lambda(\lambda) d\lambda = 1. \end{aligned}$$

Esto muestra a).

Para mostrar b), note que el proceso de Poisson homogéneo satisface la propiedad del enunciado. Ahora bien, condicionando a que $\Lambda = \lambda$, $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo, y así $\mathbb{P}\left(\text{lím}_{t\to\infty} X_t = \infty \mid \Lambda = \lambda\right) = 1$ para toda $\lambda > 0$. De aquí,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty \mid \Lambda = \lambda\right) dF_\Lambda(\lambda) = 1,$$

lo que muestra b). □

3. Resultados principales de Inferencia Bayesiana

Muestreo en tiempo fijo

Sean $T^* > 0$ un número real positivo fijo y $N = X_{T^*}$, el número total de eventos que ocurren en el intervalo $[0, T^*]$. Supongamos que se ha observado una realización de un proceso de Poisson mixto con intensidad $\Lambda > 0$ en el intervalo $[0, T^*]$ y se observaron $N = n$ eventos, $n \geq 1$. Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ los tiempos de ocurrencia de los eventos observados y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ los tiempos entre ocurrencias de tales eventos, esto es $w_1 = t_1$ y $w_i = t_i - t_{i-1}$, $n \geq 2$. De esta manera, la muestra es $w_1, \ldots, w_n, n$ que corresponden a los valores observados de $W_1, \ldots, W_N$ y a N, respectivamente.

Ahora bien, debido a que el evento $(n+1)$-ésimo no fue observado en el intervalo $[0, T^*]$, tenemos que $t_n \leq T^* < T_{n+1}$, o de manera equivalente, $W_{n+1} > T^* - t_n$ y gracias al Teorema 2.2 la probabilidad de que esto ocurra está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - t_n) &= \int_{T^*-t_n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda w_{n+1}}\, dw_{n+1} \\
&= e^{-\lambda(T^*-t_n)}.
\end{aligned}$$

De esta manera, por el Teorema 2.2, la definición de $w_1, \ldots, w_n$ y la probabilidad anterior, se obtiene la función de verosimilitud de λ:

$$\begin{aligned}
L(\lambda \mid w_1, \ldots, w_n) &= f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1, \ldots, w_n \mid \lambda) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda w_k}\right) \mathbb{P}(t_n \leq T^* < T_{n+1}) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda w_k}\right) \mathbb{P}(W_{n+1} > T^* - t_n) \\
&= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^{n} w_k} e^{-\lambda(T^*-t_n)} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda(T^*-t_n)} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda T^*}.
\end{aligned}$$

Inferencia bayesiana en el muestreo en tiempo fijo

Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad $\Lambda > 0$, donde Λ sigue una distribución *a priori* gamma $\xi(\lambda \mid \alpha, \beta)$ con hiperparámetros α, $\beta > 0$. Para realizar inferencia en el parámetro de intensidad Λ del proceso desde el enfoque bayesiano, se calcula la distribución *a posteriori* de Λ, como sigue:

$$\xi(\lambda \mid w_1,\ldots,w_n) = \frac{L(\lambda \mid w_1,\ldots,w_n)\xi(\lambda \mid \alpha,\beta)}{\displaystyle\int_0^\infty L(\lambda \mid w_1,\ldots,w_n)\xi(\lambda \mid \alpha,\beta)\,d\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda T^*}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\displaystyle\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda T^*}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}\,d\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{n+\alpha-1}e^{-\lambda\left(T^*+\frac{1}{\beta}\right)}}{\displaystyle\int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1}e^{-\lambda\left(T^*+\frac{1}{\beta}\right)}\,d\lambda}.$$

Completando una distribución gamma con parámetros $n+\alpha$ y $\left(T^*+\beta^{-1}\right)^{-1}$ en el denominador de la *a posteriori*, resulta

$$\xi(\lambda \mid w_1,\ldots,w_n) = \frac{\lambda^{n+\alpha-1}e^{-\lambda\left(T^*+\frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma(n+\alpha)\left(T^*+\dfrac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}}.$$

Por lo tanto, la distribución *a posteriori* del parámetro de intensidad Λ corresponde a una densidad gamma con parámetros $n+\alpha$ y $\left(T^*+\beta^{-1}\right)^{-1}$, *i.e.*,

$$\Lambda \mid w_1,\ldots,w_n \sim Gamma\left(n+\alpha, \left(T^*+\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right).$$

En [4] y [5] se establecen fórmulas para las reglas de Bayes considerando las funciones de pérdida cuadrática, error absoluto e indicadora, las cuales corresponden a la media, mediana y moda, respectivamente. Haciendo uso de la distribución *a posteriori* obtenida, se calculan fórmulas para las reglas de Bayes, respectivamente:

- La regla de Bayes con respecto a la función de pérdida cuadrática $L(\lambda,\hat{\lambda}) = (\lambda-\hat{\lambda})^2$ es

$$\hat{\lambda} = \mathbb{E}(\Lambda \mid w_1,\ldots,w_n) = (n+\alpha)\left(T^*+\frac{1}{\beta}\right)^{-1}.$$

- La regla de Bayes con respecto a la función error absoluto $L(\lambda,\hat{\lambda}) = |\lambda-\hat{\lambda}|$ es

$$\hat{\lambda} = q_{0.5},$$

donde $q_{0.5}$ es la mediana de la distribución *a posteriori*, *i.e.*,

$$\frac{1}{2} = \int_0^{q_{0.5}} \xi(\lambda \mid w_1,\ldots,w_n)\,d\lambda.$$

- La regla de Bayes con respecto a la función indicadora $L(\lambda, \hat{\lambda}) = \mathbf{1}_{\{\hat{\lambda}\neq\lambda\}}$ es

$$\hat{\lambda} = \text{Moda}(\Lambda \mid w_1, \ldots, w_n) = \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-1} (n + \alpha - 1).$$

Haciendo uso de la distribución *a posteriori* obtenida, usando (1), se obtienen los momentos de orden k de la distribución *a posteriori* del parámetro de intensidad:

$$\mathbb{E}(\Lambda^k \mid w_1, \ldots, w_n) = \frac{\Gamma(k+n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-k}.$$

De manera particular también se obtiene la varianza de la distribución *a posteriori* del parámetro de intensidad, considerando que tiene una distribución gamma con parámetros $n+\alpha$ y $(T^*+\beta^{-1})^{-1}$:

$$\text{Var}(\Lambda \mid w_1, \ldots, w_n) = (n+\alpha) \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^{-2}.$$

En la estadística bayesiana, la distribución predictiva dada la muestra se define como:

$$\xi(w_{n+1} \mid w_1, \ldots, w_n) = \int_0^\infty f_{W_{n+1}|\Lambda}(w_{n+1} \mid \lambda)\xi(\lambda \mid w_1, \ldots w_n)\, d\lambda.$$

Esta distribución permitirá realizar inferencia estadística sobre el nuevo tiempo entre ocurrencias W_{n+1}, a partir de la muestra observada, $w_1, \ldots, w_n$, en el intervalo $[0, T^*]$ (predicción). Sin embargo, en el muestreo en tiempo fijo para el proceso de Poisson mixto, se tiene que el n-ésimo evento observado en la realización del proceso se observó antes del tiempo T^*, lo que implica que el siguiente, el $(n+1)$-ésimo evento, ocurrirá posterior al instante T^*, esto es, $T_n \leq T^* < T_{n+1}$ y por lo tanto, no se observó en la muestra. De tal forma que se desea predecir el tiempo que falta para el $(n+1)$-ésimo evento, basado en la información obtenida en el intervalo de observación $[0, T^*]$ y teniendo en cuenta que $T_{n+1} > T^*$. Así, se desea calcular la distribución condicional del tiempo

$$\widetilde{W} := T_{n+1} - T^* = W_{n+1} + T_n - T^*,$$

dados $\widetilde{W} > 0$ y la muestra obtenida $w_1, \ldots, w_n$ en el intervalo $[0, T^*]$. El siguiente teorema establece que en un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad $\Lambda > 0$, la distribución condicional de $\widetilde{W}$ dados $\widetilde{W} > 0$ y la muestra obtenida $w_1, \ldots, w_n$ en el intervalo $[0, T^*]$, es igual a la distribución predictiva de W_{n+1}.

Teorema 3.1. *Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson mixto con parámetro de intensidad $\Lambda > 0$ y W_{n+1} el tiempo entre las ocurrencias del n-ésimo y el $(n+1)$-ésimo eventos. Entonces, dado los tiempos entre ocurrencias $w_1, \ldots, w_n$ de los n eventos observados hasta un instante $T^* > 0$:*

$$\widetilde{W} \mid W_1 = w_1, \ldots, W_n = w_n \stackrel{d}{=} W_{n+1} \mid W_1 = w_1, \ldots, W_n = w_n.$$

Demostración. Primero, observe que si se marginaliza el vector $(\widetilde{W}, W_1, \ldots, W_n, \lambda)$, se obtiene

$$f_{\widetilde{W},W_1,\ldots,W_n}(\widetilde{w}, w_1, \ldots, w_n) = \int_0^\infty f_{\widetilde{W},W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w}, w_1, \ldots, w_n, \lambda)\, d\lambda. \tag{6}$$

Utilizando la definición de función de densidad condicional se obtiene

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{W}|W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w} \mid w_1, \ldots, w_n, \lambda) &= \frac{f_{\widetilde{W},W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w}, w_1, \ldots, w_n, \lambda)}{f_{W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(w_1, \ldots, w_n, \lambda)} \\ &= \frac{f_{\widetilde{W},W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w}, w_1, \ldots, w_n, \lambda)}{f_{W_1,\ldots,W_n|\Lambda}(w_1, \ldots, w_n \mid \lambda) f_\Lambda(\lambda)}. \end{aligned} \tag{7}$$

De esta forma, utilizando las relaciones (6) y (7), resulta

$$
\begin{aligned}
f_{\widetilde{W}|W_1,\ldots,W_n}(\widetilde{w} \mid w_1,\ldots,w_n) &= \frac{f_{\widetilde{W},W_1,\ldots,W_n}(\widetilde{w},w_1,\ldots,w_n)}{f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)} \\
&= \int_0^\infty \frac{f_{\widetilde{W},W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w},w_1,\ldots,w_n,\lambda)}{f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)}\,d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{f_{\widetilde{W}|W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w} \mid w_1,\ldots,w_n,\lambda) f_{W_1,\ldots,W_n|\Lambda}(w_1,\ldots,w_n \mid \lambda) f_\Lambda(\lambda)}{f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)}\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, por el Teorema 2.1

$$
f_{\widetilde{W}|W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(\widetilde{w} \mid w_1,\ldots,w_n,\lambda) = f_{W_{n+1}|\Lambda}(w_{n+1} \mid \lambda).
$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que $W_1,\ldots,W_n,W_{n+1}$, condicionadas a $\Lambda=\lambda$, son variables aleatorias independientes, se sigue

$$
\begin{aligned}
f_{\widetilde{W}|W_1,\ldots,W_n}(\widetilde{w} \mid w_1,\ldots,w_n) &= \int_0^\infty \frac{f_{W_{n+1}|\Lambda}(w_{n+1} \mid \lambda) f_{W_1,\ldots,W_n|\Lambda}(w_1,\ldots,w_n \mid \lambda) f_\Lambda(\lambda)}{f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)}\,d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{f_{W_{n+1},W_1,\ldots,W_n|\Lambda}(w_{n+1},w_1,\ldots,w_n \mid \lambda) f_\Lambda(\lambda)}{f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)}\,d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{f_{W_{n+1},W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(w_{n+1},w_1,\ldots,w_n,\lambda)}{f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)}\,d\lambda \\
&= \frac{f_{W_{n+1},W_1,\ldots,W_n}(w_{n+1},w_1,\ldots,w_n)}{f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)} \\
&= f_{W_{n+1}|W_1,\ldots,W_n}(w_{n+1} \mid w_1,\ldots,w_n),
\end{aligned}
$$

donde en la tercera igualdad se utilizó que

$$
f_{W_{n+1},W_1,\ldots,W_n|\Lambda}(w_{n+1},w_1,\ldots,w_n \mid \lambda) = \frac{f_{W_{n+1},W_1,\ldots,W_n,\Lambda}(w_{n+1},w_1,\ldots,w_n,\lambda)}{f_\Lambda(\lambda)}.
$$

□

Como consecuencia del teorema anterior, es posible calcular la distribución predictiva y afirmar que ésta es la que se requiere para predecir el tiempo de ocurrencia del siguiente evento, dada la muestra:

$$
\begin{aligned}
\xi(w_{n+1} \mid w_1,\ldots,w_n) &= \int_0^\infty f_{W_{n+1}|\Lambda=\lambda}(w_{n+1} \mid \lambda)\xi(\lambda \mid w_1,\ldots w_n)\,d\lambda \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda w_{n+1}} \frac{\lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda\left(T^*+\frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma(n+\alpha)\left(T^*+\dfrac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}}\,d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+\alpha} e^{-\lambda\left(w_{n+1}+T^*+\frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma(n+\alpha)\left(T^*+\dfrac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}}\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

Completando una distribución gamma con parámetros $n+\alpha+1$ y $\left(w_{n+1}+T^*+\beta^{-1}\right)^{-1}$, resulta que la distribución predictiva del nuevo tiempo entre ocurrencias W_{n+1} es

$$\begin{aligned}
\xi(w_{n+1} \mid w_1,\ldots,w_n) &= \frac{\Gamma(1+n+\alpha)\left(w_{n+1}+T^*+\dfrac{1}{\beta}\right)^{-(1+n+\alpha)}}{\Gamma(n+\alpha)\left(T^*+\dfrac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}} \\
&= \beta\frac{\Gamma(1+n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\frac{(1+\beta(w_{n+1}+T^*))^{-(1+n+\alpha)}}{(1+\beta T^*)^{-(n+\alpha)}} \\
&= \beta\frac{\Gamma(1+n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\frac{(1+\beta T^*)^{n+\alpha}}{(1+\beta(w_{n+1}+T^*))^{1+n+\alpha}} \\
&= \frac{\beta}{B(1,n+\alpha)}\left(1-\frac{\beta w_{n+1}}{1+\beta(w_{n+1}+T^*)}\right)^{n+\alpha-1}\frac{1+\beta T^*}{(1+\beta(w_{n+1}+T^*))^2}.
\end{aligned}$$

La variable $W_{n+1} \mid W_1=w_1,\ldots,W_n=w_n$ es una función de una variable aleatoria que sigue una distribución beta-prima (ver [1]), como se muestra en el siguiente teorema, el cual también proporciona una manera de simular valores de la variable $W_{n+1} \mid W_1=w_1,\ldots,W_n=w_n$.

Teorema 3.2. *Sea* $Y=\left(T^*+\dfrac{1}{\beta}\right)X$, *donde* $X\sim\beta'(1,n+\alpha)$. *Entonces, la función de densidad de* Y *está dada por*

$$f_Y(y)=\frac{\beta}{B(1,n+\alpha)}\left(1-\frac{\beta y}{1+\beta(y+T^*)}\right)^{n+\alpha-1}\frac{1+\beta T^*}{(1+\beta(y+T^*))^2},\quad y>0.$$

Demostración. Usando la técnica de la transformación para variables aleatorias, se sigue que para la función $y=g(x)=\left(T^*+\dfrac{1}{\beta}\right)x$, la función de densidad de Y es

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \\
&= \frac{\beta}{B(1,n+\alpha)}\left(1-\frac{\beta y}{1+\beta(y+T^*)}\right)^{n+\alpha-1}\frac{1+\beta T^*}{(1+\beta(y+T^*))^2},\quad y>0.
\end{aligned}$$

□

El resultado anterior nos permite establecer que la función de supervivencia del nuevo tiempo entre ocurrencias $W_{n+1} \mid W_1=w_1,\ldots,W_n=w_n$ es

$$S(w \mid w_1,\ldots,w_n)=\left(1-\frac{\beta w}{1+\beta(w+T^*)}\right)^{n+\alpha},\quad w>0.$$

Asimismo, los momentos de orden k, la media y la varianza del siguiente tiempo entre ocurrencias $W_{n+1} \mid W_1 = w_1, \ldots, W_n = w_n$ están dados por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{n+1}^k \mid w_1, \ldots, w_n) &= \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^k \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+\alpha-k)}{\Gamma(n+\alpha)}, \quad n+\alpha > k, \\
\mathbb{E}(W_{n+1} \mid w_1, \ldots, w_n) &= \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{n+\alpha-1}, \\
\mathrm{Var}(W_{n+1} \mid w_1, \ldots, w_n) &= \left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)^2 \frac{n+\alpha}{(n+\alpha-1)^2(n+\alpha-2)}.
\end{aligned}$$

Para concluir esta sección se presentan resultados de la variable $N = X_{T^*}$, el número de eventos del proceso que ocurren en el intervalo $[0, T^*]$, los cuales permiten entender el comportamiento probabilístico del proceso de Poisson mixto previo a realizar el muestreo en tiempo fijo.

Es bien sabido que en el proceso de Poisson homogéneo, $N = X_{T^*}$ es una variable Poisson con media λT^*, entonces por el Teorema de Probabilidad Total:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N = n \mid \Lambda = \lambda)\xi(\lambda \mid \alpha, \beta)\, d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{(\lambda T^*)^n e^{-\lambda T^*}}{n!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{(T^*)^n}{n!} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda\left(T^* + \frac{1}{\beta}\right)}\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Completando una distribución gamma con parámetros $n + \alpha$ y $(T^* + \beta^{-1})$, resulta

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)n!} \left(1 - \frac{1}{1+\beta T^*}\right)^n \left(\frac{1}{1+\beta T^*}\right)^\alpha, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Haciendo uso de la función de probabilidad obtenida, se establece una propiedad de finitud para la variable N, así como condiciones de existencia de su media. El siguiente teorema establece que el número de eventos del proceso que se observan en el intervalo $[0, T^*]$ es siempre finito para cualquier T^* y cualquier distribución *a priori* de la intensidad, así como una equivalencia de existencia entre la media de N y la media de la intensidad Λ del proceso.

Teorema 3.3. *Sea $\Lambda \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Entonces, se cumple que:*

a) $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$;

b) $\mathbb{E}(N)$ *es finita y está dada por:*

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\beta T^* \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{c}\right)}{\Gamma(\alpha)},$$

si y solo si $\mathbb{E}(\Lambda)$ *es finita.*

Demostración. a) Se sigue directamente del Teorema 2.3, ya que $N = X_{T^*}$.

b) Primero, usando el Teorema de Fubini es fácil demostrar que para cualquier variable aleatoria no negativa Y,

$$\mathbb{E}(N) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > y)\, dy.$$

Ahora bien, si en particular tomamos $Y = N$, cuyo rango es $k = 0, 1, \ldots$, se sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N > y)\, dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k),
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se utilizó que la función $\mathbb{P}(N > y)$ es una función escalonada. Ahora, con ayuda del resultado anterior aplicado para el cálculo de $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X_{T^*})$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty \mathbb{P}(N > k \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > k \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}(N \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \\
&= \int_0^\infty \lambda T^* f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda \\
&= T^* \int_0^\infty \lambda f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda,
\end{aligned}$$

donde en la tercer igualdad se utilizó de nuevo el Teorema de Fubini y en la quinta igualdad se usó $\mathbb{E}(X_t \mid \Lambda = \lambda) = \lambda t$. Lo anterior establece que $\mathbb{E}(N)$ es finito si y solo si la integral

$$\int_0^\infty \lambda f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

es finita. Sin embargo, la integral anterior corresponde a $\mathbb{E}(\Lambda)$, por lo cual $\mathbb{E}(N)$ es finita si y solo si $\mathbb{E}(\Lambda)$ es finita. □

El supuesto inicial en el muestreo en tiempo fijo para desarrollar las herramientas de la inferencia bayesiana es que el número de eventos observados en la realización del proceso de Poisson en el intervalo $[0, T^*]$ sea al menos uno. Sin embargo, la función de probabilidad de la variable N indica que la probabilidad de que no se observen eventos del proceso en el intervalo $[0, T^*]$ es positiva. De manera precisa, la probabilidad de no observar eventos en el intervalo $[0, T^*]$ es:

$$\mathbb{P}(N = 0) = \left(\frac{1}{1 + \beta T^*} \right)^\alpha.$$

Así, un procedimiento para escoger $T^* > 0$ de tal forma que se pueda observar al menos un evento del proceso de Poisson, es como sigue:

Sea $0 < p < 1$ y sea $T^* > 0$ la longitud del intervalo de observación del proceso. Suponga que la probabilidad de que ocurra al menos un evento del proceso es igual a p, *i.e.*, $\mathbb{P}(N \geq 1) = p$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(N = 0) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1+\beta T^*}\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de la probabilidad y despejando T^*, se obtiene que la probabilidad de que ocurra al menos un evento del proceso en el intervalo $[0, T^*]$ es igual a p si y solo si

$$T^* = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(1-p)^{1/\alpha}} - 1\right). \tag{8}$$

En la práctica, el tiempo de observación $T^* > 0$ es fijo y no es controlable, es decir, se establece sin condición alguna y puede ocurrir que no se tenga información (ocurren cero eventos) en el intervalo $[0, T^*]$, en cuyo caso habrá que proponer un tiempo mayor, aunque esto pudiera generar costos adicionales de implementación o de cualquier otra índole. El procedimiento anterior propone una forma de asegurar observaciones del proceso de Poisson mixto en el intervalo $[0, T^*]$ con una probabilidad p alta, sin embargo el valor resultante de T^* que se obtiene como solución de la ecuación (8), pudiera ser grande y no implementable en la práctica.

4. Conclusiones

En este artículo se obtuvieron expresiones para la densidad *a posteriori* de la intensidad considerando una densidad *a priori* gamma, resultando en una distribución gamma. Aunque esto ocurre en general cuando se tiene una muestra Poisson-gamma, en este artículo se muestra que se mantiene si se consideran observaciones de un proceso de Poisson mixto con densidad gamma *a priori* para el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto.

En la práctica, comúnmente se fija un tiempo o periodo de observación para obtener la muestra. Sin embargo, también se pudiera establecer el criterio de dejar de observar al momento de ocurrir un número fijo de eventos, digamos n_0. Si esto ocurre se estaría muestrando en un periodo de tiempo aleatorio $[0, T_{n_0}]$. En este caso, siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en este artículo, se pueden establecer las correspondientes fórmulas para la densidad *a posteriori*, las reglas de Bayes, la densidad predictiva, etc. De igual forma, se pudieran considerar otros tipos de muestreo.

5. Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros anónimos por su cuidadosa revisión y comentarios, que mejoraron la presentación de este artículo.

6. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

Referencias

[1] E. S. Keeping, Introduction to Statistical Inference. Courier Dover Publications, 1962.

[2] M. A. Pinsky, S. Karlin, An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, 2011.

[3] J. Grandell, Mixed Poisson Processes. Chapman & Hall, 1997.

[4] E. N. Rangel, "¿Qué es la Estadística Bayesiana?", Journal of Basic Sciences, vol. 1, pp. 1-23, 2015, doi: https://doi.org/10.19136/jobs.a1n1.1026.

[5] J. C. Correa, C. J. Barrera, Introducción a la Estadística Bayesiana. Instituto Tecnológico Metropolitano, 2018.