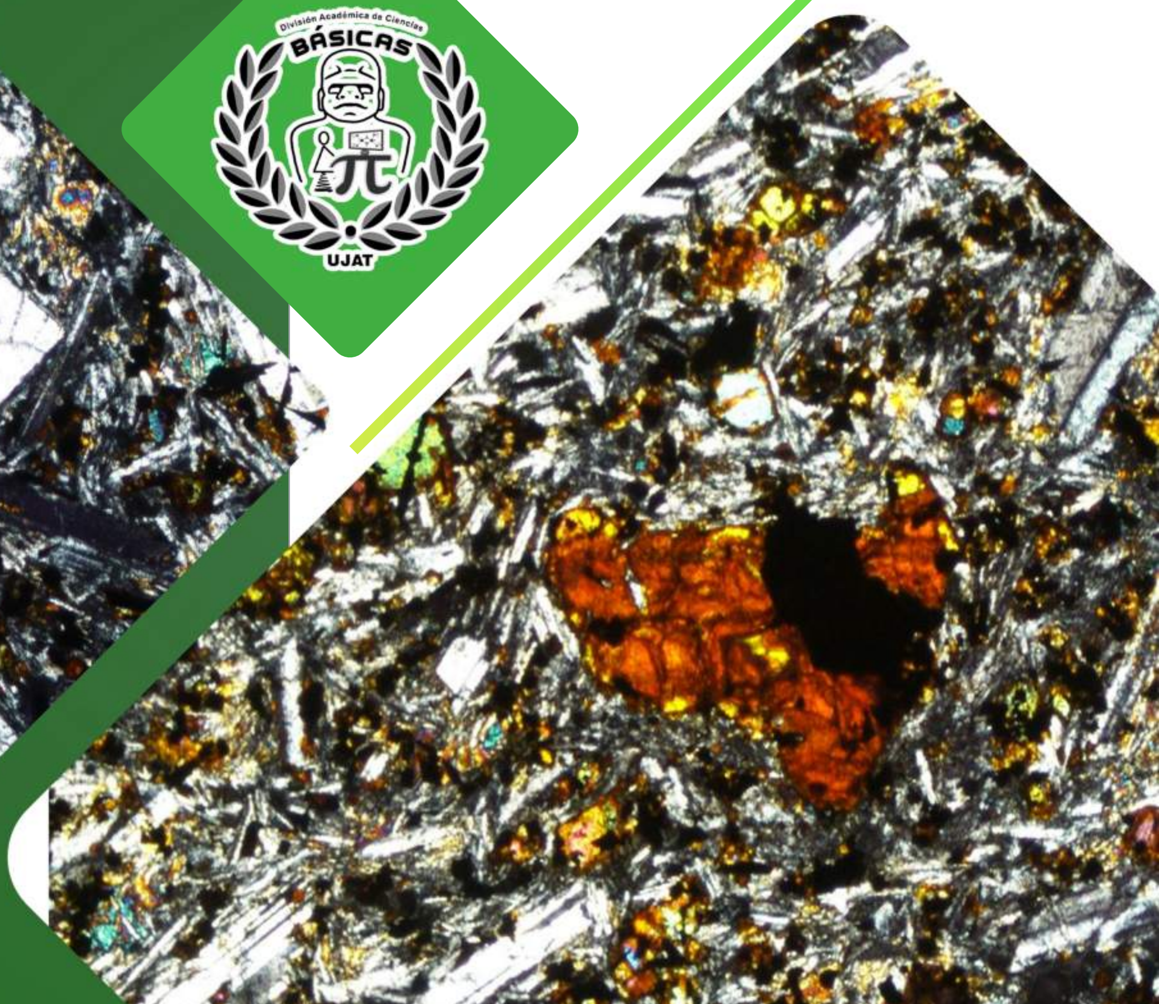
Volumen 11 número 32 septiembre-diciembre 2025

UJAT
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"

JOBS
Journal of Basic Sciences

DACB · UJAT

División Académica de Ciencias Básicas UJAT



ISSN:2448-4997
https://revistajobs.ujat.mx

UJAT
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"
JOBS Journal of Basic Sciences DACB · UJAT

El presente número del Journal of Basic Sciences está integrado por seis contribuciones que, desde distintos campos de las ciencias naturales y matemáticas, ponen de relieve una característica fundamental en la investigación contemporánea que es la diversidad de enfoques y metodologías aplicadas en la búsqueda de soluciones y respuestas ante problemáticas específicas. Aun cuando el contexto y los objetos de estudios son diversos, desde las ciencias de la tierra hasta el análisis funcional, la física teórica o la teoría de categorías, en todos ellos se comparte un interés común: abundar en la comprensión de los fenómenos abordados, mediante herramientas metodológicas rigurosas.

El primer artículo, realizado en el campo volcánico "La Repartición", situado al noreste de San Luis Potosí, se enfoca en el análisis de la distribución de tamaño de cristales y el cálculo de los tiempos de residencia de microcristales de plagioclasa en este escenario geológico, muy apropiado para el estudio de procesos magmáticos. Con los resultados obtenidos, se enriquece la compresión de la evolución textural de las rocas máficas y se subraya la importancia de los estudios microestructurales para reconstruir la dinámica interna de los sistemas volcánicos.

En la segunda contribución, se pone de manifiesto también el interés por estudiar la interacción entre procesos naturales y condiciones locales, ya que se examina la composición mineralógica y edafológica de suelos en Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco. Mediante estudios de difracción de rayos X y trabajo en campo, se encuentran diferencias sustanciales en la mineralogía, las propiedades físicas y la capacidad de intercambio iónico de los suelos, revelando así tanto la variabilidad intrínseca de los mismos como la influencia de actividades antropogénicas. Con este trabajo, se ofrecen insumos valiosos destinados a un manejo sostenible de los suelos en la región.

Las síntesis y propiedades catalíticas del óxido de zinc se estudian en el tercer artículo de este número, mediante técnicas analíticas apropiadas se logró la caracterización de este compuesto obtenido mediante combustión en estado sólido, además de que se probó su actividad para la degradación del 4-nitrofenol en condiciones de fotocatálisis, probándose así que puede ser un material promisorio para aplicarse exitosamente en el área de la química ambiental.

El cuarto trabajo se incluye en el ámbito de la probabilidad y el análisis, al analizar las propiedades fundamentales del kernel de calor de Dirichlet asociado a procesos de Markov simétricos, potencialmente discontinuos. Al demostrar una serie de características tales como continuidad, simetría y la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se fortalece la comprensión teórica del fenómeno, además de hacer posible su aplicación en ecuaciones semilineales de reacción-difusión no autónomas. De esta forma se entrelazan procesos estocásticos con problemas de evolución gobernados por operadores no locales.

Por otro lado, se presenta en el quinto artículo una reconstrucción precisa de la deducción de Feynman de las ecuaciones de Maxwell. A partir de la segunda ley de Newton y de las relaciones de Poisson en un espacio euclídeo, el análisis se extiende a un marco relativista mediante cálculos tensoriales en el espacio de Minkowski. Con ello, se abunda en la compresión de los supuestos fundamentales de la derivación original, fortaleciendo así la formulación pedagógica del problema e integrando el principio de acoplamiento mínimo con los desarrollos de Montesinos y Pérez-Lorenzana.

Finalmente, en la sexta contribución de este número, se profundiza en conceptos centrales de la teoría de categorías, como son la representabilidad, los objetos universales y el Lema de Yoneda. Mediante una serie de ejemplos que abarcan áreas de las matemáticas como el álgebra lineal, la topología y la teoría de anillos, se ofrece una ruta clara hacia la comprensión de estas nociones, contribuyendo así a una difusión de ideas fundamentales que forman parte del pensamiento matemático moderno.

En conjunto, los trabajos incluidos en este número ilustran la riqueza interdisciplinaria de la investigación actual y subrayan el valor del rigor científico, desde sus aspectos conceptuales hasta los metodológicos, para la generación de conocimiento. Que estas aportaciones sirvan de inicio para nuevas dudas e inquietudes, fomentando la interacción académica y estimulando el desarrollo de investigaciones futuras.

ISSN:2448-4997
https://revistajobs.ujat.mx

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional
División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

CONSEJO EDITORIAL

COMITÉ EDITORIAL

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 32, diciembre de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. https://revistajobs.ujat.mx. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.

UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

CONTENIDO

ISSN:2448-4997
https://revistajobs.ujat.mx

Vol. 11(32), p. 68–84, septiembre–diciembre 2025, e-ISSN: 2448-4997
JOURNAL OF BASIC SCIENCES

Funtores representables, Lema de Yoneda y objetos universales

Javier-Díaz, Isaac[1,*], Pompeyo-Gutiérrez, Carlos Ariel[1]
[1] División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
[*] *isaac.javdi@gmail.com*

Resumen

En este trabajo se exploran los conceptos de representabilidad y de objeto universal, así como el Lema de Yoneda, todo esto perteneciente a la teoría de categorías. Se presentan diversos ejemplos para ilustrar los conceptos. Para esto, son considerados objetos de distintas áreas de las matemáticas, como Álgebra Lineal, Topología, Teoría de Anillos, entre otras. Además, se proporcionan demostraciones para los resultados.

***Palabras claves**: Funtores representables, lema de Yoneda, Teoría de categorías, transformaciones naturales.*

Abstract
In this work we explore the concepts of representability and universal object, as well as Yoneda's Lemma, which belong to Category Theory. We provide several examples to illustrate the concepts. In order to do this, we consider objects coming from different mathematical fields, such as Linear Algebra, Topology, Ring Theory, among others. Besides, we provide proofs for the results.

***Keywords**: Representable functors, Yoneda's lemma, Category Theory, Natural Transformations*

Recibido: 10 de abril de 2025. Aceptado: 18 de noviembre de 2025. Publicado: 12 de diciembre de 2025.

1. Introducción

La teoría de cateogorías es un lenguaje bastante abstracto pero que, al contextualizarlo de manera adecuada, resulta ser muy expresivo, de tal forma que permite describir hechos, situaciones o comportamientos que tienen algunos objetos matemáticos. Es pertinente mencionar que estudiar por primera vez esta teoría puede ser complicado, y esto es debido a su alto nivel de abstracción; como se verá más adelante, se hablará de "objetos" y "morfismos", sin decir qué son, mencionando sólamente cómo deben comportarse.

En esta teoría, la atención se centra en las relaciones que hay entre los objetos de una categoría (*morfismos*); las relaciones entre categorías (*funtores*) y las que hay entre funtores (*transformaciones naturales*). De hecho, el concepto de categoría es auxiliar; los conceptos básicos son los de funtor y de transformación natural. Esto fue dicho por los mismos autores (Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane) en su artículo seminal "General Theory of Natural Equivalences" [1], publicado en 1945.

La generalidad de la teoría de categorías permite ver similitudes que se encuentran entre dos áreas de las matemáticas que no parecieran tener algo en común. En realidad, es así que nace la teoría: aunque el primer escrito fue publicado en 1945, sus orígenes pueden rastrearse un poco más atras, en un encuentro entre MacLane y Eilenberg en 1942. Por una parte, Eilenberg estaba interesado en calcular grupos de homología, cohomología y homotopía. Por otra parte, Mac Lane estaba interesado en extensiones de grupos. Fue en una serie de pláticas dadas por Mac Lane y atendidas por Eilenberg, que este último notó ciertas coincidencias entre los trabajos de ambos. Investigar estas coincidencias fue lo que llevó a la noción de funtor y de transformación natural [6].

Rápidamente se aprecia el poder de las categorías; en 1957, Grothendieck publica el revolucionario artículo “Sur quelques points d’algèbre homologique”, en donde la utiliza de manera extensa, no sólo como un lenguaje en el cual expresarse y organizar de manera sistemática campos de las matemáticas (como la topología algebraica), sino también como una herramienta para probar resultados matemáticos [6].

Naturalmente, el interés por la teoría de categorías persiste. El objetivo de este artículo es hablar acerca de los funtores representables, del Lema de Yoneda y objetos universales; daremos sus definiciones, se presentan ejemplos, se enuncian y demuestran algunos resultados relacionados a ellos. Aunque para poder llegar a dichos conceptos, habremos de pasar por le definición de categoría, funtor y transformaciones naturales.

Las definiciones y resultados (aunque aquí se ofrecen pruebas de éstos) relacionados con la teoría de categorías que se presentan pueden encontrarse tanto en [5] como en [10]; sin embargo, este último tiene un tratamiento un poco más moderno y es el que se prefiere. No obstante, la esencia sigue siendo la misma.

Finalmente, este texto está dirigido a personas que tengan conocimientos básicos de topología (de conjuntos) como en [7], álgebra lineal y álgebra abstracta [4]. No se espera conocimiento alguno de teoría de categorías.

Finalmente, para los lectores con más bagaje matemático: se ha mencionado que la teoría de categorías encuentra conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas. A continuación son mencionados ejemplos más elaborados de su uso:

- Los conjuntos junto con las funciones forman la categoría Set; los esquemas junto con sus morfismos forman la categoría de esquemas, que se denota por Sch [3] . Los funtores $\mathcal{F} : Sch \to Set$ aparecen en la teoría de espacios y problemas moduli (problemas de clasificación) [8].
- El primer grupo de homotopía (o grupo fundamental) induce un funtor entre la categoría de espacios topológicos puntuados (es decir, un pares (X, x), donde X es un espacio topológico y x es un elemento fijo de X) y la categoría de grupos, Gr [12].
- Se tiene una relación entre la topología diferencial y el álgebra lineal dada por un funtor que va de la categoría de las variedades suaves, Diff a los espacios vectoriales reales $\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$, el cual manda una variedad suave M al espacio (vectorial) de las funciones suaves $f : M \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{C}^{\infty}$. Por otra parte, un mapeo suave entre variedades $F : M \to N$ se convierte en una transformación lineal F^* bajo la acción de tal funtor [9, 12].

De manera particular, la referencia [12] utiliza de forma extensiva el lenguaje de las categorías (y otras teorías) en el estudio de las variedades topológicas.

2. Categorías, funtores y transformaciones naturales.

Convención: En los ejemplos relacionados con anillos, se da por hecho que todos tienen unitario, al cual denotaremos por 1, y que los homomorfismos de anillos preservan el unitario. Para mayor información sobre la teoría de anillos (y en general, del álgebra que se utilizará en el texto) una referencia es [4].

2.1. Categorías

Las categorías están compuestas de objetos y de morfismos entre ellos. A continuación se mencionan las cosas que debe cumplir una categoría. En primer lugar, los morfismos entre las cosas se pueden componer: siempre que existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ & C, \end{tikzcd}$$

éste se puede completar con

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C. \end{tikzcd} \tag{1}$$

Además, la composición es asociativa:

$$f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h.$$

Por último, siempre existe un morfismo $1_A : A \to A$ de tal forma que se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "g=g\circ 1_A"'] & A \arrow[d, "g"] \\ & B, \end{tikzcd} \quad \text{o} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f=1_B\circ f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

De manera más formal, la definición de categoría es la siguiente:

Definición 2.1. *Una **categoría** $\mathcal{A}$ consta de*

i) una clase $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$ *de objetos en* $\mathcal{A}$*;*

ii) para cada par de objetos A, B existe un conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ *(también denotado por* $\mathrm{Mor}(A, B)$*, si no hay riesgo de confusión) de morfismos (o flechas o funciones) que van de A a B;*

iii) para objetos A, B, C en la categoría existe una función

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C) \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f, \end{array}$$

*que es llamada **composición**;*

*iv) para cada objeto A existe un elemento 1_A en $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A)$, que es llamado la **identidad** en A,*

que satisfacen los siguientes axiomas:

*a) **asociatividad de la composición**: para cada $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C)$ y $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C, D)$ tenemos*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f);$$

*b) **ley de identidad:** para cada $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ tenemos*

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

c) Los conjuntos $\mathrm{Mor}(A, B)$ son disjuntos por pares.

Algunos ejemplos

Los siguientes son ejemplos de categorías, los cuales pueden consultarse en [10] y [4], principalmente. No obstante, la categoría Top_X aparece en [2] y en [3].

Ejemplo 2.1. 1) ***Categoría** Set**:** La colección de conjuntos y las funciones entre ellos son una categoría. En efecto: en esta categoría los objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones. La composición de morfismos es la composición usual de funciones, la cual satisface la ley de asociatividad. Por último, para todo conjunto X existe una función f que va de X en X definida por $f(x) = x$ (que es llamada función identidad). Esta función cumple con la ley de la identidad de la definición de categoría.*

2) ***Categoría** Vec_K**:** El conjunto de espacios vectoriales sobre un campo K con las transformaciones lineales forman una categoría, la composición de morfismos es la composición usual de transformaciones lineales y el morfismo identidad es la transformación lineal identidad.*

3) ***Categoría** $Ring$**:** La colección de anillos con los homomorfismos, la composición de homomorfismos (que es la composición usual de funciones) y el homomorfismo identidad conforman esta categoría.*

4) ***Categoría** Top**:** Esta categoría está conformada por la colección de espacios topológicos junto con las funciones continuas, la composición de funciones y la función identidad.*

5) ***Categoría** Top_X**:** Sea X un espacio topológico. Los componentes de esta categoría son:*

   i) Los abiertos de la topología serán los objetos de la categoría.

   ii) Si U_0, U_1 son abiertos en X tales que $U_0 \subset U_1$, entonces se define la función inclusión $i : U_0 \to U_1$ con regla de correspondencia $i(x) = x$, para todo $x \in U_0$; las funciones inclusión serán los morfismos de la categoría.

   iii) La composición de los morfismos es la composición usual de funciones.

   iv) El morfismo identidad es la función identidad $I : U_0 \to U_0$.

De hecho, hay muchas más estructuras, como anillos, grupos, espacios vectoriales, o espacios topológicos, las cuales se relacionan o determinan mediante un tipo distinguido de función: los isomorfismos. Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.2. *Un morfismo $f : A \to B$ en la categoría $\mathcal{A}$ es un* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.*

Así, por ejemplo, los morfismos en la categoría de anillos son los isomorfismos de anillos; los isomorfismos en la categoría Top_X son las funciones identidad, y en la categoría Set son las funciones biyectivas.

2.2. Funtores

Así como los objetos están conectados por morfismos, así también las categorías están conectadas por *funtores*. Un funtor lo se denota con una flecha indicando la categoría de donde parte a la categoría donde llega. Por ejemplo, un funtor de la categoría $\mathcal{A}$ a la categoría $\mathcal{B}$ lo escribimos por $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, y si queremos ser más específicos y mencionar el nombre del funtor, hacemos $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Un funtor lo que hace es tomar objetos y morfismos en $\mathcal{A}$ y mandarlos como objetos y morfismos en $\mathcal{B}$. Hay dos tipos de funtores, los covariantes y los contravariantes. En un momento decimos cuál es la diferencia.

Utilicemos nuevamente los diagramas: si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{A}$ (naturalmente, A , B y C son objetos en $\mathcal{A}$), entonces

$$\left(A \xrightarrow{f} B\right) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \left(\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(B)\right)$$

si el funtor es covariante, y si el funtor es contravariante:

$$\left(A \xrightarrow{f} B\right) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \left(\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(A)\right).$$

A continuación, se presentan dos ejemplos de funtores, primero uno covariante y luego otro contravariante.

Ejemplo 2.2. *Se definine el funtor olvidadizo $\mathcal{F} : Vec_K \to Set$, el cual*

- *manda un espacio vectorial $(V, +, *)$ a su conjunto subyacente $\mathcal{F}((V, +, *)) = V$;*
- *y una transformación lineal $f : V \to W$ la convierte en la función de conjuntos $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(W)$, que tiene la misma regla de correspondencia de f.*

Puesto en palabras llanas, este funtor "olvida" la estructura de los objetos en la categoría Vec_K. De manera similar puede definirse un funtor olvidadizo para las categorías de grupos, anillos, etc.

Ejemplo 2.3. *Dada una categoría $\mathcal{A}$, como los morfismos que van del objeto X al objeto B (para cualesquiera X y B en $\mathcal{A}$) forman un conjunto, entonces siempre podemos definir el funtor $\mathrm{Mor}(-, X) : \mathcal{A} \to Set$ de la siguiente forma:*

- *a un objeto A en $\mathcal{A}$ se le asigna el objeto $\mathrm{Mor}(A, X)$ en Set, que es el conjunto de todos los morfismos que van de A en X;*
- *y dado un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$, se tiene un morfismo en Set (es decir, una función de conjuntos) $\mathrm{Mor}(f, X) : \mathrm{Mor}(B, X) \to \mathrm{Mor}(A, X)$ definida por*

  $$\mathrm{Mor}(f, X)(g) = g \circ f,$$

  para todo morfismo $g \in \mathrm{Mor}(B, X)$.

Puede explicarse con un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(B,X) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(A,X) \\ \begin{tikzcd} B \arrow[d, "g"] \\ X \end{tikzcd} & \rightsquigarrow & \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(f,X)(g)"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ X. & \end{tikzcd} \end{array}$$

Para ser más concretos, se considera la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, $Vec_{\mathbb{R}}$. Se definirá el funtor

$$\mathrm{Mor}(-,\mathbb{R}) : Vec_{\mathbb{R}} \to Set.$$

Así, si se toma un objeto en $Vec_{\mathbb{R}}$, por decir, $\mathbb{R}^3$, entonces se tiene el conjunto

$$\mathrm{Mor}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) = \{\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} | \quad \alpha \quad \textit{es lineal}\}.$$

Por otra parte, la función lineal $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(x,y) = (x,y,z_0)$ (donde z_0 es una constante), define una función de conjuntos

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Mor}(\alpha,\mathbb{R}) & : & \mathrm{Mor}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mor}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ & & \beta & \mapsto & \beta \circ \alpha. \end{array}$$

Si se considera $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\beta(x,y,z) = (x, y+z, y-z)$, entonces $\mathrm{Mor}(\alpha,\mathbb{R})(\beta) = \beta \circ \alpha$ es una función lineal que va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y que está definida por

$$(\beta \circ \alpha)(x,y) = \beta(x,y,z_0) = (x, y+z_0, y-z_0).$$

2.3. Transformaciones Naturales

A continuación se definen las transformaciones naturales, que son las relaciones que hay entre funtores. Se comienza con dos funtores contravariantes $\mathcal{F},\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Consideremos un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$. Cuando se aplican los funtores obtenemos dos morfismos $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{G}(f) : \mathcal{G}(B) \to \mathcal{G}(A)$ (y por lo tanto, cuatro objetos) en la categoría $\mathcal{B}$. Es posible que hayan morfismos $\tau_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$ y $\tau_B : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{G}(B)$ en la categoría $\mathcal{B}$, con lo cual se tendrían los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\tau_B"] & \mathcal{G}(B) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ & \mathcal{G}(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(B) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \\ \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\tau_A"'] & \mathcal{G}(A). \end{tikzcd}$$

Como se vio antes, siempre que se tienen diagramas de ese estilo, es posible componerlos (como en el diagrama (1)), teniendo así

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[dr, "\mathcal{G}(f)\circ\tau_B"'] & \mathcal{G}(B) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ & \mathcal{G}(A) \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(B) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, "\tau_A\circ\mathcal{F}(f)"] & \\ \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\tau_A"'] & \mathcal{G}(A). \end{tikzcd}$$

Se centra la atención solamente en el conjunto de morfismos $\tau_{\_}$ tales que

$$\tau_A \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \tau_B.$$

Así, la definición de transformación natural es:

Definición 2.3. *Considérense dos funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Una transformación natural $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ se define como un conjunto de morfismos $\tau_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$ en $\mathcal{B}$ que hacen conmutar el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(B) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\tau_A"'] & \mathcal{G}(A). \end{tikzcd}$$

Si τ_B es un isomorfismo para todo objeto B en $\mathcal{B}$, entonces τ se dice que es un **isomorfismo natural** *y que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son* **naturalmente isomorfos**.

Esta es la forma *correcta* de definir las relaciones entre funtores. En la siguiente sección se presenta un ejemplo de una transformación natural.

3. Funtores Representables

Los funtores representables son los que se *parecen* o se comportan como un funtor del tipo $\mathrm{Mor}(-, A)$ (o bien, $\mathrm{Mor}(A, -)$). Las transformaciones naturales serán utilizadas para dar un sentido exacto a esto y se probará que el funtor olvidadizo $\mathcal{F} : Vec_{\mathbb{R}} \to Set$ es representable.

Definición 3.1. *Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow Set$ contravariante se dice* **representable** *(por un objeto X en $\mathcal{A}$) siempre que $\mathcal{F}$ sea naturalmente isomorfo al funtor $\mathrm{Mor}(-, X) : \mathcal{A} \longrightarrow Set$.*

Observación inmediata: como $\mathcal{F}$ y $\mathrm{Mor}(-, X)$ son naturalmente isomorfos, entonces para cada objeto A en $\mathcal{A}$ existe una biyección entre los morfismos que van de A en X, $\mathrm{Mor}(A, X)$, y el conjunto $\mathcal{F}(A)$.

Ejemplo 3.1. *En este ejemplo se demuestra que el funtor olvidadizo es representable: para ello se construye una transformación natural entre $\mathcal{F}$ y $\mathrm{Mor}(\mathbb{R}, -)$ y se demuestra que, de hecho, es un isomorfismo natural. Obsérvese que toda función lineal $T : \mathbb{R} \to V$ cumple $T(r) = rT(1)$, basta con decir quién es $T(1)$ para que la función lineal quede determinada. Así, la transformación natural α que se propone está definida por*

$$\begin{array}{rccc} \alpha_V : & \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(\mathbb{R}, V) \\ & v & \longmapsto & T_v, \end{array}$$

en donde T_v es una transformación lineal que cumple que $T(1) = v$.
Luego, sea

$$\begin{array}{rccc} \beta_V : & \mathrm{Mor}(\mathbb{R}, V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ & T & \longmapsto & T(1). \end{array}$$

Como $(\beta_V \circ \alpha_V)(v) = v$ y $(\alpha_V \circ \beta_V)(T) = T$, tenemos que α_V es una función biyectiva para cualquier V, luego, la transformación natural α es un isomorfismo natural y por consiguiente $\mathcal{F}$ es un funtor que está representado por $\mathbb{R}$.

Se resalta la biyección $\mathcal{F}(V) \simeq \mathrm{Mor}(\mathbb{R}, V)$ para cada objeto V: hay tantas transformaciones lineales $\mathbb{R} \to V$ como elementos en $\mathcal{F}(V)$, o bien, tantas como vectores en V.

Un hecho por el cual interesan tanto los morfismos como el funtor $\mathrm{Mor}(-, X)$ es que éstos determinan a un objeto. De forma precisa: si $\mathrm{Mor}(-, X) \simeq \mathrm{Mor}(-, Y)$, entonces $X \simeq Y$. Más adelante será dada una demostración de esto. Primero, se hablará sobre un resultado central en la teoría de categorías: el Lema de Yoneda.

4. Lema de Yoneda

El Lema de Yoneda involucra transformaciones naturales entre funtores con categoría de llegada Set, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to Set$ y $\mathrm{Mor}(-, X)$, con X en $\mathcal{A}$ y se relaciona con la siguiente pregunta ¿cuántas transformaciones naturales existen entre $\mathcal{F}$ y $\mathrm{Mor}(-, X)$?

Se enuncia y demuestra la siguiente proposición, que es conocida como la forma débil del Lema de Yoneda:

Proposición 4.1. *Para cualquier funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow Set$, cualquier objeto $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ y cualquier elemento $a \in \mathcal{F}(A)$, existe una única transformación natural $\tau : \mathrm{Mor}(-, A) \longrightarrow \mathcal{F}$ con $\tau_A(1_A) = a$.*

Demostración. Para cualquier objeto B en $\mathcal{A}$ definimos una función

$$\begin{array}{rcccl} \tau_B & : & \mathrm{Mor}(B, A) & \to & \mathcal{F}(B) \\ & & f & \mapsto & \mathcal{F}(f)(a). \end{array}$$

Nótese que $f : B \to A$ y $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$ (pues $\mathcal{F}$ es contravariante), por lo que $\mathcal{F}(f)(a) \in \mathcal{F}(B)$ y entonces la función τ_B está bien definida. Se quiere construir una transformación natural τ cuyos morfismos componentes son las funciones τ_B. Para ello, debe considerarse el morfismo $h : C \to B$ en $\mathcal{A}$ y se verifica que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(B, A) \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(h,A)"] & \mathcal{F}(B) \arrow[d, "\mathcal{F}(h)"] \\ \mathrm{Mor}(C, A) \arrow[r, "\tau_C"] & \mathcal{F}(C). \end{tikzcd} \tag{2}$$

Téngase presente que $\mathcal{F}(h) \circ \tau_B$ y $\tau_C \circ \mathrm{Mor}(h, A)$ son funciones entre conjuntos y para mostrar que son iguales, debemos ver que tienen el mismo dominio y contradominio (lo cual es evidente) y regla de correspondencia. Se comprueba esto último. Por una parte

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(h) \circ \tau_B)(f) &= \mathcal{F}(h)(\mathcal{F}(f)(a)) \\ &= (\mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(f))(a) \\ &= \mathcal{F}(f \circ h)(a), \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} (\tau_C \circ \mathrm{Mor}(h, A))(f) &= \tau_C(\mathrm{Mor}(h, A)(f)) \\ &= \tau_C(f \circ h) \\ &= \mathcal{F}(f \circ h)(a). \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{F}(h) \circ \tau_B = \tau_C \circ \mathrm{Mor}(h, A)$ y por consiguiente el diagrama (2) conmuta. En consecuencia, τ es una transformación natural.

Obsérvese, también, que $\tau_A(1_A) = \mathcal{F}(1_A)(a) = 1_A(a) = a$. Ya se encontró la transformación natural que cumple la condición del enunciado, falta probar que es única. Supóngase que $\delta : \mathrm{Mor}(-, A) \to \mathcal{F}$ es otra transformación natural que satisface $\delta_A(1_A) = a$. Se probará que $\delta_B = \tau_B$ para cualquier objeto B en $\mathcal{A}$, concluyendo así que $\delta = \tau$ y que por lo tanto τ es única. Considérese un morfismo $g : B \to A$ y el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(A,A) \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(g,A)"] & \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"] \\ \mathrm{Mor}(B,A) \arrow[r, "\tau_B"] & \mathcal{F}(B). \end{tikzcd} \tag{3}$$

De la conmutatividad del diagrama se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(a) = \mathcal{F}(g)(\delta_A(1_A)) &= (\mathcal{F}(g) \circ \delta_A)(1_A) \\ &= (\delta_B \circ \mathrm{Mor}(g, A))(1_A) \\ &= \delta_B(1_A \circ g) \\ &= \delta_B(g). \end{aligned}$$

Pero como $\tau_B(g) = \mathcal{F}(g)(a)$, entonces $\tau_B(g) = \delta_B(g)$, y eso se puede probar para cualesquiera $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ y objeto B en $\mathcal{A}$, por lo que se concluye que $\delta = \tau$. Con esto se termina la demostración. □

De la proposición anterior se desprende el siguiente corolario, que es conocido como el Lema de Yoneda. Se introduce notación: dado un objeto A en una categoría $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to Set$ un funtor contravariante, se denotará por $[\mathrm{Mor}(-, A), \mathcal{F}]$ al conjunto de todas las transformaciones naturales de $\mathrm{Mor}(-, A)$ en $\mathcal{F}$.

Corolario 4.1 (Lema de Yoneda)**.** *Si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to Set$ es un funtor y A es un objeto de $\mathcal{A}$, entonces la función*

$$\begin{array}{rcccc} Y & : & [\mathrm{Mor}(-, A), \mathcal{F}] & \longrightarrow & \mathcal{F}(A) \\ & & \sigma & \longmapsto & \sigma_A(1_A), \end{array} \tag{4}$$

es una función biyectiva.

Con estos resultados es posible probar el siguiente resultado.

Corolario 4.2. *Considérese un funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to Set$. Si $Mor(-, X) \simeq \mathcal{F} \simeq Mor(-, Y)$, entonces $X \simeq Y$.*

Demostración. La demostración consistirá en encontrar morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$, es decir, probar que existe un isomorfismo entre X y Y. En principio de cuentas no se sabe cuál es el isomorfismo natural que hay entre $\mathrm{Mor}(-, X)$ y $\mathrm{Mor}(-, Y)$, pero es sabido que para todo objeto A en $\mathcal{A}$ existe una biyección $\mathrm{Mor}(A, X) \simeq \mathrm{Mor}(A, Y)$. Denótese al isomorfismo natural por $\tau : \mathrm{Mor}(-, X) \to \mathrm{Mor}(-, Y)$ y por $\tau^{-1} : \mathrm{Mor}(-, Y) \to \mathrm{Mor}(-, X)$ a su inversa. En particular se tienen las biyecciones

$$\tau_Y^{-1} : Mor(Y, Y) \to Mor(Y, X) \tag{5}$$

y

$$\tau_X : Mor(X, X) \to Mor(X, Y). \tag{6}$$

De (5) se sabe que existe un único morfismo $g \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ tal que $\tau_X(1_X) = g$ y de (6) tenemos un único $f \in \mathrm{Mor}(Y, X)$ tal que $\tau_Y^{-1}(1_Y) = f$.

Por otra parte (se sigue considerando $g \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ y $f \in \mathrm{Mor}(Y, X)$), nótese que la transformación natural $\mathrm{Mor}(-, g) : \mathrm{Mor}(-, X) \to \mathrm{Mor}(-, Y)$ definida por

$$\mathrm{Mor}(Z, g)(h) = g \circ h,$$

para todo objeto Z en $\mathcal{A}$ y $h \in \mathrm{Mor}(Z, X)$, satisface

$$\mathrm{Mor}(X, g)(1_X) = g \circ 1_X = g = \tau_X(1_X).$$

Mientras que la transformación natural $\mathrm{Mor}(-, f) : \mathrm{Mor}(-, Y) \to \mathrm{Mor}(-, X)$ definida por

$$\mathrm{Mor}(Z, f)(h) = f \circ h$$

cumple que

$$\mathrm{Mor}(X, f)(1_Y) = f \circ 1_Y = f = \tau_Y^{-1}(1_Y).$$

Luego, por la proposición 4.1, $\tau = \mathrm{Mor}(-, g)$ y $\tau^{-1} = \mathrm{Mor}(-, f)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1_X = \tau_X^{-1}(\tau_X(1_X)) &= \tau_X^{-1}(g) \\ &= \mathrm{Mor}(X, f)(g) \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} 1_Y = \tau_Y(\tau_Y^{-1}(1_Y)) &= \tau_Y(f) \\ &= \mathrm{Mor}(Y, g)(f) \\ &= g \circ f. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X \simeq Y$. □

Si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to Set$ es un funtor que está representado por X a través de la transformación natural τ, entonces, por definición de representabilidad y por el lema de Yoneda se tienen las siguientes biyecciones:

$$[\mathrm{Mor}(-, X), \mathcal{F}] \simeq \mathcal{F}(X) \simeq \mathrm{Mor}(X, X).$$

Ejemplo 4.1. *Se comienza este ejemplo [11] [1] haciendo una diferencia entre forma polinomial y función polinomial: dado un anillo R, una forma polinomial (o simplemente polinomio) P , con coeficientes en el anillo R y con la indeterminada X, es una expresión formal*

$$P(X) = a_d X^d + ... + a_1 X + a_0,$$

mientras que una función polinomial P de R en R se define como

$$\begin{array}{rcrcl} P_R & : & R & \longrightarrow & R \\ & & r & \longmapsto & a_d r^d + ... + a_1 r + a_0. \end{array}$$

En la notación de función polinomial se especifica en qué anillo se trabaja, pues debe dejarse en claro que hacer una distinción entre función y forma polinomial no es un exceso de formalidad, por ejemplo:

[1] El ejemplo está inspirado en una entrada de una página de internet hecha por T. Tao [11]

- $P = X$ *y* $Q = -X$ *son diferentes como formas polinomiales, sin embargo coinciden cuando se interpretan en el anillo* $\mathbb{Z}/2Z$*, puesto que* $n = -n$*, para todo elemento* n *de dicho anillo.*
- *el polinomio* $X^2 + 1$ *no tiene raíces cuando se interpreta como polinomio en* $\mathbb{R}$*, mientras que sí las tiene cuando se interpreta como polinomio en los números complejos.*

De lo anterior podemos observar que si se considera una forma polinomial en un solo anillo es posible que se pierda información. Más adelante se verá que las transformaciones naturales permiten considerar las formas polinomiales en todos los anillos al mismo tiempo.

El conjunto de polinomios con coeficientes en un anillo R *y con indeterminada* X*, junto con su producto y suma usual forman un anillo, que se denota por* $R[X]$*. Un anillo de polinomios que será conspicuo en todo este ejemplo es el de polinomios con coeficientes en los enteros,* $\mathbb{Z}[X]$*. Nótese que cualquier polinomio* $P(X) = a_d X^d + ... + a_1 X + a_0$ *en* $\mathbb{Z}[X]$ *induce una función polinomial en cualquier anillo* R *consigo mismo: una función polinomial de la forma* P_R*, definida como antes.*

Además, si $\varphi : R \to S$ *es un homomorfismo de anillos, la siguiente igualdad se cumple:*

$$P_S \circ \varphi = \varphi \circ P_R. \tag{7}$$

No es difícil convencerse de que esto es cierto. Solamente debe tenerse en cuenta que, si n *es un entero y* $r \in R$*, entonces* $\varphi(nr) = n\varphi(r)$*, y en particular, si* $r = 1_R$ *(el elemento unitario de* R*), entonces* $\varphi(n1_R) = n\varphi(1_R) = n1_S$*. Abusando un poco de la notación, se escribirá* $n1_S = n$*. Luego, si* $r \in R$ *se sigue que*

$$\begin{aligned}
(P_S \circ \varphi)(r) &= P_S(\varphi(r)) \\
&= a_d \varphi(r)^d + ... + a_1 \varphi(r) + a_0 \\
&= \varphi(a_d r^d + ... + a_1 r + a_0) \\
&= \varphi(P_R(r)) \\
&= (\varphi \circ P_R)(r)
\end{aligned}$$

La siguiente parte del ejemplo consiste en utilizar el lenguaje de las categorías.
Considérese el funtor olvidadizo

$$\mathcal{F} : Rings \to Sets,$$

en donde, si $\varphi : R \to S$ *es un homomorfismo de anillos, entonces*

- $\mathcal{F}(R)$ *y* $\mathcal{F}(S)$ *son los conjuntos subyacentes del anillo* R *y de* S*, respectivamente.*
- $\mathcal{F}(\varphi) : \mathcal{F}(R) \to \mathcal{F}(S)$ *es una función de conjuntos con misma regla de correspondencia que* φ*.*

En este punto se aplica el Lema de Yoneda, el cual asevera que hay tantas transformaciones naturales entre $\mathrm{Mor}(R, -)$ *y* $\mathcal{F}$ *como elementos en* $\mathcal{F}(R)$*, para todo anillo* R*. En símbolos:*

$$[\mathrm{Mor}(R, -), \mathcal{F}] \simeq \mathcal{F}(R) \tag{8}$$

Ahora se construye una transformación natural $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$*. Se retoma lo dicho al inicio del ejemplo: La forma polinomial* $P = a_d X^d + ... + a_1 X + a_0$ *en* $\mathbb{Z}[X]$ *será la transformación natural, y las* *funciones polinomiales P_R serán los morfismos componentes, para cada anillo R. En efecto, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(R) \arrow[r, "P_R"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\varphi)"'] & \mathcal{F}(R) \arrow[d, "\mathcal{F}(\varphi)"] \\ \mathcal{F}(S) \arrow[r, "P_S"'] & \mathcal{F}(S), \end{tikzcd}$$

conmuta gracias a la ecuación (7).

Es momento de hablar de los morfismos de evaluación. Dado cualquier anillo R, siempre puede definirse un homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcccc} \Phi_{R,r} & : & \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & R \\ & & P & \longmapsto & P(r). \end{array}$$

Nótese que basta con especificar cuál es el elemento de R que se corresponde con el polinomio X para definir por completo al homomorfismo de evaluación.

Ahora se define $\Phi : \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], -) \to \mathcal{F}$. Para cada anillo R, se tiene la función

$$\begin{array}{rcccc} \Phi_R & : & \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], R) & \longrightarrow & \mathcal{F}(R) \\ & & f & \longmapsto & f(X). \end{array}$$

Sea $\varphi : R \to S$ un homomorfismo de anillos. Se demostrará que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], R) \arrow[r, "\Phi_R"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X],\varphi)"'] & \mathcal{F}(R) \arrow[d, "\mathcal{F}(\varphi)"] \\ \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], S) \arrow[r, "\Phi_S"'] & \mathcal{F}(S) \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $f \in \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], R)$. Luego,

$$(\mathcal{F}(\varphi) \circ \Phi_R)(f) = \mathcal{F}(\varphi)(f(X)) = \phi(f(X)).$$

Por otro lado,

$$(\Phi_S \circ \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], \varphi))\,(f) = \Phi_S\,(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(X) = \varphi(f(X)),$$

por lo que

$$\mathcal{F}(\varphi) \circ \Phi_R = \Phi_S \circ \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], \varphi),$$

y entonces Φ es una transformación natural.

Una sencilla observación es que todo homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Z}[X] \to R$ es un homomorfismo de evaluación: $f = \Phi_{R,f(X)}$. Recuérdese, además, que basta decir cuál es la imagen de X para que el morfismo de evaluación quede completamente definido. Por otra parte, para cada $r \in R$ existe un morfismo de evaluación: $\Phi_{R,r}$. Con lo cual, lo que se está probando es que $\Phi_R : \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], R) \to \mathcal{F}(R)$ es una biyección, para todo anillo R. Por lo tanto, Φ es un isomorfismo natural y entonces $\mathcal{F}$ está representado por $\mathbb{Z}[X]$.

Así,

$$\mathcal{F} \simeq \mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[S], -)$$

y la ecuación (8) se convierte en

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}[X]) \simeq [\mathrm{Mor}(\mathbb{Z}[X], -), \mathcal{F}],$$

y entonces las formas polinomiales P están en biyección con las familias de funciones polinomiales F_R que satisfacen la ecuación 7.

5. Objetos Universales

El Lema de Yoneda y la representabilidad de un funtor $\mathcal{F}$ llevan a un objeto de interés. Por el lema débil de Yoneda se tiene que para cualquier objeto X en $\mathcal{C}$ y $x \in \mathcal{F}(X)$ existe un única transformación natural $\tau : \mathrm{Mor}(-, X) \to \mathcal{F}$ que cumple

$$\begin{array}{cccc} \tau_X & : & \mathrm{Mor}(X, X) & \to & \mathcal{F}(X) \\ & & 1_X & \mapsto & x \end{array}$$

Ahora supóngase que $\mathcal{F}$ está representado por A. Si eso ocurre, entonces

$$\mathcal{F}(A) \to \mathrm{Mor}(A, A)$$

es una biyección, por lo tanto existe un único $a \in \mathcal{F}(A)$ tal que $a \mapsto 1_A$. Considérese un objeto X en $\mathcal{C}$ y $x \in \mathcal{F}(X)$. Nuevamente, por la representabilidad de $\mathcal{F}$ es sabido que existe un (único) morfismo f tal que $x \to f \in \mathrm{Mor}(X, A)$. Esto último se puede comprobar gracias al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \ni a \arrow[r, mapsto, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, mapsto] & x \in \mathcal{F}(X) \\ \mathrm{Mor}(A, A) \ni 1_A \arrow[r, mapsto, "\mathrm{Mor}(f, A)"'] & f \in \mathrm{Mor}(X, A) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Obsérvese que $\mathcal{F}(f)(a) = x$; aún más, el morfismo f es el único morfismo que lo cumple.

Definición 5.1. *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to Set$ un funtor contravariante. Un* **objeto universal** *para $\mathcal{F}$ es un par (X, x), donde X es un objeto en $\mathcal{C}$ y $x \in \mathcal{F}(X)$, el cual tiene la propiedad de que para cada objeto A de $\mathcal{C}$ y cada $a \in \mathcal{F}(A)$, existe un único morfismo $f : A \to X$ tal que $(\mathcal{F}(f))(x) = a \in \mathcal{F}(A)$.*

Para llegar al objeto universal fue necesario suponer que el funtor estaba representado. Sin embargo, la relación entre objeto universal y representabilidad es más estrecha, puesto que no existe el uno sin el otro, como se establece en la siguiente proposición.

Proposición 5.1. *Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to Set$ es representable si y solo si tiene un objeto universal.*

Demostración. Ya se ha probado que representable implica la existencia de familia universal, ahora se demuestra que la familia universal implica representabilidad. Supóngase que (A, a) es un objeto universal para $\mathcal{F}$. Se define una transformación natural $\Phi : \mathcal{F} \to \mathrm{Mor}(-, A)$, en donde, para cada objeto X en $\mathcal{C}$ se tiene

$$\begin{array}{cccc} \Phi(X) & : & \mathcal{F}(X) & \to & \mathrm{Mor}(X, A) \\ & & x & \mapsto & f_x, \end{array}$$

en donde f_x es tal que $\mathcal{F}(f_x)(a) = x$.

Se toman X, Y objetos y $h : Y \to X$ en $\mathcal{C}$ y se demuestra que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & \mathrm{Mor}(X, A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(h)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}(h,A)} \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & \mathrm{Mor}(Y, A) \end{array}$$

es conmutativo. Sea $x \in \mathcal{F}(X)$. Entonces

$$(\Phi(Y) \circ \mathcal{F}(h))(x) = f_{\mathcal{F}(h)(x)},$$

en donde $\mathcal{F}(f_{\mathcal{F}(h)(x)})(a) = \mathcal{F}(h)(x)$. Por otra parte,

$$(\mathrm{Mor}(h, A) \circ \Phi(X))(x) = f_x \circ h.$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_x \circ h)(a) &= \mathcal{F}(h)(\mathcal{F}(f_x)(a)) \\ &= \mathcal{F}(h)(x), \end{aligned}$$

y por la unicidad de $f_{\mathcal{F}(h)(x)}$, se sigue que $f_x \circ h = f_{\mathcal{F}(h)(x)}$. En consecuencia el diagrama es conmutativo y Φ es una transformación natural.

Finalmente se prueba que $\Phi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathrm{Mor}(X, A)$ es una biyección. Considerar $x, y \in \mathcal{F}(X)$. Si $\Phi_X(x) = \Phi_X(y)$, entonces $x = f_x(a) = f_y(a) = y$, por lo tanto Φ_X es inyectiva.
Por otro lado, si $g \in \mathrm{Mor}(X, A)$, entonces $\mathcal{F}(g) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(X))$ y como $a \in \mathcal{F}(A)$, se sigue que $\mathcal{F}(g)(a) \in \mathcal{F}(X)$. Luego, $\Phi_X(\mathcal{F}(g(a))) = g_{\mathcal{F}(g)(a)}$ y g cumple con $\mathcal{F}(g_{\mathcal{F}(g)(a)})(a) = \mathcal{F}(g)(a)$, lo cual prueba que Φ_X es biyectiva.

Así, se concluye que Φ es un isomorfismo natural y por consiguiente $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Mor}(-, A)$. □

¿Cuál es el interés en el objeto universal? Ocurre que el objeto universal funciona como una especie de *espacio de parámetros*: cualquier elemento $a \in \mathcal{F}(A)$, para cualquier A, puede rastrearse a través de X y x. En el siguiente ejemplo, se muestra la relevancia de dicho objeto.

Ejemplo 5.1. *Este ejemplo puede encontrarse en [2], aquí lo es desarrollado un poco más. Además, se hace uso de algunos hechos topológicos elementales, los cuales pueden consultarse en cualquier libro de topología general, por ejemplo, en [7].*

Considerar la categoría Top. Se define un funtor contravariante $\mathcal{F} : Top \to Set$ que manda cada espacio topológico S a la colección $\mathcal{F}(S)$ de todos sus subespacios abiertos, y dado un morfismo (i.e. una función continua) $f : X \to Y$, se tiene la función de conjuntos

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}(f) & : \mathcal{F}(Y) & \to & \mathcal{F}(X) \\ & U & \mapsto & f^{-1}(U). \end{array}$$

Se equipa con la topología mas gruesa al conjunto $\{0, 1\}$ en la cual el subconjunto $\{0\} \subset \{0, 1\}$ sea cerrado (este espacio topológico es llamado espacio de Sierpinski); los subconjuntos abiertos en esta topología son $\emptyset$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$. Obsérvese que si $f : S \to \{0, 1\}$ es continua, entonces $f^{-1}(\{1\})$ es abierto. Recíprocamente, si se supone que $f^{-1}(\{1\})$ es abierto en S, entonces $f^{-1}(\{0, 1\}), f^{-1}(\{1\})$

y $f^{-1}(\{\emptyset\})$ son abiertos en S, por lo tanto f es continua. Luego, tenemos la equivalencia: una función $S \to \{0,1\}$ es continua si y solo si $f^{-1}(\{1\})$ es abierto en S.

Se demuestra que el par $(\{0,1\},\{1\})$ es un objeto universal para este funtor. Considérese un objeto A en Top y $U \in F(A)$ un abierto de A. Se desea probar que existe una única función continua $f : A \to \{0,1\}$ con la propiedad de que

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}(f) & : F(\{0,1\}) & \to & \mathcal{F}(A) \\ & \{1\} & \mapsto & U. \end{array} \tag{9}$$

Se define

$$\begin{array}{cccccc} f & : & X & \to & \{0,1\} & \\ & & x & \mapsto & 1 & si\ x \in U \\ & & x & \mapsto & 0 & si\ x \notin U, \end{array}$$

y se observa que esta función cumple 9. ¿Es la única? Si se supone que existe otra función $\bar{f}$ que satisface 9. Entonces $\mathcal{F}(\bar{f})(\{1\}) = \bar{f}^{-1}(\{1\}) = U$, que implica $\bar{f}(x) = 1$ si $x \in U$ y $\bar{f}(x) = 0$ si $x \notin U$. Por consiguiente, $f = \bar{f}$.

Por la proposición 5.1 (y su demostración), es sabido que el funtor $\mathcal{F}$ está representado por $\{0,1\}$, con ello se sabe que para todo espacio topológico X se tiene la biyección $\mathcal{F}(X) \simeq \mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$, y es posible concluir que hay tantas funciones continuas $X \to \{0,1\}$ como abiertos en X. La idea que debe resaltarse es que $\mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$ está "parametrizando" a los abiertos de X: en primer lugar, se tiene la biyección $\mathcal{F}(X) \simeq \mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$ y además, dado un morfismo $f \in \mathrm{Mor}(X,\{0,1\})$ se puede conocer cuál es su abierto correspondiente.

6. Conclusiones

En este trabajo se abordó el Lema de Yoneda. Para ilustrar su inserción y aplicación en el contexto de la teoría de categorías, se abordaron varios ejemplos interesantes, que permitieron ilustrar los conceptos y resultados. De forma precisa se tiene lo siguiente:

- La teoría de categorías se define en términos muy generales, lo cual hace que existan ejemplos muy variados de éstas.
- Se obtuvieron resultados muy concretos; para lograrlo tuvimos que considerar categorías y funtores específicos: primero se puso atención en los funtores que tuvieran como categoría de llegada a *Set*. Luego, el interés cambió a aquellos que fueran naturalmente isomorfos a $\mathrm{Mor}(, -)$.
- Se obtuvieron resultados específicos: que $\mathrm{Mor}(-,A) \simeq \mathrm{Mor}(-,B)$ implica que $A \simeq B$, o que un funtor es representable si y solo si, tiene un objeto universal. Se debe de mencionar que para demostrar estos dos resultados mencionados, se empleó el Lema de Yoneda (o bien, su versión débil).
- En la demostración de los resultados, fue posible notar que habían ciertos objetos que jugaban un papel importante en la demostración (especialmente, en la demostración del Lema (débil) de Yoneda); en los casos particulares se investigó qué información era posible obtenerse a partir de ellos:

1. En el ejemplo 3.1, el objeto de interés fue $\mathbb{R}$, el cual representa al funtor olvidadizo, y se observó que hay tantas funciones lineales $\mathbb{R} \to V$ como vectores hay en V (donde V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial).
2. Posteriormente, en el ejemplo 4.1 la transformación natural $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ permitía distinguir entre forma y función polinomial. Además, se vio que siempre es posible definir una función de $\mathbb{Z}[X]$ en cualquier anillo R, y gracias a esto fue demostrado que el funtor olvidadizo $\mathcal{F}$ está representado por $\mathbb{Z}[X]$.
3. Por último, en el ejemplo 5.1 se encontró un objeto universal y se vio de qué manera (utilizando el funtor de puntos) permitía parametrizar los abiertos de un espacio topológico.

A lo largo de este escrito se ejemplificó cómo la teoría de categorías proporciona un lenguaje bastante general pero que permite llegar a lo particular. Uno en el cual se puede expresar hechos matemáticos, resaltar objetos de interés y que permite, a través de resultados propios de la teoría, obtener información de otras áreas de las matemáticas.

7. Agradecimientos

El autor 1 agradece al SECIHTI (antes CONAHCYT) por el apoyo otorgado a través de la Beca para Estudios de Maestría No. 845470, y aún más a los contribuyentes que permiten que se sigan otorgando estos recursos.

8. Conflictos de interés

Los autores declaran no tener ningún conflicto de interés.

9. Declaratoria de uso de inteligencia artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

Referencias

[1] S. Eilenberg and S. Mac Lane, "General Theory of Natural Equivalences," Transactions of the American Mathematical Society, 1945.

[2] B. Fantechi et al., Grothendieck's FGA Explained. In *Amer. Math. Soc.*, 2005

[3] R. Hartshorne, Algebraic Geometry. Springer Science & Business Media.

[4] T. Hungerford, Algebra. Springer

[5] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician. Springer Science & Business Media, 2013.

[6] J.P. Marquis, "What is Category Theory?". Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy, 2006.

[7] J. Munkres, Topology. Prentice Hall, 2009.

[8] P. Newstead, Introduction to moduli problems and orbit spaces, 2013.

[9] J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds. Springer, 20013.

[10] T. Leinster, Basic category theory. Cambridge University Press, 2014.

[11] T. Tao, "Yoneda's lemma as an identification of form and function: the case study of polynomials," *What's new*, Aug. 25, 2023. https://terrytao.wordpress.com/2023/08/25/yonedas-lemma-as-an-identification-of-form-and-function-the-case-study-of-polynomials/

[12] T. Wedhorn, Manifolds, sheaves, and cohomology. Springer Spektrum, 2016.