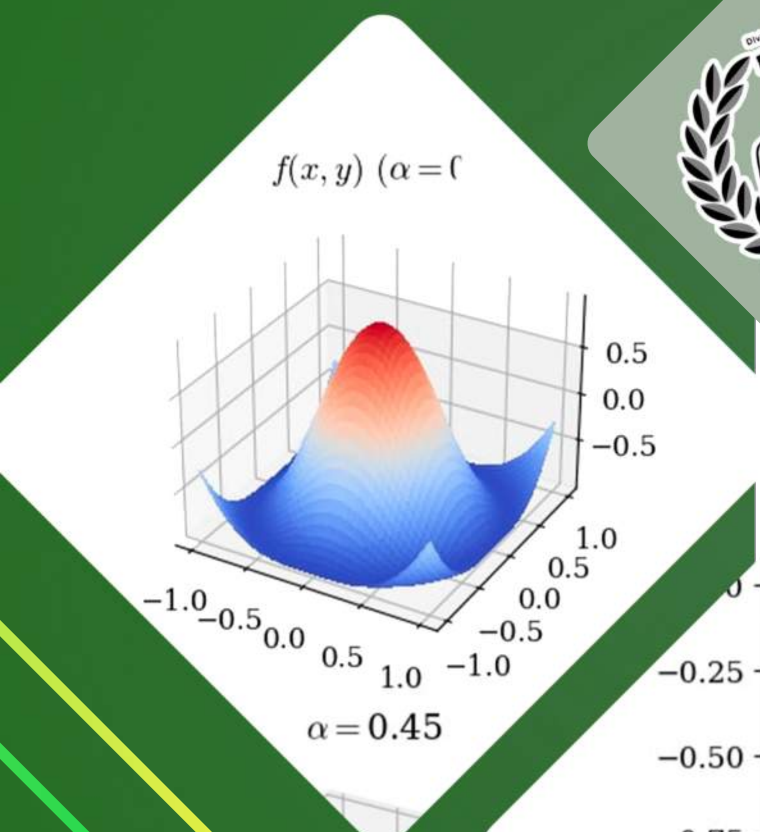
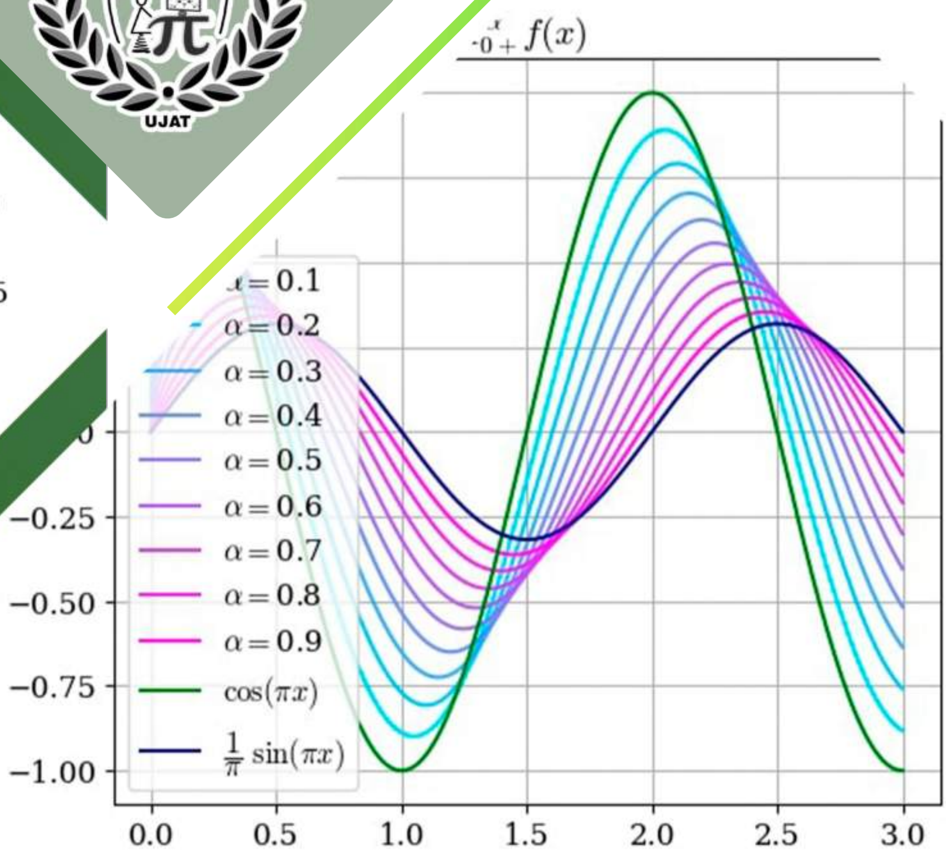
Volumen 11 número 30 enero-abril 2025

UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

JOBS
Journal of Basic Sciences
DACB • UJAT





ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

UJAT
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"
JOBS Journal of Basic Sciences DACB · UJAT

Con el número 30 del Journal of Basic Sciences, se inicia el volumen 11 de esta revista correspondiente al año 2025. El carácter multidisciplinario de esta revista, permite enriquecer su contenido con perspectivas variadas que abordan diversas problemáticas en el área de las ciencias básicas y disciplinas afines.

De esta forma, se presenta una contribución que desarrolló generalizaciones en cálculo multivariable para llegar a nuevas diferenciales totales fraccionarias, las cuales juegan un papel importante en la modelación de gran número de fenómenos. Por otro lado, se incluye también una aportación que trata sobre el desarrollo de un método para resolver la ecuación de transporte conservativa en dominios específicos, incluyendo su validación y prueba para demostrar sus capacidades.

Se incluye además, un reporte encaminado a mejorar la calidad de imágenes, mediante técnicas de discretización numérica presentando una evaluación cualitativa y cuantitativa de los resultados obtenidos. En otro orden de ideas, se centra la atención hacia el estudio de sistemas aleatorios y la complejidad en su modelación, mostrando un estudio inferencial para un proceso de Poisson mixto, que lleva a la obtención de expresiones para densidad predictiva.

Es innegable que el aprendizaje de las matemáticas representa un reto actual que no debe soslayarse. En este sentido, se incluye un estudio que muestra la relación entre el desarrollo de la memoria de trabajo y el aprendizaje de identidades trigonométricas por parte de jóvenes del nivel medio superior, mostrando los subcomponentes necesarios en el razonamiento para el aprendizaje de este tema. En otra contribución relativa a la matemática educativa, se presenta una propuesta para atender el aprendizaje de los polígonos por estudiantes de bachillerato, mediante una serie de actividades diseñadas ex profeso que permiten una mejora en la comprensión de la temática.

En un contexto diferente, está el estudio dirigido a evaluar la actividad antibacteriana de extractos de plantas del género Cecropia, de uso tradicional en el sureste mexicano, correlacionando esta propiedad con el perfil fitoquímico analizado. Se presenta además, una contribución encaminada a analizar el impacto, que en los últimos años, han ocasionado derrames petroleros en el sureste mexicano, con especial énfasis en la afectación a cultivos agrícolas.

La atención de problemas de salud está dada a través de dos artículos que forman parte de este número. Por un lado, se comparó la resistencia a la insulina a través de índices específicos en momentos anteriores y durante la pandemia de COVID-19; en otro aporte, se analiza la relación entre diversos factores de riesgo asociados a la población joven y la enfermedad de Chagas. Mientras que en el área de la ciencia de los materiales, se incluye una propuesta para la obtención de derivados de poliuretano, con un método eficiente y compacto.

De esta forma el Journal of Basic Sciences acerca a sus lectores al amplio panorama del quehacer científico.

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional
División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 30, abril de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.

UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

CONTENIDO

UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

Vol. 11 (30), p. 69-83, enero-abril 2025,e-ISSN: 2448-4997
JOURNAL OF BASIC SCIENCES

La visualización en la construcción de polígonos regulares por estudiantes de educación media superior

Orozco, V.[1*], Zubieta, G.[1]
[1]*Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), Av Instituto Politécnico Nacional 2508, San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, 07360 Ciudad de México, CDMX.*
[*]*Kivi.vov@gmail.com*

Resumen

Se propone una posible solución a la falta de conocimiento de las características y propiedades de los polígonos por parte de los estudiantes de bachillerato. Se presenta un diseño de actividades en GeoGebra que toma en cuenta la visualización como una habilidad útil para la presentación y aprendizaje de los polígonos y sus características a partir de sus diagonales. Además, se utilizan los niveles y fases del modelo de Van Hiele para diseñar las actividades. Se observó el tipo de conocimiento que estos estudiantes poseían, tomando en cuenta la definición de comprensión relacional e instrumental dada por Skemp en su libro "The Psychology of Learning Mathematics". A partir del análisis realizado se pudo observar que, aunque el nivel de los estudiantes oscila entre el nivel 1 y 2 del modelo de Van Hiele, la comprensión resultante no necesariamente es instrumental.

Palabras claves: *Comprensión, GeoGebra, Polígonos, Van Hiele, Visualización*

Abstract

It is proposed a possible solution to the lack of knowledge of the characteristics and properties of polygons by high school students. A design is presented of activities in GeoGebra, it´s taken the visualization who a useful ability for the presentation and learning of the polygons and characteristics since diagonals. In addition, levels and phases of the Van Hiele model are used for designing the activities [1]. It was observed the kind of knowledge that the students have, considering the definition of relational and instrumental comprehension given by Skemp in his book "The Psychology of Learning Mathematics".
From the analysis realized we can observe that, although the student's level ranges between 1 and 2 of the Van Hiele model, the comprehension is not necessarily instrumental.

Keywords: *Comprehension, GeoGebra, Polygons, Van Hiele, Visualization*

Recibido: 22 de octubre de 2024, Aceptado: 28 de marzo de 2025, Publicado: 30 de abril de 2025

1. Introducción

Se presenta un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de un diseño de actividades acerca de los polígonos regulares y sus propiedades en un entorno de Geometría dinámica, el diseño fue aplicado a estudiantes que cursaban el segundo semestre de bachillerato. En el diseño de las actividades se tomó en cuenta la visualización desde el punto de vista de Arcavi [2], pues menciona que esta es la capacidad de interpretar datos a través de imágenes o diagramas usando diversas herramientas ya sean análogas como el papel y lápiz o tecnológicas como GeoGebra, las cuales facilitan la interpretación y documentación de la información.

El modelo de Van Hiele, el cual fue utilizado para diseñar las actividades aplicadas, explica los niveles (1. Visualización, 2. Análisis, 3. Ordenación, clasificación o abstracción, 4. Deducción formal, 5. Rigor) por los que los estudiantes deben pasar para aprender geometría [1]. Para realizar el análisis de las actividades, se buscó catalogar el nivel de aprendizaje de los estudiantes a partir de los niveles del modelo mencionado, esto ayudó a determinar el tipo de comprensión de los estudiantes, es decir, de acuerdo con las construcciones dadas y lo mencionado por Skemp [3], se clasificó la comprensión de los estudiantes en relacional o instrumental.

Este trabajo se motiva por una problemática dada en el aula de clases, a saber, los estudiantes egresados de nivel secundaria suelen llegar al nivel educativo medio superior con conocimientos insuficientes acerca del tema de polígonos y sus características. Dicha problemática fue revelada en un examen diagnóstico aplicado a estudiantes de educación media superior en el estado de Tabasco.

2. Antecedentes

El tema de polígonos y sus propiedades en general, ha sido abordado por la matemática educativa desde diferentes enfoques, muchos de ellos orientados al conocimiento de futuros profesores que enseñan este tema. Ejemplo de esto, es el articulo realizado por S. Morales y T. Rosas [4], que muestran que el conocimiento sobre la geometría de futuros profesores suele ser útil solo dentro del área, por lo que busca mostrar que la argumentación gráfica es importante. Esto respalda que el uso de figuras geométricas para enseñar a los estudiantes las propiedades de los polígonos es esencial. Por su parte Gonzáles, et al. [5] muestran en su investigación los errores que los estudiantes suelen cometer al momento de intentar diferenciar los conceptos de área y perímetro. El artículo de Carreño, et al. [6] es de interés para este trabajo debido a que considera como marco teórico los primeros tres niveles del modelo de Van Hiele, en dicho trabajo se menciona que los futuros profesores peruanos suelen estar dentro de los dos primeros niveles del modelo.

La mayoría de estos artículos no utilizan los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), sin embargo, la investigación realizada por Cuervos lancheros, et al. [7] presentan la importancia que los SGD tienen al abordar la enseñanza y aprendizaje de los polígonos, ellos concluyen que el uso de las herramientas como GeoGebra lleva a potenciar las competencias matemáticas y fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes.

2.1 Problemática y propuesta

En la actualidad se reconoce el valor de las figuras geométricas como el triángulo, cuadrado, rectángulo, etc., dado que estas son utilizadas en distintas áreas, por ejemplo, en construcción o el diseño, tal como lo mencionan Bortolussi Alarcón, J., et al. [9]. Es debido a su importancia que son incluidas en los planes de estudios desde los niveles básicos, pero a pesar de ello muchos de los estudiantes al llegar al nivel medio superior siguen teniendo dificultades para reconocer las propiedades y características de las figuras geométricas, esto se pudo observar en un examen diagnóstico aplicado en una preparatoria del estado de Tabasco previo a un curso de geometría. Del examen diagnóstico se evidencia que los estudiantes de nivel medio superior presentan dificultades para recordar las propiedades y características de los polígonos, por ejemplo, el número de lados de un eneágono, la suma de los ángulos internos de un triángulo o incluso conocer las propiedades que debe cumplir un polígono para que sea regular, lo que deriva en la dificultad para poder trazarlos.

Morales, et al. [4] señala que, presentar los temas matemáticos como concluidos y abstractos evita que estos tengan un significado para los estudiantes. Como consecuencia de esto el aprendizaje de los temas no es el esperado. Lo anterior da pauta a la pregunta de investigación: ¿Cómo ayuda en la comprensión de las propiedades de los polígonos a estudiantes de medio superior trabajar con actividades planteadas en GeoGebra? Para intentar responder esta pregunta se tomará en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, con los cuales se pretende clasificar el aprendizaje de los estudiantes cuando las actividades son presentadas desde la visualización.

Se buscará mostrar que el aprendizaje sobre polígonos en estudiantes de medio superior puede ser más claro cuando los temas se presentan desde diferentes ángulos, y además se usa lo visual, ya que como menciona Arcavi [2] "vivimos en un mundo donde la información se transmite mayoritariamente en envoltorios visuales, y las tecnologías apoyan y fomentan la comunicación que es esencialmente visual". Tomando en cuenta lo trabajado por otros investigadores y la problemática presentada, la propuesta que se tiene alude a hacer uso de la visualización desde el punto de vista de Arcavi [2] con la finalidad de evitar que los estudiantes se queden en una comprensión instrumental.

En sí, el propósito de este escrito es mostrar que, a partir de trabajar con los estudiantes actividades creadas de forma específica, partiendo desde las diagonales de los polígonos, y haciendo uso de los Sistemas de Geometría Dinámica, se facilita el aprendizaje de las propiedades de los polígonos para que la comprensión de estos sea relacional y no instrumental.

3. Marco teórico

Se argumenta la importancia de la visualización y el valor de la comprensión relacional en las matemáticas

3.1 Visualización desde el punto de vista de Arcavi.

Cantoral, et al. [8] define la visualización como una herramienta útil en el área de las matemáticas pues esta ayuda, por ejemplo, a representar a partir de dibujos, propiedades de inclusión en la teoría de conjuntos o en el análisis de funciones donde se suelen usar representaciones visuales para describir propiedades como la paridad. En general, la visualización suele ser útil para la resolución de problemas en matemáticas.

Por otro lado, Arcavi [2] menciona que lo visual está siempre presente, ya que como seres biológicos la mayor parte de nuestro cerebro está involucrado en lo visual y la percepción. Además, en el aspecto sociocultural, se puede afirmar que el mundo en el que vivimos y la información que se transmite se hace mayormente de forma visual y la tecnología actual fomenta esta forma de comunicación. Este autor define la visualización de la siguiente manera:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, diagramas en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, reflexionar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión. [2, p. 2017]

Este trabajo pretende apoyarse en la visualización cuando es entendida como la habilidad de interpretar datos a través de imágenes o diagramas que no solo son presentados en papel, sino usando herramientas tecnológicas como GeoGebra que faciliten la interpretación y documentación de la información, además de desarrollar nuevas ideas y conocimientos. Se busca reafirmar la idea de que las matemáticas dependen de las diferentes formas y niveles de la visualización, pues se espera que, al mostrar las propiedades de los polígonos de forma visual, los estudiantes sean capaces de generar un conocimiento más sólido acerca de las propiedades de los polígonos e incluso ayude a un mejor aprendizaje de las propiedades geométricas en general.

3.2 Compresión relacional y comprensión instrumental

De acuerdo con Skemp [3] en el área de la educación matemática se encuentran expresiones que pueden entenderse de dos o más formas, lo que lleva a tener dificultades. La palabra “comprensión” es un ejemplo de dichas expresiones, el autor menciona que en la actualidad hay dos significados que podrían darse: "comprensión relacional" y "comprensión instrumental". La primera la define como el saber qué hacer y por qué y la segunda es el aplicar reglas sin tener razones. También menciona que ambos tipos de comprensión están presentes en el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo, muchas veces suele predominar la instrumental sobre la relacional, lo que lleva a conocimientos memorizados sin saber por qué se aplican ciertas reglas.

Es importante un equilibrio entre ambos tipos de comprensión pues “cuanto más completo sea el esquema de un alumno, mayor será su sentimiento de confianza en su propia capacidad para encontrar nuevas formas de "llegar allí sin ayuda externa"” [3, p. 163]. Lo que hará que busque ir más allá de lo enseñado y seguirá creando conocimientos por su propia cuenta. Aunque también se menciona que la comprensión instrumental suele ser de mucha ayuda en casos donde obtener las respuestas a través de lo relacional, requieren de más tiempo para la deducción de reglas. Por lo que se puede concluir que se debe buscar un equilibrio entre ambos tipos de comprensión y no solo cambiar una por otra.

Se verá en este trabajo que la visualización en conjunto con la comprensión relacional puede ser de ayuda para que los estudiantes aprendan de mejor forma las propiedades de los polígonos. Pues si estas se muestran haciendo uso de figuras que ayuden a visualizar e interpretar las propiedades de forma más clara, se puede llegar a enseñar y aprender las propiedades no instrumentalmente, sino relacionalmente.

4. Metodología

La investigación se realizó con 34 estudiantes que cursaban el segundo grado de una escuela de nivel medio superior del estado de Tabasco. Este estudio es de carácter cualitativo, pues se pretende observar y describir el aprendizaje de los estudiantes con relación a la geometría, en específico, los polígonos regulares cuando son presentados tomando en cuenta la visualización. Además, la categorización del nivel de aprendizaje obtenido por los estudiantes se realizó tomando en cuenta los niveles de Van Hiele lo cual ayudó a ubicar el tipo de comprensión de los estudiantes.

Al momento de la aplicación los estudiantes estaban llevado un curso de geometría y trigonometría. Además, según el plan de estudios, los estudiantes ya habían trabajado con polígonos en niveles anteriores. Para la toma de datos se realizaron tres sesiones de aproximadamente 120 minutos cada sesión.

4.1 Diseño de las actividades e instrumento de trabajo

Se diseñaron 4 actividades (Anexo 1) en hojas dinámicas de GeoGebra atendiendo a las fases del modelo de Van Hiele, las cuales se mencionan más adelante, además de 2 actividades previas con el fin de que los estudiantes se familiarizaran con las herramientas que el SGD ofrece y una presentación sobre los polígonos y sus diagonales. Tanto las actividades como la presentación toman en cuenta lo escrito por Arcavi [2], quien menciona que es necesario hacer uso de la visualización a partir de gráficos para una mejor interpretación de datos.
Para la categorización del nivel de aprendizaje de los estudiantes que a su vez ayudó a ubicar el tipo de comprensión que tuvieron, se tomó en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele: Reconocimiento o visualización; análisis; ordenación, clasificación o abstracción; deducción formal y rigor [1]. Además, las fases: indagación o información; orientación guiada, explicitación o explicación; orientación libre e integración [1] también fueron necesarias para el diseño de las actividades.

5. Análisis de los datos

Se presenta un análisis de las respuestas obtenidas por tres estudiantes. Estas fueron elegidas tomando en cuenta que muchas de las respuestas dadas por los estudiantes suelen ser muy similares entre ellas. Dicho análisis se realizó tomando en cuenta los niveles de Van Hiele para las construcciones realizadas por los estudiantes. Asimismo, se da una breve argumentación sobre el tipo de comprensión que posee cada uno de ellos tomando en cuenta lo mencionado por Skemp [3]. Con el fin de analizar las respuestas dadas por los estudiantes que respondieron todas las actividades del diseño y mantenerlos en el anonimato se nombrará a los estudiantes como: **E1, E2, E3.**

5.1 Análisis de los resultados obtenidos por E1

En la primera actividad (véase página 15) se observa que E1 logró resolver de forma eficaz lo solicitado utilizando la herramienta polígono regular partiendo del vértice A para obtener lo solicitado (**Figura 1**).

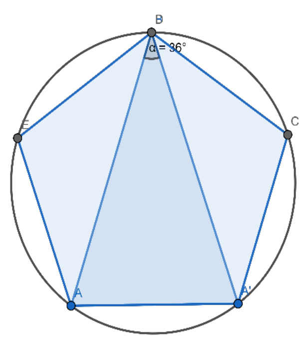


Figura 1. Solución dada por E1 para la actividad 1

En la actividad 2 intentó proceder de la misma forma que en la actividad anterior, sin embargo, el triángulo del que partió no siempre era equilátero dado que fue construido utilizando la herramienta "polígono", por lo que obtiene un triángulo con todos los vértices compuestos por puntos dinámicos, es decir, puntos que se mueven en el espacio dado por GeoGebra (**Figura 2**).

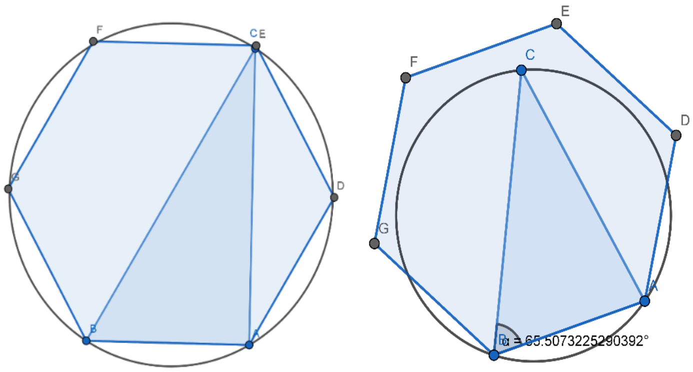


Figura 2. Solución 1 dada por E1 a la actividad 2

E1 notó que la figura anterior no era lo esperado por lo que en un segundo intento construyó el hexágono con la herramienta polígono regular. Posteriormente, lo inscribió en la circunferencia para asi obtener los triángulos con vértices en A, F, D y B, C, E respectivamente, como se muestra en la **figura 3**.

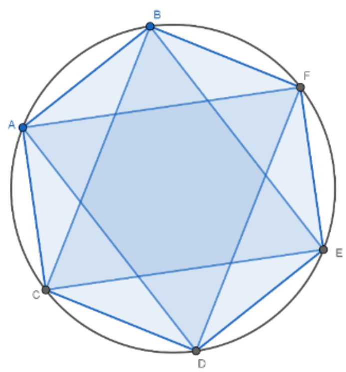


Figura 3. Solución 2 dada por E1 a la actividad 2

En la actividad 3 construyó e inscribió el triángulo inicial de forma correcta. Seguidamente, utilizó la herramienta polígono regular. Sin embargo, al seleccionar la posición del segundo vértice lo eligió de forma arbitraria, es decir, sin una posición fija, lo que no permite que el octágono este siempre inscrito como se muestra en la **Figura 4.** Además, intenta replicar las figuras geométricas que observa.

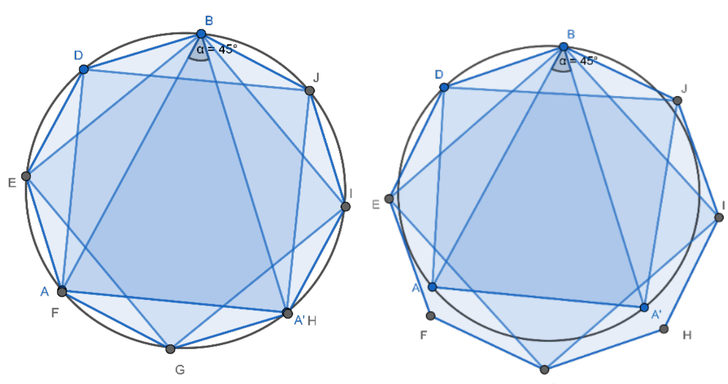


Figura 4. Solución dada por E1 a la actividad 3

A partir de observar las respuestas dadas por E1 se realizó una entrevista en la que se le cuestionó sobre algunas propiedades de los triángulos y de algunas rectas notables en geometría. Al notar que recordaba pocas propiedades de estas se le dio una breve explicación mostrando las figuras en GeoGebra para posteriormente solicitarle que intentara dar una nueva solución a las actividades 2 y 3 obteniendo las construcciones mostradas en las Figuras 5 y 6.

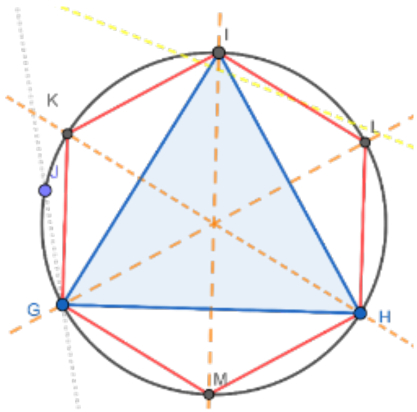


Figura 5. Solución dada por E1 a la actividad 2

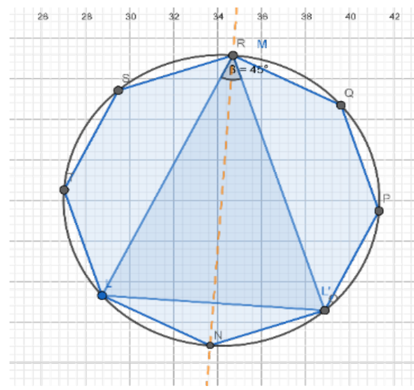


Figura 6. Solución final dada por E1 a la actividad 3

Por último, en la actividad 4, tomó como un posible triángulo el formado por dos diagonales del eneágono y un lado de este, lo que facilitó la construcción usando la herramienta polígono regular. Además, en este momento recordaba los nombres de las líneas presentes en las figuras trabajadas y era capaz de dar una solución a la actividad sin necesidad de apoyo.

Se puede ver, al analizar las construcciones realizadas en las primeras dos actividades, que E1 cumple con algunas características propias del nivel 1 del modelo de Van Hiele, pues como menciona Vargas, et al [1], el estudiante está haciendo contacto con el nuevo tema de estudio, además, en las respuestas dadas en la entrevista y las herramientas elegidas para construir el pentágono y el hexágono se observa que estas han servido para formar nuevos conocimientos y entender algunas propiedades. En las actividades siguientes, se percibe que el estudiante ha logrado cumplir más características propias del nivel, pues ya es capaz de expresar con sus palabras los procedimientos que ha usado y recuerda los nombres y propiedades de algunas figuras.

Al término de la entrevista, se puede concluir que E1 cumplió con todas las fases propuestas por Van Hiele para el primer nivel y está en proceso de consolidar las características propias del nivel 2. Dado que logró consolidar su conocimiento pues expresó con más fluidez sus ideas, y es capaz de usar adecuadamente los nombres y propiedades de la mayoría de las figuras utilizadas en sus construcciones, tomando en cuenta lo observado en el análisis de las características del modelo y la forma de proceder de E1 para resolver las actividades, se deduce que la visualización fue una herramienta clave. El que pudiera utilizar las herramientas que GeoGebra ofrece para la construcción de los polígonos solicitados, hizo que fuera capaz de ver errores que tal vez no hubiera observado, como en la actividad tres, que al construir el octágono notó que la ubicación de los vértices sí era importante. Además, como las respuestas dadas no siguen un mismo procedimiento, también se observa que la comprensión que tiene es relacional, pues Skemp [3] menciona que la comprensión relacional es el saber qué hacer y por qué, lo que se podría tomar en este caso como el entender por qué falla cierto procedimiento y así poder seguir un camino distinto de construcción.

5.2 Análisis de los resultados obtenidos por E2

En la actividad 1, el estudiante E2 notó que las diagonales del pentágono forman triángulos, y en general que los polígonos están formados por triángulos. Por lo que, para construir el polígono solicitado tomó los vértices del triángulo inicial para trazar otros iguales a este, hasta formar el pentágono como se muestra en la **figura 7**. Posteriormente en la actividad 2 pintó el punto medio de cada uno de los lados del triángulo y trazó las rectas que pasan por estos puntos y los vértices opuestos a estos respectivamente como se muestra en la **figura 8**.

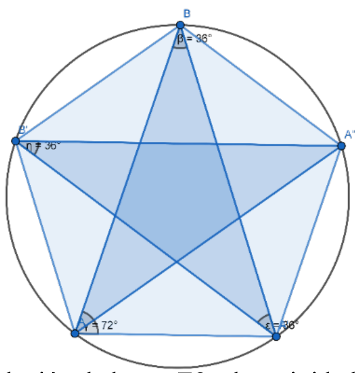


Figura 7. Solución dada por E2 a la actividad 1

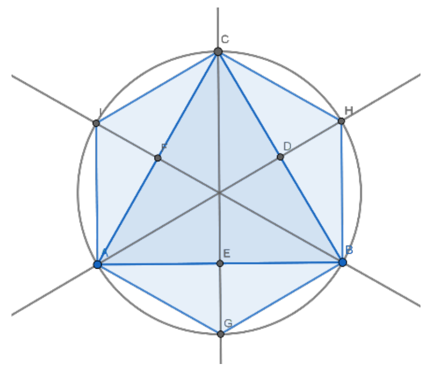


Figura 8. Solución dada por E2 a la actividad 2

Por último, tomó como vértice del hexágono los puntos de intersección entre las rectas trazadas y la circunferencia que inscribe el triángulo. Al cuestionar a E2 por qué no procedió de la misma forma que en la actividad anterior, comentó que usando su lógica notó que no sabía cuántos grados debía rotar el triángulo para que quedara al revés, y donde cayeran los vértices de este serían los vértices faltantes del hexágono. Por lo que era más fácil, trazar una recta que pasara por el punto medio de los lados del triángulo, para así tomar la intersección con la circunferencia y de ese modo poder construir el polígono solicitado.

Para la actividad 3 construyó ángulos dada su amplitud desde los vértices A y A' del triángulo, luego trazó las rectas que pasan por los vértices de los ángulos obtenidos y para poder pintar los puntos C y D que son las intersecciones de las rectas con la circunferencia. Notó que para construir el octágono faltaban tres puntos más e intentó construir uno tomando como vértice el punto C, pero el ángulo obtenido no le resultó útil como se muestra en la **Figura 9**.

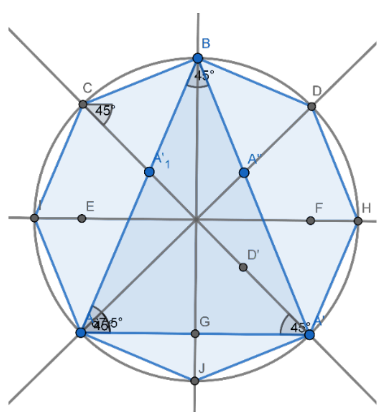


Figura 9. Solución dada por E2 a la actividad 3

Sin embargo, luego notó que había una diagonal horizontal que dividía al triángulo en dos partes, por lo que tomó el punto medio entre los puntos A, C y D, A' para trazar la diagonal que necesitaba.

Por último, para encontrar el vértice faltante tomó el punto medio del segmento AA’ y trazó la recta que pasa por este punto y el vértice B del triángulo.

E2 mencionó en la entrevista realizada que para construir el polígono solicitado en la actividad 3 intentó hacer el mismo procedimiento que en la actividad 1, pues notó que el procedimiento funciona para triángulos irregulares, sin embargo, solo pudo obtener dos vértices por lo que, para encontrar otros dos trazó la diagonal que dividide en dos al triángulo verticalmente y aplicó este mismo procedimiento para el vértice faltante. También notó que las rectas que obtuvo formaban ángulos de 90° por lo que las otras dos rectas trazadas dividen a estos en 45° que es lo que se necesita. En la entrevista se observó que E2 logra hacer deducciones de lo que observa en las actividades, una de ellas es que su método de construir los polígonos a partir de triángulos solo funciona cuando estos son isósceles.

En la última actividad E2 resolvió como se muestra en la **figura 10**. Partió de un triángulo que está conformado por un ángulo de 20°, dos diagonales y un lado del eneágono. Luego, construyó el eneágono trazando ángulos dada su amplitud para así construir triángulos isósceles semejantes al dado inicialmente, estos tenían como vértices los puntos que va obteniendo de los triángulos anteriores. Lo mismo que aplicó en la actividad 1 y tres, mencionando que en este caso sí funciona pues el triángulo del que parte es un triángulo irregular.

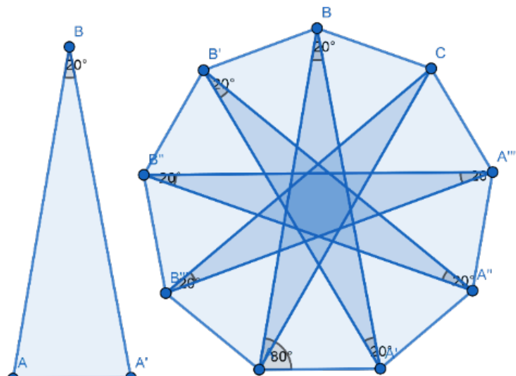


Figura 10. Solución dada por E2 a la actividad 4

También mencionó que esta forma de resolver solo funciona con polígonos con número de lados impares, por lo que para probar que si funcionaba con otro polígono impar se le pidió lo aplicara con un endecágono, notando que con este polígono también funcionó (**Figura 11**).

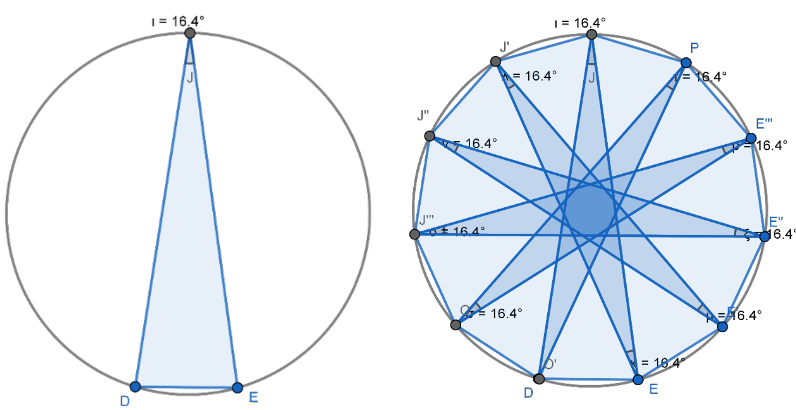


Figura 11. Construcción del endecágono dada por E2

Se observa desde la primera actividad que el estudiante se encuentra en el nivel 2 del modelo de Van Hiele, pues es capaz de utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades diferentes a las comunes y, probablemente, más complejos. Además, establece propiedades de los polígonos de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación, sin embargo, aún no puede elaborar definiciones [1]. Al trabajar la segunda y tercera actividad, el estudiante logra completar las siguientes características propias del nivel 2 y al finalizar las actividades se puede ubicar al estudiante en el nivel 3 pues es capaz de interrelacionar lógicamente propiedades de los conceptos. Puede formular definiciones abstractas, y es capaz de señalar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los polígonos para utilizar una u otra forma de construcción [1].

E2 logró encontrar nuevos caminos de construcción para los polígonos e incluso logró hacer deducciones que pueden ser aplicadas a ciertos polígonos. Este es un claro ejemplo de la importancia de tener comprensión relacional e instrumental, pues la primera ayudó a notar cuando es aplicable la nueva regla y la segunda es solo la aplicación de esta [3].

5.3 Análisis de los resultados obtenidos por E3

En la actividad 1, E3 construyó el triángulo inicial usando la herramienta "polígono" por lo que el triángulo obtenido no siempre es isósceles. Posteriormente, para construir el pentágono, construyó los triángulos que tienen como vértices los puntos A, B y D y A, C y E respectivamente. Como los triángulos construidos tienen todos puntos dinámicos, es decir, no tienen una posición fija dentro de la construcción, el pentágono que obtiene no es siempre regular, como se muestra en la **Figura 12**.

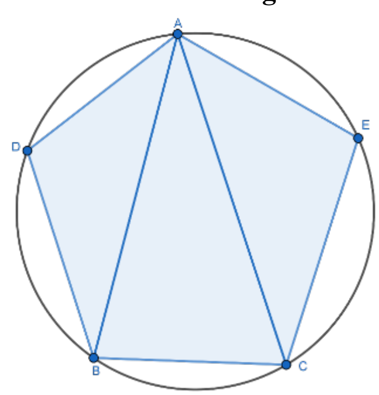


Figura 12. Solución dada por E3 a la actividad 1

La construcción dada puede deberse a que no había trabajado con un SGD, en este caso GeoGebra por lo que, aunque en un principio para E3 parece un polígono regular, en el SGD no siempre lo es.

Para la actividad 2 primero construyó el triángulo equilátero solicitado, posteriormente procedió como en la actividad 1, es decir, dibujó triángulos en cada uno de los lados del triángulo equilátero para obtener el hexágono, como se muestra en la **Figura 13**. En este caso si notó que el polígono que obtuvo no era regular por lo que dio una nueva construcción, partió de un hexágono regular inscrito, luego trazo los triángulos que tienen como vértices los puntos A, E, C y F, D, B respectivamente. Posteriormente trazó un punto G donde consideró era el centro del polígono para así construir el triángulo con vértices G, E y D, como se muestra en la **Figura 14**.

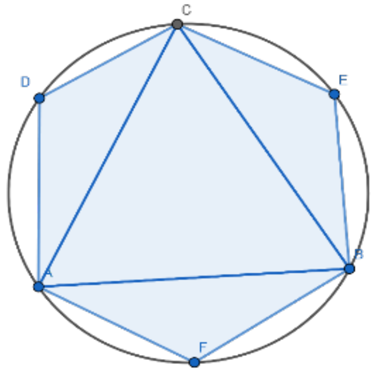


Figura 13. Solución 1 dada por E3 a la actividad 2

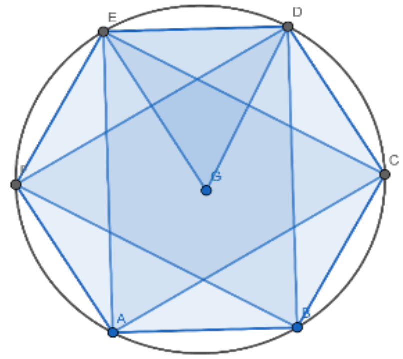


Figura 14. Solución 2 dada por E3 a la actividad 2

En esta actividad se observa un avance en cuanto al uso de las herramientas de GeoGebra, pues entiende la diferencia entre la herramienta polígono y polígono regular, lo que también permite que perciba otras propiedades de los polígonos como el centro, aunque estas sigan siendo parte de un todo.

Para la tercera actividad E3 construyó el octágono con la herramienta polígono regular, posteriormente trazó las figuras geométricas que notó que se formaban con las diagonales, iniciando por el cuadrado, posteriormente dos triángulos y finaliza con un rectángulo como se muestra en la **Figura 15**.

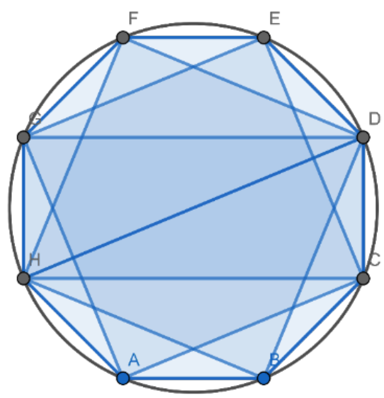


Figura 15. Solución dada por E3 a la actividad 3

E3 notó algunas propiedades de las diagonales, sin embargo, estas no son suficientes para lograr construir el octágono solicitado a partir de los triángulos formados por las diagonales. Por último, en la actividad 4, E3 procedió como la mayoría de los estudiantes hasta ahora. Dio un posible triángulo formado por dos diagonales y un lado del triángulo, pero no construyó el eneágono a partir de este.

En las respuestas dadas por E3 se observa que cumple con lo mencionado por Vargas, et al. [1] para el nivel 2 del modelo de Van Hiele, pues logró reconocer algunas propiedades particulares de los polígonos y sus diagonales, aunque no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades que lo ayuden a formar los polígonos a través de las diagonales. Tomando en cuenta la actitud de este estudiante al momento de la aplicación de las actividades, las construcciones dadas y la experiencia con los estudiantes entrevistados, se podría considerar que, con una asesoría especializada, podría llegar al nivel 3 del modelo de Van Hiele.

La visualización para este estudiante fue de importancia pues el poder observar y comparar los polígonos con sus diagonales y las construcciones realizadas por él, permite un avance en el nuevo tema de estudio y las herramientas con las que cuenta. En cuanto al tipo de comprensión de este estudiante se podría considerar que es relacional pues no busca aplicar reglas, sino que trata de entender qué pasos debe seguir para obtener lo que se le solicita en cada actividad [3].

6. Resultados

La mayoría de los estudiantes intentaron reproducir lo que observaban visualmente o aplicar el mismo procedimiento para todas las actividades, lo que muchas veces no permitía que lograran reconocer propiedades diferentes a las que ya conocían de los polígonos. Otra de las situaciones observadas es que muchos no tomaban en cuenta que en GeoGebra algunos puntos no son fijos, sino que son dinámicos lo que evitaba que las construcciones dadas fueran siempre regulares, esto es más una problemática en relación con el uso y conocimiento que tenían los estudiantes sobre este software, sin embargo, en algunos casos las herramientas que ofrece fueron de ayuda para dar posibles construcciones y observar propiedades y comportamiento de los polígonos.

En cuanto a los niveles alcanzados del modelo de Van Hiele, solo E2 logró avanzar al nivel 3, pues logró hacer deducciones a través de lo realizado, los demás estudiantes se ubican entre el nivel 1 y 2, e incluso la mayoría está en el nivel 1 pues aunque reconocen características de los polígonos, las reconocen como un todo, lo que hacía que intentaran reproducir lo que observaban [1], esto hace pensar que el tipo de conocimiento que sobresale es el instrumental, sin embargo, no es así pues Skemp [3] menciona que la comprensión relacional es entender por qué y para qué se hacen las cosas y la mayoría de los estudiantes intentó caminos en los que se observa que buscaban entender por qué se veían de determinada forma los polígonos, por ejemplo E3 al dar dos formas de construcción del hexágono deja ver ese interés, por lo que si bien en la mayoría de los estudiantes prevalece la comprensión instrumental también se tiene una comprensión relacional.

Lo anterior hace pensar que la visualización es una herramienta importante para lograr que los estudiantes tengan una comprensión relacional, pues esta permite ver e interpretar datos a través de imágenes que no solo son presentadas en papel, sino que usan Sistemas de Geometría Dinámicos como GeoGebra, que en este caso ayudó a la exploración de las propiedades de los polígonos y como estas pueden ser de ayuda para construirlos.

7. Conclusiones

El poco tiempo para la aplicación de las actividades significó una dificultad dado que algunos estudiantes no lograron habituarse a las herramientas que GeoGebra ofrece, por lo que a veces también significó un problema para poder plantear respuestas que ayudaran a una mejor exploración de los polígonos y la geometría en general. Algunos estudiantes realizaron construcciones sin tomar en cuenta que en el SGD las figuras no son estáticas, sino que las propiedades que tienen dependen de la forma en que son construidas.

Tomando en cuenta lo anterior, en la continuación de este trabajo se puede realizar una mejora de las actividades haciendo que sean más las actividades, haciendo que sean más específicas y que ayuden a entender el uso de las herramientas de GeoGebra, lo que a su vez podría verse reflejado en que los estudiantes transiten a los niveles más avanzados del modelo de Van Hiele.

Este trabajo tuvo como propuesta mostrar que, a partir de trabajar con los estudiantes actividades creadas de forma específica y haciendo uso de los SGD, el aprendizaje de las propiedades de los polígonos puede ser más fácil, además de que el uso de la visualización en las actividades puede ayudar a que la comprensión de los estudiantes sea relacional y no instrumental, es decir que los estudiantes entiendan el por qué las reglas que conocen en algunos casos funcionan y en otros no, así como el poder crear o descubrir nuevos caminos de solución [3]. Para ello se diseñaron actividades basadas en las fases de Van Hiele con el fin de dar una respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cómo ayuda en la comprensión de las propiedades de los polígonos a estudiantes de medio superior trabajar con actividades planteadas en GeoGebra?

Al analizar las respuestas obtenidas después de la aplicación de este diseño, se observó que si bien la mayoría de los estudiantes logró una comprensión relacional [3], pues, buscaban entender cómo y por qué se obtenían los polígonos a partir de las diagonales, los niveles de Van Hiele en los que se ubicó a la mayoría de los estudiantes fueron en el 1 y 2, que como lo mencionó Carreño, et al [6] es en el nivel en el que se encuentran incluso los profesores en formación. En el caso de nuestro estudio puede deberse a que se necesita ser más claros en las peticiones de las actividades, pues se observó en el análisis que algunos de los estudiantes construían lo solicitado mecánicamente lo que llevaba a que obtuvieran polígonos que no estaban inscritos.

Se observó que efectivamente trabajar con GeoGebra para mostrar las propiedades y características de los polígonos ayuda que la comprensión sea relacional, pues el uso de este SGD ayudó a una mejor interpretación de datos a través de imágenes o diagramas y facilitó la interpretación y documentación de la información. Además, se observó que el uso de este ayudó a desarrollar nuevas ideas y conocimientos en los estudiantes [1]. Aunque en la aplicación se intentó que la interacción entre los estudiantes fuera mínima, sí se observó que aquellos estudiantes que compartían ideas tenían construcciones similares e incluso particulares como es el caso de E3 pues en su última construcción reconoce que los polígonos que había construido anteriormente no eran regulares, esto reafirma lo que Cuervo Lancheros, et al [7] describe en su trabajo, el uso de GeoGebra motiva a los estudiantes a interactuar y fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes.

8. Agradecimientos

Agradezco al Dr. Gonzalo Zubieta por su orientación en la creación de este trabajo, así como a la institución de educación medio superior que me prestó los espacios necesarios para la aplicación de las actividades.

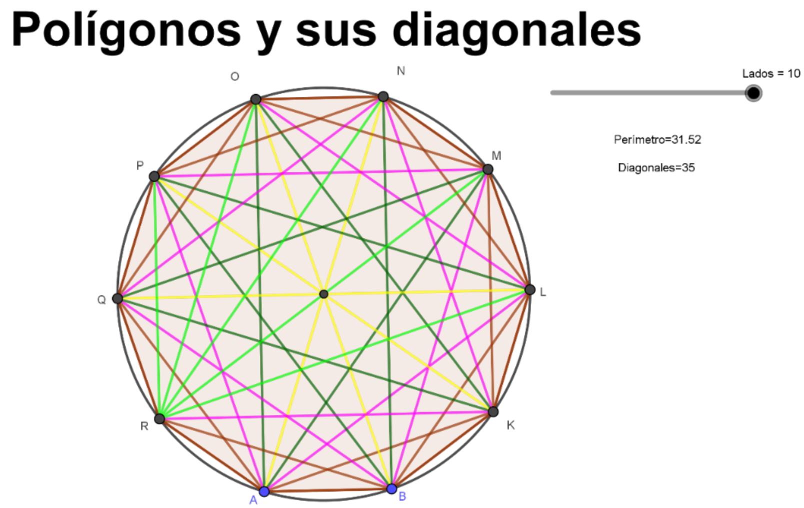
9. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses

10. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos

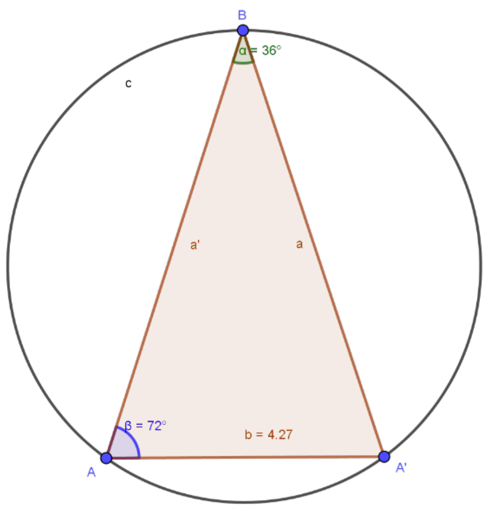
11. Resumen Gráfico

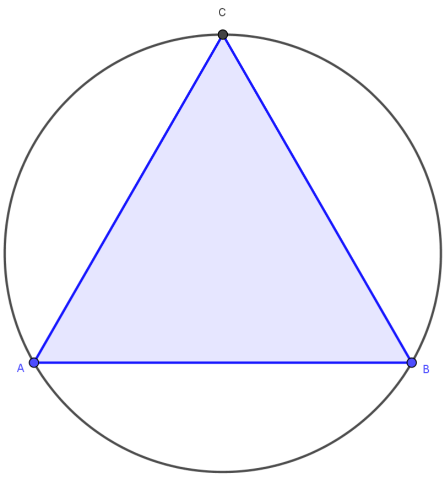


12. Referencias

[1] G. Vargas, y R. Gamboa, “El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría”, Uniciencia, vol. 27, no. 1, En-Feb, pp. 74-94, 2013, https://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=475947762005
[2] A. Arcavi, “The role of visual representations in the learning of mathematics”, Educational Studies in Mathematics, vol. 52, no. 3, Abril, pp. 215-241, 2003, DOI: 10.1023/A:1024312321077.
[3] R. Skemp, The Psychology of Learning Mathematics, Hillsdale, NJ: LEA, 1987.
[4] S. Morales y T. Rosas, “Una propuesta para el desarrollo de modelos geométricos en las Educadoras de Párvulos. El caso del polígono”, Estudios Pedagógicos, vol. XLII, no. 2, pp. 247-267, 2016, https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000200014
[5] A. G. González Peralta y M. Sánchez Aguilar, “Conocimientos de docentes de primaria en formación respecto a perímetro y área de polígonos”, Perfiles educativos, vol. 42, no. 169, pp. 70-87, 2020, https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.169.59328
[6] E. Carreño y N. Climent, “Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas”, PNA, revista de la universidad de Granada, vol. 5, no. 1, pp. 11-23, 2010, https://doi.org/10.30827/pna.v5i1.6158
[7] D. T Cuervo Lancheros, C. A. Fonseca Cuervo y O. Sepúlveda Delgado, “La comprensión de los polígonos por medio del geogebra en estudiantes de grado séptimo”, Revista Boletín Redipe, vol. 10, no. 7, pp. 372–384, 2021, https://doi.org/10.36260/rbr.v10i7.1374
[8] R.A. Cantoral Uriza y G. Montiel Espinosa, Funciones: visualización y pensamiento matemático. Ciudad de México: Pearson Educación, 2001
[9] Bortolussi Alarcón, J., et al., Libro para el maestro, educación secundaria, Matemáticas. SEP, 1994

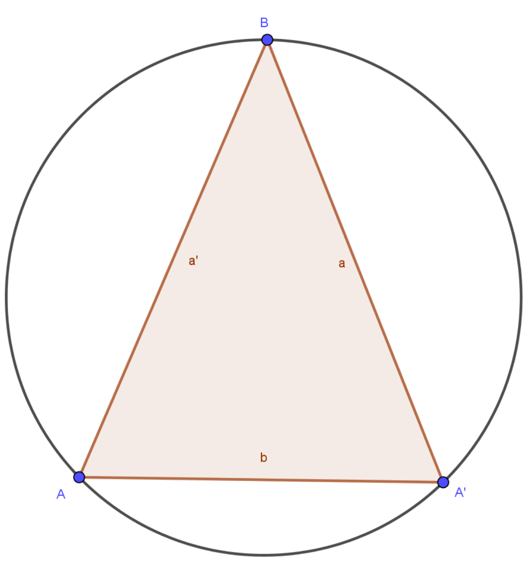
13. Anexo 1: Actividades planteadas a los estudiantes en GeoGebra

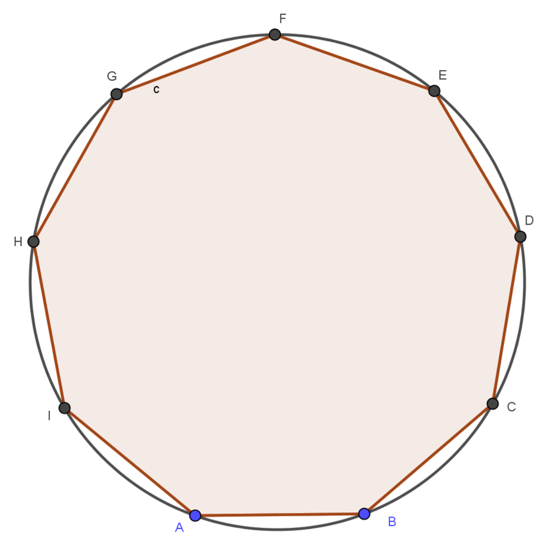




Actividad 1: Dado el siguiente triángulo isósceles inscrito en la circunferencia, construye un pentágono regular.

Actividad 2: Dado el siguiente triángulo equilátero inscrito en la circunferencia, construye un hexágono regular.





Actividad 3: Dado el siguiente triángulo isósceles inscrito en la circunferencia, construye un octágono regular.

Actividad 4: Dado un eneágono inscrito en una circunferencia ¿Qué triángulo consideras que podría servir de base para construirlo a partir de sus diagonales?