



**UJAT**

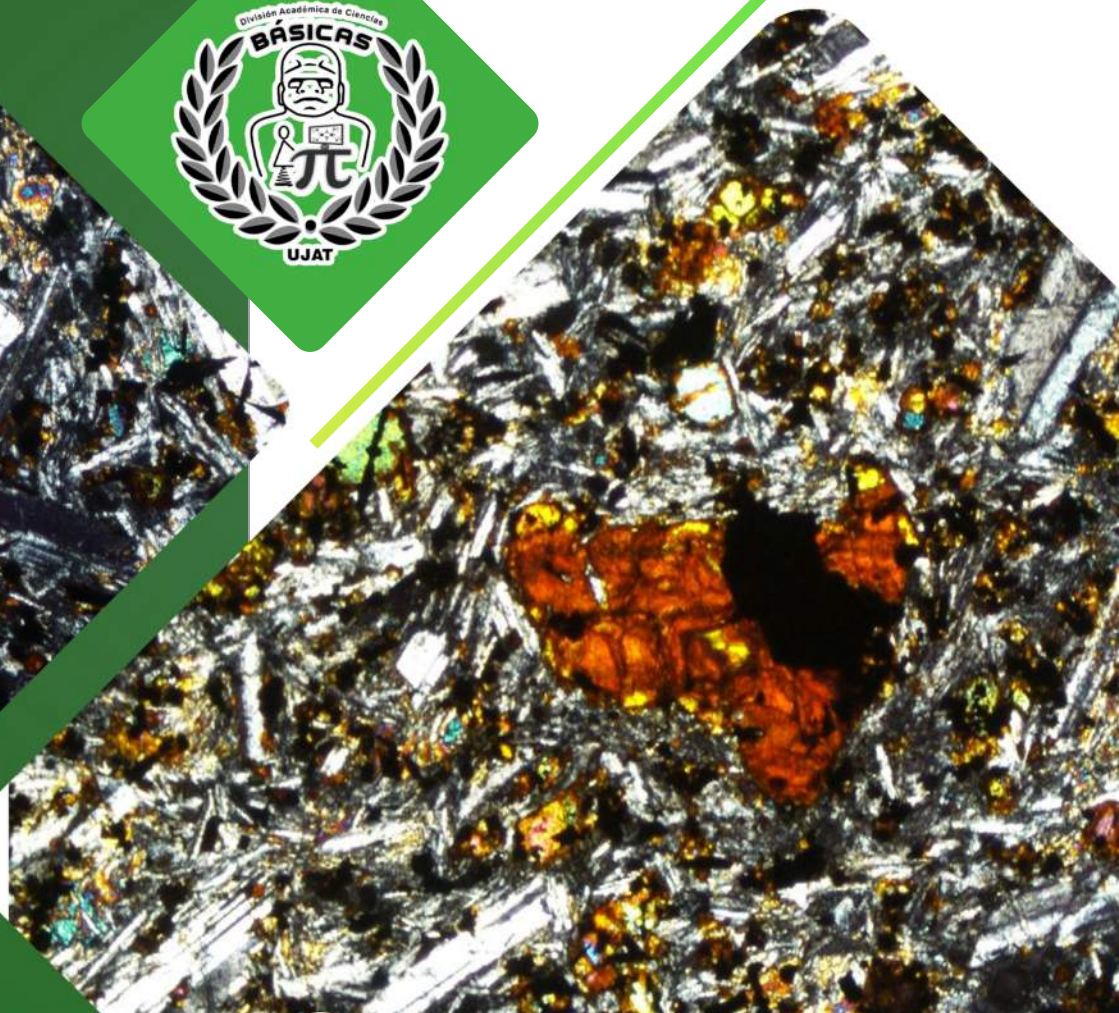
UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

# **JOBS**

**Journal of Basic Sciences**

DACB • UJAT





**UJAT**

UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



El presente número del Journal of Basic Sciences está integrado por seis contribuciones que, desde distintos campos de las ciencias naturales y matemáticas, ponen de relieve una característica fundamental en la investigación contemporánea que es la diversidad de enfoques y metodologías aplicadas en la búsqueda de soluciones y respuestas ante problemáticas específicas. Aun cuando el contexto y los objetos de estudios son diversos, desde las ciencias de la tierra hasta el análisis funcional, la física teórica o la teoría de categorías, en todos ellos se comparte un interés común: abundar en la comprensión de los fenómenos abordados, mediante herramientas metodológicas rigurosas.

El primer artículo, realizado en el campo volcánico "La Repartición", situado al noreste de San Luis Potosí, se enfoca en el análisis de la distribución de tamaño de cristales y el cálculo de los tiempos de residencia de microcristales de plagioclasa en este escenario geológico, muy apropiado para el estudio de procesos magmáticos. Con los resultados obtenidos, se enriquece la comprensión de la evolución textural de las rocas máficas y se subraya la importancia de los estudios microestructurales para reconstruir la dinámica interna de los sistemas volcánicos.

En la segunda contribución, se pone de manifiesto también el interés por estudiar la interacción entre procesos naturales y condiciones locales, ya que se examina la composición mineralógica y edafológica de suelos en Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco. Mediante estudios de difracción de rayos X y trabajo en campo, se encuentran diferencias sustanciales en la mineralogía, las propiedades físicas y la capacidad de intercambio iónico de los suelos, revelando así tanto la variabilidad intrínseca de los mismos como la influencia de actividades antropogénicas. Con este trabajo, se ofrecen insumos valiosos destinados a un manejo sostenible de los suelos en la región.

Las síntesis y propiedades catalíticas del óxido de zinc se estudian en el tercer artículo de este número, mediante técnicas analíticas apropiadas se logró la caracterización de este compuesto obtenido mediante combustión en estado sólido, además de que se probó su actividad para la degradación del 4-nitrofenol en condiciones de fotocátalisis, probándose así que puede ser un material promisorio para aplicarse exitosamente en el área de la química ambiental.

El cuarto trabajo se incluye en el ámbito de la probabilidad y el análisis, al analizar las propiedades fundamentales del kernel de calor de Dirichlet asociado a procesos de Markov simétricos, potencialmente discontinuos. Al demostrar una serie de características tales como continuidad, simetría y la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se fortalece la comprensión teórica del fenómeno, además de hacer posible su aplicación en ecuaciones semilineales de reacción-difusión no autónomas. De esta forma se entrelazan procesos estocásticos con problemas de evolución gobernados por operadores no locales.





**UJAT**

UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”



Por otro lado, se presenta en el quinto artículo una reconstrucción precisa de la deducción de Feynman de las ecuaciones de Maxwell. A partir de la segunda ley de Newton y de las relaciones de Poisson en un espacio euclídeo, el análisis se extiende a un marco relativista mediante cálculos tensoriales en el espacio de Minkowski. Con ello, se abunda en la comprensión de los supuestos fundamentales de la derivación original, fortaleciendo así la formulación pedagógica del problema e integrando el principio de acoplamiento mínimo con los desarrollos de Montesinos y Pérez-Lorenzana.

Finalmente, en la sexta contribución de este número, se profundiza en conceptos centrales de la teoría de categorías, como son la representabilidad, los objetos universales y el Lema de Yoneda. Mediante una serie de ejemplos que abarcan áreas de las matemáticas como el álgebra lineal, la topología y la teoría de anillos, se ofrece una ruta clara hacia la comprensión de estas nociones, contribuyendo así a una difusión de ideas fundamentales que forman parte del pensamiento matemático moderno.

En conjunto, los trabajos incluidos en este número ilustran la riqueza interdisciplinaria de la investigación actual y subrayan el valor del rigor científico, desde sus aspectos conceptuales hasta los metodológicos, para la generación de conocimiento. Que estas aportaciones sirvan de inicio para nuevas dudas e inquietudes, fomentando la interacción académica y estimulando el desarrollo de investigaciones futuras.



**UJAT**

UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



## DIRECTORIO INSTITUCIONAL

### Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.  
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.  
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.  
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,  
Divulgación Científica y Tecnológica

### Directorio Divisional División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.  
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.  
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.  
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.  
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión





**UJAT**

UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"



## CONSEJO EDITORIAL

- **Dr. Carlos Ernesto Lobato García.** Editor en Jefe. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7780>
- **Dr. Adib Abiu Silahua Pavón.** Gestor Editorial. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-5344-1430>

## COMITÉ EDITORIAL

- **Mtra. Claudia Gisela Vázquez Cruz.** Editora Asociada. Actuaría. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0002-1791-5621>
- **Mtra. María Hortensia Almaguer Cantú.** Editora Asociada. Ciencias de la Computación. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0007-7839-9014>
- **Dr. José Arnold González Garrido.** Editor Asociado. Ciencias Farmacéuticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-1135-4050>
- **Dr. José Luis Benítez Benítez.** Editor Asociado. Física. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0009-0000-0561-5029>
- **Mtro. Guillermo Chávez Hernández.** Editor Asociado. Geofísica. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-3555-9678>
- **Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé.** Editora Asociada. Matemáticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-7342-0888>
- **Dra. Nancy Romero Ceronio.** Editora Asociada. Química. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-8169-3811>

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 32, diciembre de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. <https://revistajobs.ujat.mx>. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.



Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación y de esta Casa Editora.

Las publicaciones respaldadas con el sello editorial de la UJAT no podrán utilizarse para entrenar modelos de IA generativa, a menos de que haya una declaración expresa, tanto de la Universidad como de los autores y/o herederos.

## CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
<b>Distribución de tamaño de cristales y tiempo de residencia en rocas máficas del Complejo La Repartición, San Luis Potosí, México</b>	<b>1-9</b>
<b>Caracterización Mineralógica y Edafológica de los Suelos de Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco</b>	<b>10-19</b>
<b>Propiedades Fotocatalíticas del ZnO Sintetizado por Combustión en Estado Sólido: Análisis Estructural y Degradación de 4-Nitrofenol</b>	<b>20-28</b>
<b>Propiedades elementales del kernel de calor de Dirichlet para procesos de Markov simétricos y sus aplicaciones</b>	<b>29-51</b>
<b>Dedución de las ecuaciones de Maxwell mediante la prueba de Feynman-Dayson y su generalización relativista</b>	<b>52-67</b>
<b>Funtores representables, lema de Yoneda y objetos universales.</b>	<b>68-84</b>

# Deducción de las ecuaciones de Maxwell mediante la prueba de Feynman-Dayson y su generalización relativista.

Arias-Jiménez, S. A.<sup>1</sup> , López-Arellano, C.M.<sup>2</sup>, Manuel-Cabrera, J.<sup>1,\*</sup> , Paulin Fuentes, J.M.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, c.p. 86690, Km. 1 Carretera Cunduacán-Jalpa de Méndez, Col. La Esmeralda, Cunduacán, Tabasco, México.*

<sup>2</sup>*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla., Apartado Postal J-48 72570, Puebla, Puebla, Mexico.*

\*jaime.manuel@ujat.mx

---

## Resumen

Este trabajo ofrece una reconstrucción detallada y conceptualmente clara de la deducción de Feynman de las ecuaciones de Maxwell, basada en la segunda ley de Newton y en el uso de corchetes de Poisson entre coordenadas y velocidades en un espacio euclídeo. Aunque motivado pedagógicamente, nuestro enfoque es rigurosamente técnico y clarifica los supuestos fundamentales que subyacen tanto en la deducción original como en su extensión relativista. Comenzamos revisando la ley de la fuerza de Lorentz en un marco euclídeo clásico, para luego reformularla de manera covariante utilizando el cálculo tensorial en el espacio de Minkowski, incorporando la prescripción de acoplamiento mínimo tal como fue establecida formalmente por Montesinos y Perez-Lorenzana. Su contribución permite reconciliar la prueba de Feynman con una aplicación general y sistemática del principio de acoplamiento mínimo.

**Palabras claves:** *Ecuaciones de Maxwell, Corchetes de Poisson, Prueba de Feynman-Dayson, Acoplamiento mínimo.*

## Abstract

This work offers a detailed and conceptually transparent reconstruction of Feynman's derivation of Maxwell's equations, based on Newton's second law and the use of Poisson brackets between coordinates and velocities in Euclidean space. While pedagogically motivated, our approach is technically rigorous and clarifies the foundational assumptions underlying both the original and relativistic versions of the derivation. We begin by revisiting the Lorentz force law in a classical Euclidean framework and then reformulate it covariantly using Minkowskian tensor calculus, incorporating the minimal coupling prescription as formally established by Montesinos and Perez-Lorenzana. Their contribution highlights how Feynman's proof can be reconciled with a general and systematic application of the minimal coupling principle.

**Keywords:** *Maxwell's equations, Poisson brackets, Feynman-Dyson proof, Minimal coupling.*

---

Recibido: 27 de julio de 2025. Aceptado: 28 de noviembre de 2025. Publicado: 12 de diciembre de 2025.



## 1. Introducción

La demostración de las ecuaciones de Maxwell a partir de principios mecánico-cuánticos, originalmente atribuida a Richard Feynman y difundida por Freeman J. Dyson en 1989 [1], representa un enfoque novedoso para conectar la dinámica de partículas con la teoría electromagnética clásica. En su trabajo, Dyson mostró que, partiendo de la segunda ley de Newton y las relaciones de conmutación canónica, era posible derivar las ecuaciones fundamentales que gobiernan los campos eléctricos y magnéticos, así como la fuerza de Lorentz que actúa sobre partículas cargadas. Este planteamiento abrió un nuevo camino para entender la teoría electromagnética desde una perspectiva basada en principios mecánicos subyacentes.

El impacto de esta demostración generó múltiples discusiones críticas y extensiones en la literatura científica. Por un lado, autores como Farquhar [3], Dombey [7] y Moreira [8] señalaron limitaciones conceptuales y técnicas, particularmente en cuanto a la justificación de ciertos supuestos implícitos, como la estructura espacio-temporal y la dependencia de postulados específicos de la mecánica cuántica. Estas críticas fomentaron un análisis más riguroso y una búsqueda de condiciones en las que el argumento fuese válido.

Paralelamente, otros investigadores profundizaron en la generalización y formalización del método. Tanimura [4] realizó una extensión relativista y adaptó el esquema a teorías de gauge no abelianas, utilizando herramientas avanzadas del formalismo de operadores y la teoría cuántica de campos. Land, Shnerb y Horwitz [5] exploraron la conexión del enfoque de Feynman con los fundamentos de la teoría de gauge, destacando la importancia de las estructuras algebraicas y geométricas involucradas. Más recientemente, Montesinos y Pérez-Lorenzana [6] reformularon la demostración desde el principio de acoplamiento mínimo, clarificando el papel de la simetría gauge y la covarianza en la deducción de las ecuaciones de Maxwell.

Adicionalmente, investigaciones como la de Vaidya y Farina [2] cuestionaron la coexistencia coherente de las ecuaciones de Maxwell con la mecánica galileana, poniendo en evidencia la necesidad de la relatividad especial para un marco conceptual consistente. En un plano más formal, Bracken [9] estudió la estructura de corchetes de Poisson asociada al problema de Feynman, evidenciando vínculos profundos entre la formulación clásica y la cuántica, así como la geometría simpléctica subyacente.

En conjunto, estos trabajos han consolidado y enriquecido la comprensión del enfoque de Feynman-Dyson, situándolo como un puente conceptual importante entre la mecánica, la teoría de gauge y el electromagnetismo clásico, además de ofrecer nuevas perspectivas para su generalización a contextos relativistas y no abelianos.

Este trabajo presenta una reconstrucción sistemática y conceptualmente rigurosa de la deducción de las ecuaciones de Maxwell basada en principios mecánicos y geométricos, originalmente propuesta por Feynman. Aunque el enfoque tiene un espíritu pedagógico, se desarrolla con detalle técnico y busca clarificar los supuestos fundamentales que subyacen en el argumento original de Feynman y en sus extensiones relativistas y geométricas. Se revisa primero la deducción de la fuerza de Lorentz a partir de los corchetes de Poisson en un espacio euclídeo, y luego se reformula de manera covariante utilizando un formalismo tensorial compatible con la geometría de Minkowski.

Este artículo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 se revisa el procedimiento de Feynman-Dyson para deducir la forma de la fuerza de Lorentz y de las ecuaciones homogéneas. En la Sección 3 se presenta la extensión relativista de este enfoque en el espacio-tiempo plano de Minkowski, enfatizando el papel del tensor electromagnético y de los corchetes covariantes. En la sección 4 se introducen las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell prestando especial atención al concepto del acoplamiento mínimo. Mientras que finalmente, en la sección 5 se presentan algunas observaciones y posibles direcciones futuras de investigación.

## 2. Deducción de Feynman-Dyson de las ecuaciones de Maxwell.

El procedimiento propuesto por Feynman y presentado por Dyson [1] parte de una hipótesis central: asumir que existen corchetes de Poisson bien definidos entre las posiciones  $x_i$  y las velocidades  $\dot{x}_i$  de una partícula en un espacio euclídeo tridimensional, con las siguientes propiedades fundamentales

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (1)$$

$$m[x_i, \dot{x}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, que vale 1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ . Estas relaciones son análogas a las relaciones de conmutación canónicas en mecánica cuántica, con la diferencia de que se plantean en un marco clásico mediante corchetes de Poisson.

A partir de la segunda ley de Newton

$$m\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t). \quad (3)$$

y combinando esta relación con otras propiedades de los corchetes (ver apéndice), así como utilizando las reglas introducidas anteriormente (1)-(2), podemos deducir las siguientes expresiones

$$[x_i, f(x_j)] = 0, \quad (4)$$

lo que indica que la posición conmuta con cualquier función de posición, y también

$$[x_i, f(\dot{x}_j)] = \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}, \quad (5)$$

que nos muestra cómo la posición se relaciona con funciones de velocidad, y

$$[\dot{x}_i, f(x_j)] = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (6)$$

que indica la relación inversa para la velocidad con funciones de posición. Estas expresiones serán muy importantes para los cálculos que haremos.

### 2.1. Fuerza de Lorentz.

A partir de la segunda ley de Newton (3), queremos deducir la forma de  $F_i$ . Para ello, diferenciamos en el tiempo el corchete de la ecuación (2)

$$m \frac{d}{dt} [x_i, \dot{x}_j] = m [\dot{x}_i, \dot{x}_j] + m [x_i, \ddot{x}_j] = \frac{d}{dt} (i\hbar\delta_{ij}) = 0. \quad (7)$$

Recordando que, la fuerza está dada por (3), sustituimos esta expresión en (7), obteniendo

$$m [\dot{x}_i, \dot{x}_j] = -[x_i, F_j]. \quad (8)$$

*Interpretación:* la no conmutatividad entre las velocidades introduce un término proporcional a  $[x_i, F_j]$ , el cual, debido a la propiedad de antisimetría del corchete de Poisson, satisface la relación

$$[x_i, F_j] = -[x_j, F_i]. \quad (9)$$

Esto indica que dicho término posee una estructura antisimétrica en los índices espaciales. Para capturar esta característica de manera explícita, resulta natural introducir un nuevo campo antisimétrico, el cual puede, en principio, depender tanto de las coordenadas como de las velocidades. Para capturar de manera general esta estructura, introducimos un nuevo campo antisimétrico  $M_{ij}$ , y suponemos que existe una constante de proporcionalidad  $a$  tal que

$$[x_i, F_j] = aM_{ij}. \quad (10)$$

Donde sea  $M_{ij}$  una matriz antisimétrica de  $3 \times 3$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & 0 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

La constante  $a$  se introduce como un factor dimensional que permite mantener general la relación entre el conmutador (10) y (11), facilitando su identificación posterior con cantidades físicas conocidas. Este enfoque también permite que  $a$  absorba posibles factores constantes que surjan en el cálculo, y será determinado más adelante al comparar expresiones explícitas para el conmutador.

Definimos ahora un vector  $H_k$  tal que

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{123}H_3 & \epsilon_{132}H_2 \\ \epsilon_{213}H_3 & 0 & \epsilon_{231}H_1 \\ \epsilon_{312}H_2 & \epsilon_{321}H_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Esto nos permite escribir:

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}H_k. \quad (13)$$

Por lo tanto, se puede expresar

$$[x_i, F_j] = a\epsilon_{ijk}H_k. \quad (14)$$

Utilizando los resultados anteriores, en particular la ecuación (5), podemos reescribir la ecuación (14) como

$$[x_i, F_j] = \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i} = a\epsilon_{ijk}H_k, \quad (15)$$

de donde se obtiene

$$\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{ijk}H_k. \quad (16)$$

Cambiando el índice  $j$  por  $i$  en (16) y multiplicando por  $d\dot{x}_l$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_l} d\dot{x}_l = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{lik}H_k d\dot{x}_l, \quad (17)$$

$$dF_i = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{lik}H_k d\dot{x}_l, \quad (18)$$

renombrando el índice ( $l \rightarrow j$ ) en (18)

$$dF_i = \frac{m}{i\hbar} a\epsilon_{jik}H_k d\dot{x}_j. \quad (19)$$

Integrando esta relación con respecto a  $\dot{x}_j$



$$F_i = \frac{m}{i\hbar} a \epsilon_{jik} H_k \dot{x}_j + C_i(x, t), \quad (20)$$

y ajustando la constante  $a = -\frac{i\hbar}{m}$ . Este valor de  $a$  no solo ajusta la dimensión correcta de la relación, sino que también garantiza que la fuerza  $F_i$  adopte la forma esperada

$$F_i = -\epsilon_{jik} H_k \dot{x}_j + C_i. \quad (21)$$

La determinación de la constante  $a$  queda plenamente justificada, tanto dimensional como conceptualmente, habilitando la identificación de los campos físicos  $E_i(x, t)$  y  $H_i(x, t)$ . Al identificar  $C_i(x, t) = E_i(x, t)$ , la fuerza adquiere la forma

$$F_i = E_i + \epsilon_{ijk} \dot{x}_j H_k. \quad (22)$$

que coincide con la ley de Lorentz. De esta manera, queda establecido que  $E_i$  y  $H_i$  son los campos que rigen la dinámica de una carga sometida a interacciones electromagnéticas según las relaciones de conmutación.

## 2.2. Divergencia del campo magnético.

Continuando con las deducciones, ahora abordamos la inexistencia del monopolo magnético. Para ello, retomemos la ecuación (15)

$$[x_i, F_j] = -\frac{i\hbar}{m} \epsilon_{ijk} H_k. \quad (23)$$

Esta expresión es fundamental y constituirá el punto de partida para los desarrollos posteriores. Si ahora calculamos el conmutador de (23) con  $x_k$ , se obtiene

$$[x_k, [x_i, F_j]] = -\frac{i\hbar}{m} \epsilon_{ijl} [x_k, H_l]. \quad (24)$$

Aplicando la identidad de Jacobi<sup>1</sup>, tenemos

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] + [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, x_i]] + [\dot{x}_k, [x_i, \dot{x}_j]] = 0. \quad (25)$$

Observando el tercer término en (25), notamos su similitud con la ecuación (2). Aplicando el conmutador con  $\dot{x}_k$  al lado izquierdo de (2), se obtiene

$$[\dot{x}_k, [x_i, \dot{x}_j]] = [\dot{x}_k, \frac{1}{m} i\hbar \delta_{ij}] = 0. \quad (26)$$

De manera análoga, el segundo término de la identidad de Jacobi resulta ser 0. Esto deja únicamente el primer término

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = 0, \quad (27)$$

resultado que será fundamental para las interpretaciones físicas posteriores.

Recordando la ecuación (8), podemos conmutarla con  $x_k$  para obtener

$$[x_i, [x_j F_k]] = -m [x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = 0. \quad (28)$$

Este resultado puede sustituirse directamente en la ecuación (24), lo que nos lleva a

---

<sup>1</sup>  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$

$$[x_i, [x_j, F_k]] = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{jkl}[x_i, H_l] = 0. \quad (29)$$

De aquí se deduce que

$$[x_i, H_l] = 0. \quad (30)$$

Lo que significa que  $H$  es una función solo de  $x$  y  $t$ .

Otro resultado útil para nuestra demostración se obtiene al sustituir la forma propuesta para la fuerza de Lorentz en la ecuación (23)

$$[x_i, E_j + \epsilon_{jlk}\dot{x}_l H_k] = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (31)$$

Aplicando la propiedad de linealidad del conmutador (ver apéndice), la ecuación anterior se reescribe como

$$[x_i, E_j] + [x_i, \epsilon_{jlk}\dot{x}_l H_k] = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (32)$$

Analizando el segundo término del lado izquierdo en (32), aplicamos nuevamente la linealidad

$$\epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l H_k] = \epsilon_{jlk}([x_i, \dot{x}_l]H_k + [x_i, H_k]\dot{x}_l). \quad (33)$$

De acuerdo con (30), sabemos que  $[x_i, H_k] = 0$ , por lo que el segundo término en (33) desaparece, con lo que queda

$$\epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l H_k] = \epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l]H_k. \quad (34)$$

Sustituyendo ahora (2) en la expresión anterior, se obtiene

$$\epsilon_{jlk}[x_i, \dot{x}_l H_k] = \epsilon_{jlk}\left(\frac{i\hbar}{m}\delta_{il}\right)H_k = \epsilon_{jik}\frac{i\hbar}{m}H_k. \quad (35)$$

Sustituyendo en (32) los resultado de 35, obtenemos

$$[x_i, E_j] + \epsilon_{jik}\frac{i\hbar}{m}H_k = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (36)$$

obtenemos

Sustituyendo este resultado en (31), obtenemos

$$[x_i, E_j] = 0, \quad (37)$$

lo que indica que el campo eléctrico  $E$  también depende únicamente de  $x$  y  $t$ .

Regresando a la ecuación (23), la reescribimos como

$$m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = \frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}H_k. \quad (38)$$

multiplicando (38) en ambos lados por  $\epsilon_{ijl}$ , se obtiene

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}H_k = \frac{m^2}{i\hbar}\epsilon^{ijl}[\dot{x}_i, \dot{x}_j], \quad (39)$$

$$2\delta_k^l H_k = \frac{m^2}{i\hbar}\epsilon_{ijl}[\dot{x}_i, \dot{x}_j], \quad (40)$$

$$H_l = \frac{m^2}{2i\hbar}\epsilon_{ijl}[\dot{x}_i, \dot{x}_j] \quad (41)$$

Si ahora conmutamos (41) con  $\dot{x}_k$

$$[\dot{x}_k, H_k] = -\frac{im^2}{2\hbar}\epsilon_{ijk}[x_k, [\dot{x}_i, \dot{x}_j]]. \quad (42)$$

Nuevamente, aplicando la identidad de Jacobi

$$[x_k, [\dot{x}_i, \dot{x}_j]] = 0, \quad (43)$$

lo que finalmente implica

$$[\dot{x}_k, H_k] = 0. \quad (44)$$

Según la expresión (6), este conmutador se interpreta como

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (45)$$

es decir, la **ecuación de Maxwell para la divergencia del campo magnético**, lo cual completa la demostración de la inexistencia del monopolito magnético.

### 2.3. Ley de Faraday.

Para facilitar el desarrollo de los cálculos, partimos directamente de la ecuación (41). Si derivamos esta expresión con respecto al tiempo, obtenemos

$$\frac{d}{dt}H_k = -\frac{im^2}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\frac{d}{dt}[\dot{x}_i, \dot{x}_j]. \quad (46)$$

Sabemos que, por definición, el lado izquierdo de la ecuación se puede expresar como

$$\frac{d}{dt}H_k = \frac{\partial H_k}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial H_k}{\partial x_m}. \quad (47)$$

Ahora nos enfocamos en el lado derecho de la ecuación (46). Utilizando la relación entre la aceleración y la fuerza, se tiene:

$$-\frac{im^2}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\frac{d}{dt}[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[F_i, \dot{x}_j]. \quad (48)$$

Sustituyendo la expresión de la fuerza de Lorentz (22), se obtiene:

$$-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[F_i, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i + \epsilon_{imn}\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j]. \quad (49)$$

Analizando únicamente el lado derecho de la ecuación anterior, y aplicando las propiedades del conmutador, se llega a

$$-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i + \epsilon_{imn}\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i, \dot{x}_j] - \frac{im}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}[\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j]. \quad (50)$$

Aplicando la regla de Leibniz II (indicada en el apéndice como ecuación 112), y simplificando los términos, podemos escribir:

$$-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{ijk}[E_i + \epsilon_{imn}\dot{x}_m H_n, \dot{x}_j] = -\epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \dot{x}_j \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \dot{x}_k \frac{\partial H_j}{\partial x_j}. \quad (51)$$

Sustituyendo las expresiones de los lados izquierdo y derecho en la ecuación (46), se obtiene:



$$\frac{\partial H_k}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial H_k}{\partial x_m} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \dot{x}_j \frac{\partial H_k}{\partial x_j} - \dot{x}_k \frac{\partial H_j}{\partial x_j}. \quad (52)$$

De acuerdo con las propiedades deducidas en secciones anteriores, sabemos que el tercer término del lado derecho se cancela debido a imponer la ecuación (45). Además, los segundos términos de ambos lados de la ecuación (52) se anulan. Por lo tanto, queda la siguiente igualdad

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j}. \quad (53)$$

Esta expresión es equivalente a:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (54)$$

que corresponde a la Ley de Faraday, como se quería demostrar.

### 3. Formulación relativista especial.

Tomando en cuenta que previamente hemos deducido las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell utilizando de manera explícita la versión galileana de la ley de Lorentz en combinación con una estructura cuántica basada en los corchetes de Poisson, es decir, una formulación que entrelaza las descripciones clásica y cuántica como en la prueba de Feynman [2], [3], surge ahora una nueva consideración. Al trabajar en un espacio plano de naturaleza clásica, una de las debilidades de dicha derivación es la ausencia de covarianza de Lorentz de forma manifiesta. Por este motivo, resulta natural proponer una versión relativista especial del mismo razonamiento [4], [5].

Consideremos entonces una partícula relativista de masa en reposo  $m$  en un marco inercial, sometida a una fuerza externa tal que su momento generalizado satisface la regla de acoplamiento mínimo. Siguiendo el desarrollo detallado presentado en [6], partimos de una partícula que se mueve en un espacio-tiempo de Minkowski, cuyas coordenadas describimos como

$$x^\mu(\tau), \quad \mu = 0, 1, \dots, d-1, \quad (55)$$

donde  $\tau$  es un parámetro.

El momento canónico incorpora la contribución del campo electromagnético a través del potencial  $A_\mu$ , lo que nos permite escribir

$$\pi_\mu = m\dot{x}_\mu + A_\mu(x, \pi). \quad (56)$$

Establecemos ahora la notación para las derivadas respecto al tiempo propio  $\tau$  y las coordenadas canónicas de una función  $f(x, \pi)$  en el espacio de fases

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{d\tau}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \bar{\partial}^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \pi_\mu}. \quad (57)$$

El corchete de Poisson en su formulación relativista toma la forma

$$\{f, g\} \equiv \eta_{\rho\sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial x^\rho} \frac{\partial g}{\partial \pi^\sigma} - \frac{\partial g}{\partial x^\rho} \frac{\partial f}{\partial \pi^\sigma} \right) = \eta_{\rho\sigma} (\partial^\rho f \bar{\partial}^\sigma g - \partial^\rho g \bar{\partial}^\sigma f). \quad (58)$$

Gracias a la presencia explícita de la métrica de Minkowski  $\eta_{\rho\sigma}$ , este corchete es covariante bajo transformaciones de Lorentz, propiedad fundamental que lo distingue del caso galileano.

Con todo lo anterior establecido, procedamos a calcular el corchete  $\{x_\mu, \dot{x}_\nu\}$ . Para ello, partimos del despeje de la velocidad a partir de la expresión del momento canónico

$$\dot{x}_\nu = \frac{1}{m}(\pi_\nu - A_\nu(x, \pi)). \quad (59)$$

Al aplicar el corchete con  $x_\nu$ , se obtiene

$$\{x_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{1}{m}(\{x_\mu, \pi_\nu\} - \{x_\mu, A_\nu(x, \pi)\}). \quad (60)$$

Utilizando la definición del corchete relativista antes introducida, llegamos a la expresión

$$m\{x_\mu, \dot{x}_\nu\} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}. \quad (61)$$

Este resultado es análogo al caso no relativista (2), pero revela cómo la estructura métrica de Minkowski y la dependencia del potencial en el momento modifican la dinámica.

### 3.1. Fuerza de Lorentz Relativista.

Una observación crucial es que de la expresión (55) podemos empezar a esbozar la presencia de una fuerza. Derivando esta expresión con respecto al parámetro afín  $\tau$ , se obtiene

$$F^\nu = (\dot{\pi}_\nu - \frac{d}{d\tau} A_\nu(x, \pi)). \quad (62)$$

Para avanzar en la derivación, diferenciamos la ecuación (61) respecto a  $\tau$

$$m \frac{d}{d\tau} \{x_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{d}{d\tau} (\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}). \quad (63)$$

donde aplicamos la regla de Leibniz al corchete de Poisson

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} + m\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\} = \frac{d}{d\tau} (\frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}). \quad (64)$$

Reorganizando términos

$$m\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\} = -m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} + \frac{d}{d\tau} (\frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu}). \quad (65)$$

Este resultado vincula la variación de la aceleración con los corchetes de velocidad y la evolución del potencial. A continuación, evaluamos el corchete  $\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\}$  utilizando la expresión (59)

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} (\{\pi^\mu, \pi^\nu\} - \{A^\mu, \pi^\nu\} - \{\pi^\mu, A^\nu\} + \{A^\mu, A^\nu\}). \quad (66)$$

Dado que  $\{\pi^\mu, \pi^\nu\} = 0$  por ser canónicamente conjugadas a  $x^\mu$ , esta contribución se anula. Por tanto

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} (-\{A^\mu, \pi^\nu\} - \{\pi^\mu, A^\nu\} + \{A^\mu, A^\nu\}). \quad (67)$$

Evaluamos ahora cada término por separado mediante la definición del corchete de Poisson

$$\{A^\mu, \pi^\nu\} = \eta^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \pi^\nu}{\partial \pi^\sigma} - \frac{\partial \pi^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial A^\mu}{\partial \pi^\sigma} \right), \quad (68)$$

lo que simplifica a

$$\{A^\mu, \pi^\nu\} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (69)$$

y, por antisimetría,

$$\{\pi^\mu, A^\nu\} = -\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (70)$$

El último término se calcula como

$$\{A^\mu, A^\nu\} = \eta^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial A^\nu}{\partial \pi^\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu) \right). \quad (71)$$

Sustituyendo estos resultados en (66), obtenemos

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \{A^\mu, A^\nu\}), \quad (72)$$

donde es natural reconocer la estructura del tensor de campo gauge

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \{A_\mu, A_\nu\}. \quad (73)$$

Sustituyendo esta expresión en (65), resulta

$$m\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\} = \frac{1}{m} F_{\mu\nu} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right). \quad (74)$$

Multiplicando ambos lados por  $m$  y contrayendo con  $\dot{x}^\nu$ , se obtiene

$$m^2\{x_\mu, \ddot{x}_\nu\}\dot{x}^\nu = F_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu. \quad (75)$$

Lo cual nos permite identificar

$$m\ddot{x}_\mu = F_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu. \quad (76)$$

A partir de la ecuación (59), reconocemos

$$F^\mu = F^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu. \quad (77)$$

Definimos entonces el término adicional como

$$G^\mu(x) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi_\mu} \right) \dot{x}^\nu, \quad (78)$$

lo que nos permite expresar la fuerza total como

$$F^\mu = F^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu + G^\mu(x), \quad (79)$$

una generalización relativista de la fuerza de Lorentz, donde los dos términos satisfacen las siguientes condiciones de consistencia

$$\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu = 0, \quad (80)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad (81)$$

lo que implica la existencia de un campo escalar  $\phi(x)$  y un campo vectorial  $A_\mu(x)$  tales que

$$G_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (82)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (83)$$

Los resultados obtenidos en esta sección revelan de forma explícita cómo se manifiesta una fuerza tipo Lorentz en el contexto relativista, partiendo de la estructura del formalismo hamiltoniano con variables extendidas. En particular, la derivación del tensor de campo  $F_{\mu\nu}$ , que incorpora tanto los derivados del potencial como los corchetes de Poisson entre componentes del mismo, muestra la generalización natural de la fuerza electromagnética en este marco teórico.

La ecuación de movimiento (79), identifica dos contribuciones a la fuerza: una directamente asociada al tensor de campo  $F_{\mu\nu}$  y otra representada por  $G^\mu(x)$ , un término derivado del potencial que puede interpretarse como un gradiente de un campo escalar. Esta forma generalizada de la fuerza de Lorentz permite una descripción unificada de interacciones gauge y campos adicionales en contextos más amplios, como los que aparecen en teorías efectivas o formulaciones no canónicas.

Finalmente, la imposición de condiciones sobre los tensores  $F_{\mu\nu}$  y  $G_\mu$ , dadas por las ecuaciones (80) y (81), garantiza la existencia de funciones potenciales  $A_\mu(x)$  y  $\phi(x)$ , reforzando la consistencia interna del modelo. Este resultado es fundamental, ya que establece un vínculo directo entre la dinámica del sistema y la geometría de los campos que lo gobiernan.

### 3.2. Ecuaciones Homogéneas de Maxwell.

Con base en la sección anterior, podemos escribir la siguiente expresión:

$$F_{\mu\nu} = -m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = \{x_\mu, F_\nu\} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial \pi^\mu} \right). \quad (84)$$

Utilizando la identidad de Jacobi en términos de los momentos, tenemos:

$$\{x_\nu, \{\pi_\mu, \pi_\rho\}\} + \{\pi_\mu, \{\pi_\rho, x_\nu\}\} + \{\pi_\rho, \{x_\nu, \pi_\mu\}\} = 0. \quad (85)$$

Desarrollando y haciendo una relación con las coordenadas:

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = -\{\dot{x}_\mu, A_\nu\} - \{A_\mu, \dot{x}_\nu\} - \frac{1}{m}\{A_\mu, A_\nu\}. \quad (86)$$

Ahora destacamos el siguiente resultado:

$$m\{\dot{x}_\mu, A_\nu\} = -\partial_\mu A_\nu - \{A_\mu, A_\nu\}. \quad (87)$$

Por lo tanto, podemos sustituir:

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{1}{m}\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{m}\{A_\mu, A_\nu\}\partial_\nu A_\mu - \frac{1}{m}\{A_\nu, A_\mu\} - \frac{1}{m}\{A_\mu, A_\nu\}. \quad (88)$$

$$m\{\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu\} = \frac{1}{m}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \{A_\mu, A_\nu\}) = \frac{1}{m}F_{\mu\nu}. \quad (89)$$

Y sabemos por las deducciones anteriores cual es la forma del tensor del campo de gauge por (73), de dónde podemos encontrar la expresión:

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \{A_\mu, A_\nu\}). \quad (90)$$

Desarrollando a (90), podemos llegar a lo siguiente:

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = \partial_\alpha \{A_\mu, A_\nu\} + \partial_\mu \{A_\nu, A_\alpha\} + \partial_\nu \{A_\alpha, A_\mu\} \quad (91)$$

Y por lo tanto:

$$\{F_{\alpha\mu}, A_\nu\} + \{F_{\nu\alpha}, A_\mu\} + \{F_{\mu\nu}, A_\alpha\} = \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu}. \quad (92)$$

Reescribiendo:

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} - \{F_{\mu\nu}, A_\alpha\} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} - \{F_{\nu\alpha}, A_\mu\} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} - \{F_{\alpha\mu}, A_\nu\} = 0. \quad (93)$$

Ahora podemos definir la derivada covariante como:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - \{F_{\mu\nu}, A_\alpha\}. \quad (94)$$

Con base en esta definición, podemos encontrar lo siguiente:

$$D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \quad (95)$$

Esta es la expresión para las ecuaciones homogéneas del campo electromagnético.

## 4. Ecuaciones inhomogéneas de Maxwell.

Sin embargo, existen otras dos ecuaciones de Maxwell a tratar en nuestra demostración:

$$\text{div } E = 4\pi\rho, \quad (96)$$

$$-\frac{\partial E}{\partial t} + \text{rot} H = 4\pi J. \quad (97)$$

Las cuales son descartadas de la prueba de Dyson [1], sobre la base de que simplemente definen las densidades de carga y corriente externas  $\rho$  y  $J$ . Sin embargo, se observa que no son simultáneamente invariantes de Lorentz y de Galileo[3], [7], [8]. Para poder llevar a cabo dichas expresiones faltantes, podremos operar de diversas maneras.

### 4.1. El caso no abeliano.

Ahora, todo lo anterior mencionado, sugiere que las ecuaciones clásicas de campo gauge no abeliano podrían obtenerse de la regla de acoplamiento mínimo a través de una condición especial sobre  $\{A_\mu, A_\nu\}$ . Ya que, a diferencia del caso electromagnético, los potenciales no conmutan entre sí.

Podemos empezar considerando una partícula clásica moviéndose bajo la influencia de un campo gauge no abeliano. Su dinámica está determinada por la **regla de acoplamiento mínimo**:

$$\pi^\mu = m\dot{x}^\mu + A^\mu(x, I), \quad (98)$$



donde  $A^\mu$  es el potencial gauge que depende de las coordenadas  $x^\mu$  y de las variables internas  $I^a$ , que codifican el “color”.

Escribimos:

$$A^\mu(x, I) = A_a^\mu(x) I^a. \quad (99)$$

Y asumimos que los  $I^a$  satisfacen el álgebra de Lie:

$$\{I^a, I^b\} = -f^{abc} I^c. \quad (100)$$

Donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura del grupo de simetría. Ahora podemos definir el tensor de campo como:

$$F^{\mu\nu} \equiv -m\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\}. \quad (101)$$

Donde los corchetes de Poisson están definidos sobre el espacio de fases extendido  $(x^\mu, \pi^\mu, I^a)$ . A partir de (94), se tiene:

$$\dot{x}^\mu = \frac{1}{m} (\pi^\mu - A^\mu). \quad (102)$$

Por lo que podemos escribir:

$$\{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\} = \frac{1}{m^2} \{\pi^\mu - A^\mu, \pi^\nu - A^\nu\} = \frac{1}{m^2} (-\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu + \{A^\mu, A^\nu\}). \quad (103)$$

Y llegamos a expresar lo siguiente:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \{A^\mu, A^\nu\}$$

Que es la expresión que ya conocemos de demostraciones anteriores.

Y ahora, usando la expansión  $A^\mu = A_a^\mu(x) I^a$  y la regla (96):

$$\{A^\mu, A^\nu\} = A_a^\mu A_b^\nu \{I^a, I^b\} = -A_a^\mu A_b^\nu f^{abc} I^c. \quad (104)$$

Gracias a esto podemos escribir lo siguiente:

$$F_c^{\mu\nu} = \partial^\mu A_c^\nu - \partial^\nu A_c^\mu + f^{abc} A_a^\mu A_b^\nu. \quad (105)$$

Ahora, consideramos la identidad de Jacobi clásica para los corchetes de Poisson sobre las trayectorias  $x^\mu(\tau)$ :

$$\{x^\alpha, \{\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu\}\} + \{\dot{x}^\mu, \{\dot{x}^\nu, x^\alpha\}\} + \{\dot{x}^\nu, \{x^\alpha, \dot{x}^\mu\}\} = 0. \quad (106)$$

Aplicando esta identidad al campo  $F^{\mu\nu}$ , se obtiene la versión no abeliana de la identidad de Bianchi:

$$D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \quad (107)$$

Donde la derivada covariante actúa sobre tensores del álgebra de Lie como:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = \partial_\mu F_a^{\mu\nu} + f^{abc} A_\mu^b F_c^{\mu\nu}. \quad (108)$$

Finalmente, por consistencia del sistema, debe existir una corriente conservada  $j_a^\nu$  tal que:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = j_a^\nu. \quad (109)$$

Esta ecuación es la versión no abeliana inhomogénea de las ecuaciones de Maxwell.

## 5. Conclusiones

Este trabajo ha explorado sistemáticamente el enfoque de Feynman-Dyson para derivar las ecuaciones del electromagnetismo a partir de principios mecánicos fundamentales. Partiendo de la formulación original galileana, hemos extendido y unificado diversas generalizaciones del método, destacando cómo la estructura de los corchetes de Poisson conduce naturalmente a la fuerza de Lorentz y a las ecuaciones homogéneas de Maxwell.

En primer lugar, reconstruimos la derivación clásica en el espacio euclídeo, mostrando cómo las relaciones de conmutación entre posición y velocidad –análogas a las de la mecánica cuántica– permiten deducir la forma de la fuerza electromagnética y las leyes de divergencia magnética nula y Faraday. Este marco revela una profunda conexión entre la dinámica de partículas y la teoría de campos, aunque presenta limitaciones en su covariancia relativista.

Para superar estas restricciones, desarrollamos una formulación covariante en el espacio-tiempo de Minkowski. Aquí, la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  se incorpora explícitamente en la definición de los corchetes de Poisson, preservando la invariancia Lorentz. Esta extensión no solo generaliza la fuerza de Lorentz al caso relativista, sino que también esclarece el papel del tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  y su relación con potenciales que dependen del momento, introduciendo términos no mínimos en el acoplamiento ( $G_\mu$ ).

Adicionalmente, abordamos el caso no abeliano mediante la inclusión de variables internas de *color*  $I^a$  que satisfacen álgebras de Lie. Este enfoque permite derivar ecuaciones tipo Yang-Mills, donde la no conmutatividad de los potenciales conduce naturalmente a la versión inhomogénea de las ecuaciones de Maxwell en presencia de cargas no abelianas. La derivada covariante  $D_\mu$  emerge así como una herramienta geométrica esencial para garantizar la consistencia dinámica.

### ■ Direcciones futuras:

- Extender el formalismo a variedades pseudo-Riemannianas para incorporar gravitación
- Explorar generalizaciones en geometrías no conmutativas ( $\kappa$ -Minkowski)
- Investigar implicaciones en teorías de campo efectivas donde emergen acoplamientos no mínimos

## 6. Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco por proporcionar un entorno de trabajo adecuado durante la realización de esta investigación. J.M.C. también agradece a Secihti por su apoyo a través de una beca para estudios posdoctorales bajo la subvención No. 3873825.

## 7. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

## Referencias

- [1] Freeman J Dyson. “Feynman’s proof of the Maxwell equation”. En: American Journal of Physics (1989).

- [2] Arvind Vaidya y Carlos Farina. “Can Galilean mechanics and full Maxwell equations coexist peacefully?” En: *Physics Letters A* (1991).
- [3] I. E. Farquhar. “Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations” by Freeman J. Dyson [*Am. J. Phys.* 58, 209-211 (1990)]”. En: *American Journal of Physics* (1991).
- [4] Shogo Tanimura. “Relativistic Generalization and Extension to the Non-Abelian Gauge Theory of Feynman’s Proof of the Maxwell Equations”. En: *Annals of Physics* (1992).
- [5] Martin C. Land, Nissan Shnerb y Lawrence P. Horwitz. “On Feynman’s Approach to the Foundations of Gauge Theory”. En: *Foundations of Physics* (1993).
- [6] Merced Montesinos y Abdel Perez-Lorenzana. “Minimal Coupling and Feynman’s Proof”. En: *J. Theor. Phys.* (1999).
- [7] Norman Dombey. “Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations” by Freeman J. Dyson [*Am. J. Phys.* 58, 209-211 (1990)]”. En: *American Journal of Physics* (1991).
- [8] Ildeu de Castro Moreira. “Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations” by R. J. Hughes [*Am. J. Phys.* 60, 301-306 (1992)]”. En: *American Journal of Physics* (1993).
- [9] Paul Bracken. “Poisson Brackets and the Feynman Problem”. En: *International Journal of Theoretical Physics* (1996).

## Apéndice

### A. Conmutadores

Este apéndice recoge las herramientas algebraicas esenciales utilizadas en la derivación de las ecuaciones de Maxwell. Los conmutadores, definidos como operaciones bilineales antisimétricas, juegan un papel central en la conexión entre la dinámica de partículas y la teoría de campos electromagnéticos.

#### A.1. Identidades básicas

Las siguientes identidades son fundamentales para el desarrollo de las demostraciones:

- **Identidad de Jacobi:** Estructura algebraica que garantiza consistencia en álgebras de Lie:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (110)$$

- **Regla de Leibniz I:** Comportamiento del conmutador frente a productos:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (111)$$

- **Regla de Leibniz II:** Derivación temporal de conmutadores:

$$\frac{d}{dt}[A, B] = \left[ \frac{dA}{dt}, B \right] + \left[ A, \frac{dB}{dt} \right] \quad (112)$$

## A.2. Definición y propiedades algebraicas

El conmutador de dos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  actúa sobre funciones prueba  $\psi$  como:

$$[\hat{A}, \hat{B}]\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) - \hat{B}(\hat{A}\psi) \quad (113)$$

De esta definición se derivan propiedades clave:

$$[A, A] = 0 \quad (\text{Nilpotencia}) \quad (114)$$

$$[A, B] = -[B, A] \quad (\text{Antisimetría}) \quad (115)$$

$$[A, F(A)] = 0 \quad (\text{Conmutatividad funcional}) \quad (116)$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \quad (\text{Linealidad}) \quad (117)$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \quad (\text{Regla de derivación}) \quad (118)$$

## A.3. Relaciones de conmutación canónicas

Para operadores de posición ( $\hat{x}_i$ ) y momento ( $\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j$ ), las relaciones fundamentales son:

### ■ Conmutatividad espacial:

$$[x_i, x_j] = 0 \quad (119)$$

### ■ Conmutatividad del momento:

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (120)$$

### ■ Relación canónica:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (121)$$

La derivación de (121) se obtiene directamente de la acción sobre funciones prueba:

$$[x_i, p_j]\psi = i\hbar\delta_{ij}\psi \quad (122)$$

## A.4. Expresión generalizada para funciones

Para funciones  $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  y  $G(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , el conmutador adopta la forma:

$$[F, G] = \sum_{k,l} \left( [x_k, x_l] \frac{\partial G}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial x_l} + [x_k, \dot{x}_l] \frac{\partial G}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_l} + [\dot{x}_k, x_l] \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial F}{\partial x_l} + [\dot{x}_k, \dot{x}_l] \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_l} \right) \quad (123)$$

Esta expresión general es particularmente útil al trabajar con espacios de fases extendidos en las formulaciones relativistas y no abelianas desarrolladas en el artículo.