

Volumen 11 número 32

septiembre-diciembre 2025



UJAT

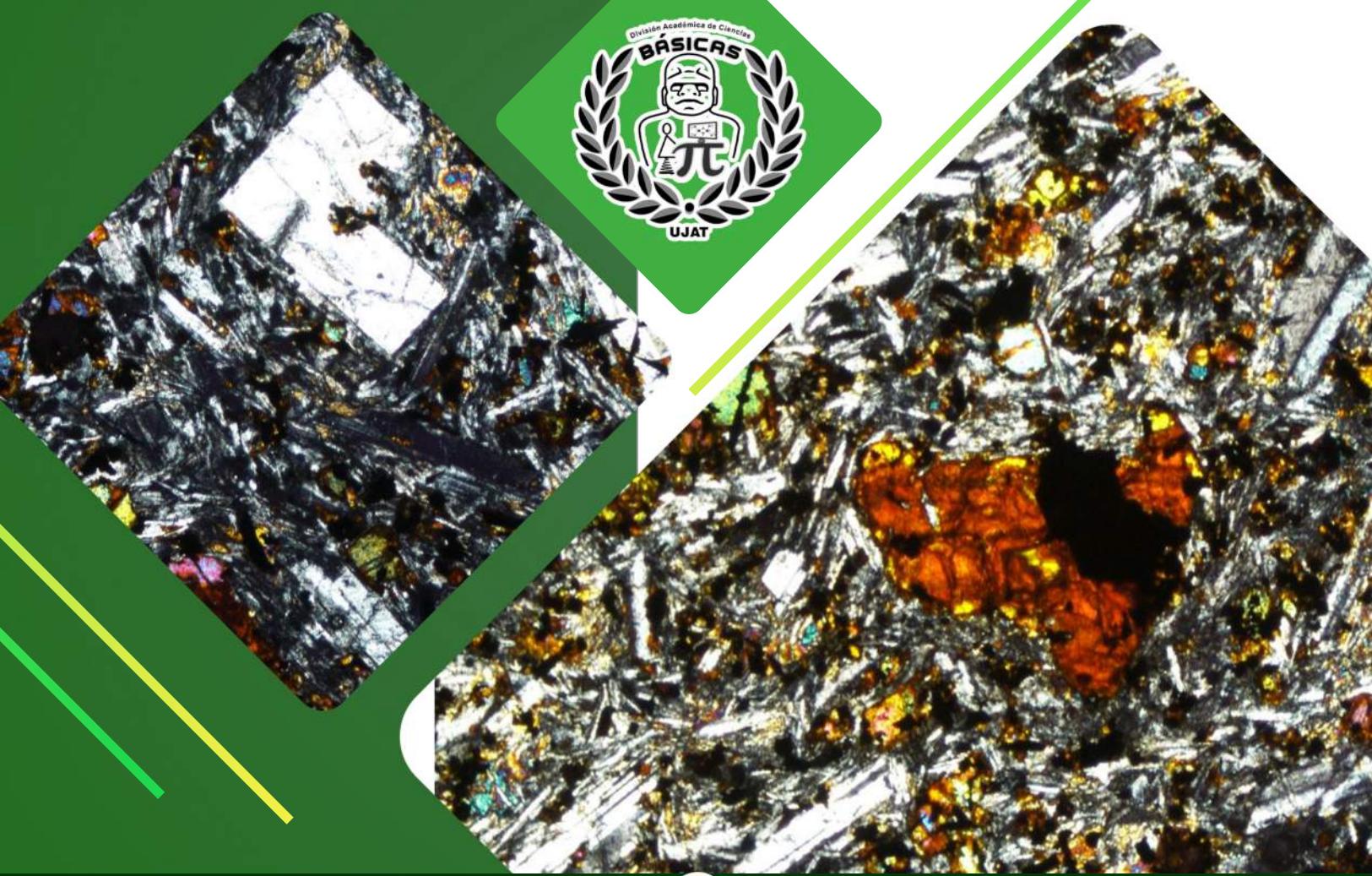
UNIVERSIDAD JUÁREZ
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

JOBS

Journal of Basic Sciences

DACB•UJAT



El presente número del Journal of Basic Sciences está integrado por seis contribuciones que, desde distintos campos de las ciencias naturales y matemáticas, ponen de relieve una característica fundamental en la investigación contemporánea que es la diversidad de enfoques y metodologías aplicadas en la búsqueda de soluciones y respuestas ante problemáticas específicas. Aun cuando el contexto y los objetos de estudios son diversos, desde las ciencias de la tierra hasta el análisis funcional, la física teórica o la teoría de categorías, en todos ellos se comparte un interés común: abundar en la comprensión de los fenómenos abordados, mediante herramientas metodológicas rigurosas.

El primer artículo, realizado en el campo volcánico “La Repartición”, situado al noreste de San Luis Potosí, se enfoca en el análisis de la distribución de tamaño de cristales y el cálculo de los tiempos de residencia de microcristales de plagioclasa en este escenario geológico, muy apropiado para el estudio de procesos magmáticos. Con los resultados obtenidos, se enriquece la compresión de la evolución textural de las rocas maficas y se subraya la importancia de los estudios microestructurales para reconstruir la dinámica interna de los sistemas volcánicos.

En la segunda contribución, se pone de manifiesto también el interés por estudiar la interacción entre procesos naturales y condiciones locales, ya que se examina la composición mineralógica y edafológica de suelos en Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco. Mediante estudios de difracción de rayos X y trabajo en campo, se encuentran diferencias sustanciales en la mineralogía, las propiedades físicas y la capacidad de intercambio iónico de los suelos, revelando así tanto la variabilidad intrínseca de los mismos como la influencia de actividades antropogénicas. Con este trabajo, se ofrecen insumos valiosos destinados a un manejo sostenible de los suelos en la región.

Las síntesis y propiedades catalíticas del óxido de zinc se estudian en el tercer artículo de este número, mediante técnicas analíticas apropiadas se logró la caracterización de este compuesto obtenido mediante combustión en estado sólido, además de que se probó su actividad para la degradación del 4-nitrofenol en condiciones de fotocatálisis, probándose así que puede ser un material promisorio para aplicarse exitosamente en el área de la química ambiental.

El cuarto trabajo se incluye en el ámbito de la probabilidad y el análisis, al analizar las propiedades fundamentales del kernel de calor de Dirichlet asociado a procesos de Markov simétricos, potencialmente discontinuos. Al demostrar una serie de características tales como continuidad, simetría y la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se fortalece la comprensión teórica del fenómeno, además de hacer posible su aplicación en ecuaciones semilineales de reacción-difusión no autónomas. De esta forma se entrelazan procesos estocásticos con problemas de evolución gobernados por operadores no locales.

Por otro lado, se presenta en el quinto artículo una reconstrucción precisa de la deducción de Feynman de las ecuaciones de Maxwell. A partir de la segunda ley de Newton y de las relaciones de Poisson en un espacio euclídeo, el análisis se extiende a un marco relativista mediante cálculos tensoriales en el espacio de Minkowski. Con ello, se abunda en la compresión de los supuestos fundamentales de la derivación original, fortaleciendo así la formulación pedagógica del problema e integrando el principio de acoplamiento mínimo con los desarrollos de Montesinos y Pérez-Lorenzana.

Finalmente, en la sexta contribución de este número, se profundiza en conceptos centrales de la teoría de categorías, como son la representabilidad, los objetos universales y el Lema de Yoneda. Mediante una serie de ejemplos que abarcan áreas de las matemáticas como el álgebra lineal, la topología y la teoría de anillos, se ofrece una ruta clara hacia la comprensión de estas nociones, contribuyendo así a una difusión de ideas fundamentales que forman parte del pensamiento matemático moderno.

En conjunto, los trabajos incluidos en este número ilustran la riqueza interdisciplinaria de la investigación actual y subrayan el valor del rigor científico, desde sus aspectos conceptuales hasta los metodológicos, para la generación de conocimiento. Que estas aportaciones sirvan de inicio para nuevas dudas e inquietudes, fomentando la interacción académica y estimulando el desarrollo de investigaciones futuras.

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

CONSEJO EDITORIAL

- **Dr. Carlos Ernesto Lobato García.** Editor en Jefe. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7780>
- **Dr. Adib Abiu Silahua Pavón.** Gestor Editorial. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-5344-1430>

COMITÉ EDITORIAL

- **Mtra. Claudia Gisela Vázquez Cruz.** Editora Asociada. Actuaría. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0002-1791-5621>
- **Mtra. María Hortensia Almaguer Cantú.** Editora Asociada. Ciencias de la Computación. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0009-0007-7839-9014>
- **Dr. José Arnold González Garrido.** Editor Asociado. Ciencias Farmacéuticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0000-0003-1135-4050>
- **Dr. José Luis Benítez Benítez.** Editor Asociado. Física. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. <https://orcid.org/0009-0000-0561-5029>
- **Mtro. Guillermo Chávez Hernández.** Editor Asociado. Geofísica. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-3555-9678>
- **Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé.** Editora Asociada. Matemáticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0002-7342-0888>
- **Dra. Nancy Romero Ceronio.** Editora Asociada. Química. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, <https://orcid.org/0000-0001-8169-3811>

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 32, diciembre de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. <https://revistajobs.ujat.mx>. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación y de esta Casa Editora.

Las publicaciones respaldadas con el sello editorial de la UJAT no podrán utilizarse para entrenar modelos de IA generativa, a menos de que haya una declaración expresa, tanto de la Universidad como de los autores y/o herederos.

CONTENIDO

	Pág.
Distribución de tamaño de cristales y tiempo de residencia en rocas maficas del Complejo La Repartición, San Luis Potosí, México	1-9
Caracterización Mineralógica y Edafológica de los Suelos de Huimanguillo y Jalpa de Méndez, Tabasco	10-19
Propiedades Fotocatalíticas del ZnO Sintetizado por Combustión en Estado Sólido: Análisis Estructural y Degradación de 4-Nitrofenol	20-28
Propiedades elementales del kernel de calor de Dirichlet para procesos de Markov simétricos y sus aplicaciones	29-51
Deducción de las ecuaciones de Maxwell mediante la prueba de Feynman-Dayson y su generalización relativista	52-67
Funtores representables, lema de Yoneda y objetos universales.	68-84

Propiedades elementales del kernel de calor de Dirichlet para procesos de Markov simétricos y sus aplicaciones

Ceballos-Lira, Marcos Josías^{1,*} , Pérez, Aroldo¹ ,

¹División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

*marjocel_81@hotmail.com

Resumen

En este artículo de difusión se demuestran algunas propiedades básicas del kernel de calor de Dirichlet. En teoría de probabilidad este objeto matemático es la densidad de transición de un proceso de Markov matado. En este trabajo se consideran procesos fuertes de Markov simétricos que podrían ser discontinuos. Entre las propiedades elementales probadas se encuentran: la continuidad, la simetría y la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Se presenta también una aplicación importante a la teoría de ecuaciones semilineales de tipo reacción-difusión no autónomas con condiciones de frontera de Dirichlet. La difusión en este caso es el generador del proceso de Markov asociado, el cual se conoce que podría ser un operador integro-diferencial no local.

Palabras claves: *Kernel de calor de Dirichlet, Proceso de Markov fuerte simétrico, densidad de transición de Dirichlet, tiempo de salida, proceso matado, solución mild, explosión.*

Abstract

In this diffusion article some basic properties of the Dirichlet heat kernel are demonstrated. In probability theory this mathematical object is the transition density of a killed Markov process. In this work, symmetric strong Markov processes that could be discontinuous are considered. Among the basic properties demonstrated are: continuity, symmetry, and the Chapman-Kolmogorov equation. An important application to the theory of non-autonomous semilinear reaction-diffusion equations with Dirichlet boundary conditions is also presented. Diffusion in this case is the generator of the associated Markov process, which is known to be a non-local integro-differential operator.

Keywords: *Dirichlet heat kernel, symmetric strong Markov process, Dirichlet transition density, exit time, killed process, mild solution, blow up.*

Recibido: 27 de marzo de 2025. Aceptado: 6 de noviembre de 2025. Publicado: 12 de diciembre de 2025.

1. Introducción

En la actualidad, debido a su importancia tanto en la teoría como en las aplicaciones, hay un gran interés en el estudio de procesos de Markov simétricos. El proceso estocástico asociado al operador laplaciano, por ejemplo, es un proceso de Markov simétrico llamado movimiento browniano y ha sido usado en diferentes áreas del conocimiento científico (e.g. la física, biología, ingeniería, mecánica cuántica, finanzas, etc.). El movimiento browniano tiene trayectorias continuas de rápido crecimiento sin derivada en ningún punto y ha permitido modelar sistemas con un gran número de perturbaciones aleatorias. La distribución del desplazamiento de cada partícula involucrada en

esta difusión es gaussiana; luego es posible calcular el desplazamiento promedio, así como también que tanto se dispersa éste del valor real, es decir, su varianza.

Ahora bien, cuando la distribución del desplazamiento de cada partícula tiene un decaimiento asintóticamente lento, tipo polinomial, a este prototipo de difusión se le conoce en la literatura como difusión anómala y es de especial interés en mecánica estadística. En este movimiento anormal no es posible, en algunos casos, calcular el desplazamiento promedio de las partículas y cuando lo es, desafortunadamente no es posible determinar su varianza. Ejemplos que exhiben difusión anómala son: el movimiento de partículas en flujos turbulentos, el transporte de carga en sólidos anómalos, las micelas disueltas, los vidrios porosos, el enfriamiento por láser con retroceso secundario y la dinámica caótica. Es bien sabido que la difusión anómala puede ser adecuadamente descrita mediante las trayectorias discontinuas del proceso de Lévy simétrico α -estable y su generador $\Delta_\alpha = -(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0, 2)$ (laplaciano fraccionario). El lector interesado en como se hace esto y en otras áreas de aplicación, puede consultar [1, 7, 27] y las referencias allí dadas.

También en matemáticas financieras se ha observado que, aunque los procesos α -estables proporcionan mejores representaciones de datos financieros que los procesos gaussianos, los datos financieros tienden a volverse más gaussianos en una escala de tiempo más larga. Los llamados procesos α -estables relativistas tienen esta propiedad requerida: se comportan como procesos α -estables en pequeña escala y se comportan como el movimiento browniano a gran escala. Otros procesos que tienen este tipo de propiedad se pueden obtener “atenuando” o “truncando” los procesos α -estables, es decir, multiplicando las densidades de Lévy de los procesos α -estables con factores decrecientes estrictamente positivos y completamente monótonos. Este procedimiento genera una clase importante de procesos, llamados procesos de Lévy simétricos α -estables truncados, que surgen de manera natural en aplicaciones donde solo se permiten saltos hasta un tamaño prefijado (ver [20] y las referencias allí dadas).

Si se conoce de manera expresa la densidad de transición $p(t, x, y)$ de un proceso de Markov X , entonces es evidente que el estudio de sus trayectorias es menos complicado y en consecuencia el análisis del fenómeno asociado. Sin embargo, excepto en algunos casos especiales, obtener una expresión explícita de $p(t, x, y)$ (en caso de que exista) suele ser imposible. En el campo de ecuaciones diferenciales parciales, a la densidad de transición $p(t, x, y)$ se le conoce como kernel de calor. Si \mathcal{L} denota el generador del proceso de Markov X , se dice entonces que $p(t, x, y)$ es la solución fundamental de la ecuación del calor $\partial_t u = \mathcal{L}u$. Por lo tanto, conocer propiedades y estimaciones precisas de $p(t, x, y)$ es una cuestión fundamental tanto en la teoría de la probabilidad como en ecuaciones diferenciales parciales. Estos tipos de estudios se han realizado desde hace más de un siglo para procesos de difusión, aunque para procesos discontinuos apenas se logró comenzar en este siglo (ver [3] y referencias dadas allí). No obstante, estudiar las propiedades y estimaciones del kernel de calor de Dirichlet $p_D(t, x, y)$, el cual es la solución fundamental del problema $\partial_t u = \mathcal{L}u$, $u|_{D^c} = 0$, D dominio en \mathbb{R}^d , es todavía más complicado. En teoría de probabilidad, el kernel de calor de Dirichlet $p_D(t, x, y)$ es la densidad de transición asociada al proceso matado X_D . Una de las razones por la que es tan complejo conocer sus propiedades y estimaciones, viene directamente de la definición de la misma, a saber

$$p_D(t, x, y) := p(t, x, y) - \mathbb{E}_x \{ p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); t > \tau_D \}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

donde τ_D es la primera vez que el proceso X abandona el dominio D . Nótese que al ser $p_D(t, x, y)$ una resta, una característica tan básica como la positividad (recuerde que una densidad de transición es no negativa) deja de ser inmediata.

En la mayoría de los trabajos que obtienen estimaciones y propiedades de $p_D(t, x, y)$, se utilizan estimaciones y propiedades conocidas de $p(t, x, y)$. El objetivo de este trabajo es proporcionar

demostraciones de propiedades elementales de $p_D(t, x, y)$ para una clase de procesos de Markov fuertes, simétricos, continuos por la derecha y quasi continuos por la izquierda (ver el inicio de la Sección 2). Cabe destacar que esta clase de procesos incluye importantes procesos de Lévy y procesos de Feller que surgen tanto en matemática pura como en la aplicada (ver Ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3). El resultado principal de este artículo es el Teorema 4.1 y las propiedades elementales probadas son: la ecuación de Chapman-Kolmogorov, la continuidad y la simetría. La mayoría de trabajos que se conocen sobre estimaciones de $p_D(t, x, y)$ (en el caso de procesos de Markov discontinuos), dejan al lector la prueba de tales propiedades elementales e indican que es suficiente guiarse de las demostraciones para el caso gaussiano, usando las estimaciones conocidas de $p(t, x, y)$. La referencia estándar recomendada para esta labor es [15]. Sin embargo, consideramos que las pruebas no son tan directas como en el caso gaussiano, ya que en este caso se utiliza la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano. Otra ventaja empleada en tales pruebas, es que se conoce de manera explícita la función de densidad de probabilidad de transición del movimiento browniano, la cual es unimodal, isotrópica y uniformemente continua en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ para cada $t > 0$. Estas bondades han permitido obtener diferentes demostraciones de dichas propiedades básicas a lo largo de los años. Consideramos entonces que este trabajo de difusión atenderá ese vacío frecuentemente ignorado en la literatura y motivará a los lectores a conocer más sobre tales procesos discontinuos. Más aún, en nuestra última sección presentamos una aplicación de tales propiedades a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas semilineales no autónomas. Cabe destacar que, en este artículo, las demostraciones de los resultados son dadas en forma más detallada que las presentadas en las referencias [4, 6, 15, 16, 18, 21, 24]. En cada uno de nuestros resultados y demostraciones, donde utilizamos alguna de las anteriores fuentes bibliográficas, indicamos la cita, el resultado específico en el cual nos basamos y su página. Incluso, en algunos casos, algunas ideas de tales fuentes fueron adaptadas para poderlas aplicar en el contexto de nuestros procesos de interés.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 introducimos el proceso de Markov con el que estaremos trabajando y presentamos algunos ejemplos. En la Sección 3 probamos propiedades del tiempo de salida τ_D . Estas propiedades son importantes ya que la densidad de transición $p_D(t, x, y)$ se expresa en términos de τ_D (ver (1)) y las trayectorias de X podrían tener saltos. La Sección 4 versa sobre las propiedades elementales mencionadas anteriormente. Se presentan demostraciones de ellas y de algunas otras propiedades. En la Sección 5 mostramos una aplicación de las propiedades de $p_D(t, x, y)$ a la solución de una ecuación de Cauchy de tipo reacción-difusión, con condiciones de frontera de Dirichlet.

En este artículo usamos la siguiente notación: $|\cdot|$ es la norma euclíadiana en \mathbb{R}^d , $d(F, G)$ es la distancia euclíadiana entre $F, G \subseteq \mathbb{R}^d$, $m_\ell(dx) = dx$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d , $\mathcal{B}(D)$ es la σ -álgebra de Borel en D , $C_c^p(D)$ es el espacio de todas las funciones reales continuas de clase C^p , con soporte compacto contenido en D , $p = 0, 1, 2, \dots, \infty$ y $C_0^p(D) = \overline{C_c^p(D)}$; $D \subseteq \mathbb{R}^d$ (convenimos que $C_c^0(D) = C_c(D)$ y $C_0^0(D) = C_0(D)$). $B_r(x)$ es la bola abierta de radio $r > 0$ centrada en $x \in \mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, es la norma en $L^p(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

2. Proceso de Markov simétrico y ejemplos

Sea $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, X(t), \mathbb{P}_x; t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ un proceso de Hunt¹, es decir, X es un proceso de Markov (temporalmente homogéneo) con las siguientes propiedades:

[H₁] : X es continuo a la derecha.

¹Para el lector interesado, [6] y [16] son referencias clásicas sobre este tipo de procesos. En [6] los procesos de Hunt son llamados procesos estándar. El libro [18] contiene en su apéndice una introducción concisa sobre estos procesos, ya que el objetivo de los autores es estudiar formas de Dirichlet para procesos de Markov generales.

[H_2] : X es quasi continuo a la izquierda.

[H_3] : X tiene la propiedad fuerte de Markov.

[H_4] : X es normal, es decir, $\mathbb{P}_x\{X(0) = x\} = 1$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Suponemos adicionalmente que X tiene una densidad de probabilidad de transición $p(t, x, y)$ tal que:

[p_1] : Para cada $t > 0$, $p(t, \bullet, \bullet)$ es continua en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

[p_2] : $p(t, x, y) = p(t, y, x)$, $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.

[p_3] : $M_\delta := \sup\{p(t, x, y); t > 0, |x - y| > \delta\} < \infty$.

Observe que [p_2] implica que X es simétrico. Dado $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definamos la variable aleatoria $\tau_B := \inf\{t > 0; X(t) \notin B\}$. Vamos a suponer que la función de distribución de la variable aleatoria $\tau_{B_\delta(x)}$ satisface:

[F_τ] : $\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\} = 0$, $\delta > 0$.

La variable aleatoria τ_B es **el primer instante o tiempo de salida** del conjunto B . Es inmediato que si $A \subseteq B$, entonces $\tau_A \leq \tau_B$. Enunciamos a continuación otras propiedades elementales. Los resultados propuestos son conceptos técnicos frecuentemente utilizados y sus demostraciones usualmente son omitidas en la mayoría de los textos. Cabe destacar que, en el caso de trayectorias continuas, las demostraciones son directas. Sin embargo, dado que ese no es nuestro caso, presentaremos con detalle dichas pruebas. En lo que sigue $\Omega \ni \omega \mapsto \theta_t(\omega) \in \Omega$ denota el operador traslación que satisface $X(s) \circ \theta_t(\omega) = X(s + t)(\omega)$, $s, t \geq 0$.

Proposición 2.1. *Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

1. τ_B es terminal, es decir, si T es un tiempo de paro, entonces $\tau_B = T + \tau_B \circ \theta_T$ sobre el evento $\{T < \tau_B\}$.
2. $\mathbb{P}_x\{\tau_B > 0\} = 1$, $x \in B^\circ$.
3. Si B es abierto, entonces $X(\tau_B) \notin B$ sobre el evento $\{\tau_B < \infty\}$.
4. Si B es cerrado, entonces la función de distribución de τ_B está dada por el siguiente límite

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B \geq t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x\{X(kt/2^n) \in B; k = 1, \dots, 2^n - 1\}.$$

Demostración. 1. Si $\tau_B = \infty$, el resultado es inmediato. De la definición de ínfimo, se tiene que

$$T + \tau_B \circ \theta_T = \inf\{t > T; X(t) \notin B\} \tag{2}$$

y así, nuevamente de la definición de ínfimo $\tau_B \leq T + \tau_B \circ \theta_T$. Para probar la igualdad procederemos por contradicción. En efecto, supongamos que existe ω tal que $\tau_B(\omega) < T(\omega) + \tau_B \circ \theta_T(\omega)$. Entonces, de la definición de ínfimo, existe $t > 0$ tal que $\tau_B(\omega) \leq t < T(\omega) + \tau_B \circ \theta_T(\omega)$ y $X(t, \omega) \notin B$. Puesto que $T(\omega) < \tau_B(\omega)$, de lo anterior y (2), se obtiene que $T(\omega) + \tau_B \circ \theta_T(\omega) \leq t$, lo cual es la contradicción deseada.

2. Si $\tau_B(\omega) = 0$, entonces existe una sucesión decreciente (t_n) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, $X(t_n, \omega) \in B^c$. Si adicionalmente se tiene que $X(0, \omega) = x$, por $[H_1]$ se llega a que $B^\circ \ni x = X(0, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n, \omega) \in \overline{B^c}$. Luego, de $[H_4]$ tenemos que $\mathbb{P}_x\{\tau_B = 0\} = \mathbb{P}_x\{\tau_B = 0, X(0) = x\} = 0$.
3. Usando el argumento anterior puede demostrarse que si $\tau_B(\omega) < \infty$, entonces se tiene que $X(\tau_B(\omega), \omega) \in \overline{B^c} = B^c$.
4. Para cada $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ sea $J_t(n) := \{j_k := kt/2^n; k = 1, \dots, 2^n - 1\}$ y sea $J_t := \cup_{n=1}^{\infty} J_t(n)$. Entonces $J_t \subseteq (0, t)$ y $\overline{J_t} = [0, t]$. Usando que B es cerrado y $[H_1]$, puede probarse que $\{X(s) \in B, s \in (0, t)\} = \{X(j) \in B, j \in J_t\}$. Pero en general, de la definición de ínfimo, $\{\tau_B \geq t\} = \{X(s) \in B, s \in (0, t)\}$ y así $\{\tau_B \geq t\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{X(j_k) \in B; k = 1, \dots, 2^n - 1\}$. El resultado es ahora consecuencia del teorema de la convergencia monótona (aplicado a las funciones indicadoras de los complementos de estos eventos). \square

Presentamos a continuación algunos ejemplos de procesos de Markov que cumplen las propiedades $[H_1]$, $[H_2]$, $[H_3]$, $[H_4]$, $[p_1]$, $[p_2]$, $[p_3]$ y $[F_\tau]$. Junto a cada proceso dado se presenta una forma no trivial de su generador.

Ejemplo 2.1. *Sea X un proceso de Lévy simétrico con densidad de probabilidad de transición que satisface $[p_1]$ y $[p_3]$. Claramente X cumple $[H_1]$ - $[H_4]$ y $[p_2]$. Para verificar $[F_\tau]$, sean $\delta > 0$, $B := B_{\delta/2}(x)$ y $B_0 := B_{\delta/2}(0)$. Nótese que de la Proposición 2.1.4 y el hecho de que todo proceso de Lévy es espacialmente homogéneo, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\{\tau_B \geq 2t\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x\{X(kt/2^n) \in B; k = 1, \dots, 2^n - 1\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0\{X(kt/2^n) \in B_0; k = 1, \dots, 2^n - 1\} \\ &= \mathbb{P}_0\{\tau_{B_0} \geq 2t\}.\end{aligned}$$

Se sigue de esto y la Proposición 2.1.2 que

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\} \leq \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}_x\{\tau_B < 2t\} = 0.$$

Presentamos a continuación un ejemplo específico.

Sea X un movimiento browniano subordinado, es decir, $X(t) = W(S(t))$, $t \geq 0$, donde $S = (S(t); t \geq 0)$ es un subordinador independiente del movimiento browniano $W = (W(t); t \geq 0)$. Por tanto, la densidad de probabilidad de transición esta dada por

$$p(t, x, y) = \int_0^{\infty} (4\pi s)^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}} \mathbb{P}\{S(t) \in ds\}.$$

La función $(4\pi s)^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4s}}$ es uniformemente continua y uniformemente acotada sobre el conjunto $\{(s, x, y); s > 0, |x - y| > \delta\}$, luego $p(t, x, y)$ satisface $[p_1]$ y $[p_3]$. Sea ψ el exponente de Laplace de S , esto es

$$\psi(r) = \nu r + \int_0^{\infty} (1 - e^{-rt}) \mu(dt), \quad r \geq 0,$$

donde $\nu \geq 0$, μ es la medida de Lévy del subordinador S . Si \mathcal{L} es el generador de X , entonces se conoce que $\mathcal{L}f(x) = -\psi(-\Delta)f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ (ver [2, Teorema 3.3.15, p. 145]).

Los movimientos brownianos subordinados son la fuente de múltiples operadores usados en diferentes áreas de la ciencia. Algunos de ellos son: Δ (laplaciano); $\Delta_{\alpha} := -(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0, 2)$

(laplaciano fraccionario); $mc^2 - (m^{2/\alpha}c^{4/\alpha} - c^{2/\alpha}\Delta)^{\alpha/2}$, $m, c > 0$, $\alpha \in (0, 2)$ (operador Schrödinger relativista fraccionario); $\Delta_\alpha + \Delta_\beta$, $0 < \beta < \alpha < 2$; $\Delta + \Delta_\alpha$, $\alpha \in (0, 2)$. El capítulo 3 de [2] es una referencia básica acerca de la teoría general que involucra los operadores anteriores. Dicho capítulo incluye información acerca de el laplaciano, el laplaciano fraccionario y el operador Schrödinger relativista fraccionario; mientras que [12] y [11] contienen información más especializada acerca de $\Delta_\alpha + \Delta_\beta$ y $\Delta + \Delta_\alpha$, respectivamente.

En el siguiente ejemplo $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma. Recuerde que ésta se define por $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$, $x > 0$.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, x); x \in \mathbb{R}^d\} \ni (x, y) \mapsto J(x, y) \in [0, \infty)$ una función medible y simétrica, es decir $J(x, y) = J(y, x)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Para cualesquiera $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definamos

$$\mathcal{E}(f, g) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]J(x, y)dx dy,$$

y $\text{Dom}(\mathcal{E}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$. Suponga que existe una función creciente $(0, \infty) \ni t \mapsto \psi(t) \in (0, \infty)$ con las siguientes propiedades:

1. Existen $\beta_1, \beta_2 > 0$ y $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \left(\frac{R}{r} \right)^{\beta_1} \leq \frac{\psi(R)}{\psi(r)} \leq c_2 \left(\frac{R}{r} \right)^{\beta_2}, \quad 0 < r \leq R. \quad (3)$$

2. $\int_0^1 \frac{s}{\psi(s)} ds < \infty$.

3. Existe $\bar{C} > 0$ de modo que

$$\frac{\bar{C}^{-1}}{|x - y|^d \psi(|x - y|)} \leq J(x, y) \leq \frac{\bar{C}}{|x - y|^d \psi(|x - y|)}. \quad (4)$$

Bajo las hipótesis anteriores $(\mathcal{E}, \text{Dom}(\mathcal{E}))$ es una forma regular de Dirichlet en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con kernel de saltos J , por lo que existe un proceso de Feller conservativo X que posee una densidad de transición continua $p(t, x, y)$ en $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ y además cumple que

$$p(t, x, y) \leq \frac{Ct}{|x - y|^d \psi(|x - y|)} + \frac{C}{\Phi^{-1}(t)^d} e^{-a_*|x - y|^2/\Phi^{-1}(t)^2}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (5)$$

donde $a_*, C > 0$ y Φ^{-1} es la inversa de

$$\Phi(r) := \frac{r^2}{2 \int_0^r \frac{s}{\psi(s)} ds}, \quad r > 0$$

(ver [3, Teorema 1.2, pág. 2833]). El hecho de que X es conservativo garantiza que $p(t, x, y)$ es una densidad de probabilidad de transición, es decir, $\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) dy = 1$, para toda $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. La función Φ es estrictamente creciente y $\lim_{r \downarrow 0} \Phi(r) = 0$ como puede consultarse en [3, p. 2836]. Observe que si $\int_0^\infty \frac{s}{\psi(s)} ds = \infty$, entonces de (3) se sigue que $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \infty$. Si $\int_0^\infty \frac{s}{\psi(s)} ds < \infty$, entonces es claro que el límite anterior se cumple. De esta manera $\lim_{t \downarrow 0} \Phi^{-1}(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^{-1}(t) = \infty$. Usando estos límites, (5) y que ψ es creciente, puede probarse que $p(t, x, y)$

satisface $[p_3]$. Finalmente, veamos que X tiene la propiedad $[F_\tau]$. En efecto, utilizando el lado izquierdo de (3) obtenemos que, para toda $r > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)^c} \frac{Ct}{|x-y|^d \psi(|x-y|)} dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_{2^{n+1}r}(x) \setminus B_{2^n r}(x)} \frac{Ct}{|x-y|^d \psi(|x-y|)} dy \\ &\leq \frac{Ct}{r^d \psi(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_\ell(B_{2^{n+1}r}(x))}{2^{(d+\beta_1)n}} \\ &= \frac{C't}{\psi(r)}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $C' := C 2^{d+\beta_1} \pi^{d/2} / [c_1 \Gamma(1+d/2)(2^{\beta_1} - 1)]$. Por otra parte, observe que

$$\begin{aligned} I_r(t) &:= \int_{B_r(x)^c} \frac{C}{\Phi^{-1}(t)^d} e^{-a_*|x-y|^2/\Phi^{-1}(t)^2} dy \\ &= \int_{r/\Phi^{-1}(t)}^{\infty} C u^{d-1} e^{-a_* u^2} du \\ &\leq \frac{C}{2a_*^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \end{aligned}$$

para toda $r > 0$. La función $I_r(\cdot)$ es creciente y $\lim_{t \downarrow 0} I_r(t) = 0$. Las relaciones anteriores y (5) implican que

$$\mathbb{P}_x\{X(t) \notin B_{\delta/2}(x)\} \leq \frac{C't}{\psi(\delta/2)} + I_{\delta/2}(t), \quad \delta > 0. \quad (7)$$

Sin embargo, por la Proposición 2.1.3, $X(\tau_{B_\delta(x)}) \notin B_\delta(x)$ en el evento $\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\}$ por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x\{X(t) \in B_{\delta/2}(x), \tau_{B_\delta(x)} \leq t\} &\leq \mathbb{P}_x\{X(t) \notin B_{\delta/2}(X(\tau_{B_\delta(x)})), \tau_{B_\delta(x)} \leq t\} \\ &= \mathbb{E}_x\left\{\mathbb{P}_{X(\tau_{B_\delta(x)})}\{X(t - \tau_{B_\delta(x)}) \notin B_{\delta/2}(X(\tau_{B_\delta(x)}))\}; \tau_{B_\delta(x)} \leq t\right\} \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d, s \leq t} \mathbb{P}_z\{X(s) \notin B_{\delta/2}(z)\}, \end{aligned}$$

donde se ha usado $[H_3]$ en la igualdad. Ahora $[F_\tau]$ es consecuencia del hecho de que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq t\} \leq \mathbb{P}_x\{X(t) \notin B_{\delta/2}(x)\} + \mathbb{P}_x\{X(t) \in B_{\delta/2}(x), \tau_{B_\delta(x)} \leq t\}$$

y la desigualdad (7).

En general, es difícil encontrar una fórmula explícita para el generador de un proceso de Markov simétrico de saltos puros, incluso si este está asociado a una forma regular de Dirichlet. No obstante, esto es posible si se conocen más propiedades del kernel de saltos J . Por ejemplo, si $\int_{\mathbb{R}^d} (|x-y|^2 \wedge 1) J(x, y) dy$ es localmente integrable y

$$\int_{B_1(0)} |h| |J(x, x+h) - J(x, x-h)| dh < \infty,$$

entonces el generador \mathcal{L} de X tiene la forma

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x)^c} [f(x) - f(y)] J(x, y) dx dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, f \in C_0^2(\mathbb{R}^d),$$

ver [26, Teorema 2.2, p. 404].

Ejemplo 2.3. Sea $A(x) = (a_{ij}(x); i, j = 1, \dots, d)$ una matriz de funciones reales definidas en \mathbb{R}^d que es uniformemente elíptica y acotada, en el sentido de que existe una constante $c \geq 1$ tal que

$$c^{-1}|z|^2 \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}(x) z_i z_j \leq c|z|^2, \quad x, z \in \mathbb{R}^d$$

y $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, x); x \in \mathbb{R}^d\} \ni (x, y) \mapsto J(x, y) \in [0, \infty)$ es una función medible simétrica tal que existe una función estrictamente creciente $[0, \infty) \ni r \mapsto \psi(r) \in [0, \infty)$, con $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, que satisface (3) y (4). En este caso las constantes positivas β_1 y β_2 están relacionadas por $\beta_1 \leq \beta_2 < 2$. Observamos que si $c_* := 1 + c_2(2 - \beta_2)^{-1}$, entonces el lado derecho de (3) garantiza que

$$\int_0^r \frac{s}{\psi(s)} ds \leq c_* \frac{r^2}{\psi(r)}, \quad r > 0. \quad (8)$$

Para cada $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definamos

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x) A(x) \nabla g(x)^t dx + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] J(x, y) dx dy,$$

donde $\text{Dom}(\mathcal{E}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$. Luego, $(\mathcal{E}, \text{Dom}(\mathcal{E}))$ es una forma regular de Dirichlet en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y por tanto existe un proceso de Hunt simétrico X con función de densidad de transición continua $p(t, x, y)$ tal que

$$p(t, x, y) \leq \frac{t}{|x - y|^d \psi(|x - y|)} + \frac{1}{t^{d/2}} e^{-b|x - y|^2/t}, \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (9)$$

donde $b > 0$ y su generador \mathcal{L} está dada por

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x)^c} [f(x) - f(y)] J(x, y) dy,$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ (ver [13, Teorema 1.4, p. 557]). Los lados derechos de (3) y (4) implican que

$$J(x, y) \leq \frac{c_2}{|x - y|^{d+\beta_2}} \quad \text{cuando} \quad |x - y| \leq 1. \quad (10)$$

Además, usando (8) y argumentando como en (6) concluimos que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (|x - y|^2 \wedge 1) J(x, y) dy &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B_1(0)} |x - y|^2 J(x, y) dy + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B_1(0)^c} J(x, y) dy \\ &\leq \bar{C} \int_0^1 \frac{s}{\psi(s)} ds + \frac{C'}{\psi(1)} \\ &\leq \bar{C} c_* + C'. \end{aligned}$$

De esto y (10) se puede demostrar, en forma similar a [13, p. 563], que el proceso X es conservativo. Las propiedades $[p_3]$ y $[F_\tau]$ son válidas y su demostración es similar a la dada en el Ejemplo 2.2 pero usando ahora la desigualdad (9).

3. Propiedades del tiempo de salida

En esta sección presentamos algunas propiedades importantes del tiempo de salida τ_B . El tiempo de salida es una variable aleatoria que nos permitirá estudiar la probabilidad de transición del proceso X en algún boreliano B . Las probabilidades de transición en B , serán estimadas mediante la densidad de transición de Dirichlet, la cual, como mencionamos en nuestra introducción, se expresa en términos del tiempo de salida. De aquí la importancia de conocer propiedades de τ_B . En lo que resta de esta sección, suponemos que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

En general, si una variable aleatoria es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, es imposible que con probabilidad positiva tome valores en el boreliano $\{t\}$, con $t > 0$. La siguiente proposición nos dice que τ_B tiene esta propiedad y su demostración está basada en la prueba del Teorema 4.7 de [24, p. 11], en el contexto gaussiano.

Proposición 3.1. *Para cada $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que $\mathbb{P}_x\{\tau_B = t\} = 0$.*

Demostración. Sean $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Supongamos válida la siguiente afirmación:

[A] : Existe $s \in (0, t)$ tal que $\mathbb{P}_x\{\tau_B = s\} = 0$, m_ℓ -c.d.q.

Usando la Proposición 2.1.1 puede probarse que $\{\tau_B = t\} = \{\tau_B > t - s, t - s + \tau_B \circ \theta_{t-s} = t\}$. Esto junto con $[H_3]$ y la afirmación [A] implican que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B = t\} \leq \mathbb{P}_x\{\tau_B \circ \theta_{t-s} = s\} = \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(t-s)}\{\tau_B = s\}\} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} p(t-s, x, y) dy = 0.$$

Probemos entonces [A]. Dado $B \subseteq \mathbb{R}^d$ denotamos por $\#B$ la cardinalidad de B . Recuerde que B es finito cuando $\#B < \aleph_0$, donde $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $A_n := B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)$. Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{s \in (0, t)} \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy &= \sup \left\{ \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B \in F\} dy; F \subseteq (0, t), \#F < \aleph_0 \right\} \\ &\leq m_\ell(A_n) < \infty. \end{aligned}$$

Luego, si $P_n := \{s \in (0, t); \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy > 0\}$ se sigue de [17, Proposición 0.20, p. 11] que $\#P_n \leq \aleph_0$. Sea $P := \{s \in (0, t); \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy > 0\}$. Usando que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} \mathbb{P}_y\{\tau_B = s\} dy,$$

deducimos que $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$. Finalmente, al ser $(0, t) = P \cup P^c$ y $\#P \leq \aleph_0$, concluimos que $P^c \neq \emptyset$ y así [A] es verdadera. \square

Dado que el tiempo de salida τ_B podría ser ∞ , una pregunta interesante es ¿Bajo qué condiciones τ_B es finito? La respuesta a esta cuestión viene dada en el Teorema 3.1 y para su demostración haremos uso de la semicontinuidad inferior de la función $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq t\}$, $t > 0$. Esta última afirmación es el enunciado de nuestra siguiente proposición y su demostración se basa en las pruebas dadas en [4, p. 81, Proposición 1.10], [15, p. 22, Proposición 1.19], [16, p. 163, Proposición 1] y [24, p. 20, Proposición 2.1]. Sin embargo, cabe destacar que en tales demostraciones se utiliza que, para cada $\delta \in (0, t)$, la función $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(\delta)}\{\tau_B \leq t - \delta\}\}$ es continua, lo cual es consecuencia del hecho de que la densidad de probabilidad de transición del movimiento browniano es conocida. Nosotros no hacemos uso de esto, ya que bajo nuestros supuestos, no tenemos fórmula explícita de $p(t, x, y)$.

Proposición 3.2. Para cada $t > 0$ la función $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq t\}$ es semicontinua inferiormente.

Demostración. Para cada $\delta > 0$ sean $f_\delta(x) := \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(\delta)}\{\tau_B \leq t-\delta\}\}$ y $\tau_B(\delta) := \delta + \tau_B \circ \theta_\delta$. Observe que $\tau_B(\delta) = \inf\{t > \delta; X(t) \notin B\}$, $\tau_B(\bullet)$ es decreciente y $\lim_{\delta \downarrow 0} \tau_B(\delta) = \tau_B$. De la definición de f_δ , la propiedad $[p_1]$ y el lema de Fatou, tenemos

$$\begin{aligned} f_\delta(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B \leq t-\delta\} p(\delta, x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{z \rightarrow x} \mathbb{P}_y\{\tau_B \leq t-\delta\} p(\delta, z, y) dy \\ &\leq \liminf_{z \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_y\{\tau_B \leq t-\delta\} p(\delta, z, y) dy \\ &= \liminf_{z \rightarrow x} f_\delta(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto cada f_δ es semicontinua inferiormente. Por $[H_3]$ obtenemos que $f_\delta(x) = \mathbb{P}_x\{\tau_B(\delta) \leq t\}$, por lo que $f_\bullet(x)$ es creciente para cada $x \in \mathbb{R}^d$. Se sigue de esto y la Proposición 3.1 que $\lim_{\delta \downarrow 0} f_\delta(x) = \mathbb{P}_x\{\tau_B < t\} = \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq t\}$. De aquí, el resultado se sigue por la semicontinuidad inferior de cada f_δ . \square

El siguiente teorema presenta dos condiciones bajo las cuales τ_B es finita, casi seguramente. La demostración se basa en la prueba del Teorema 1.17 en [15, p. 20] y la Proposición 2.8 en [24, p. 23].

Teorema 3.1. Considere los siguientes enunciados.

1. $m_\ell(B) < \infty$ y existe $[0, \infty) \ni t \mapsto \phi(t) \in [0, \infty)$ tal que $\phi((0, \infty)) \subseteq (0, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty$ y $p(t, x, y) \leq 1/\phi(t)$ para toda $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.
2. $m_\ell(B^c) > 0$ y $p(t, x, y) > 0$ para toda $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Si cualquiera de los enunciados anteriores se cumple, entonces se tiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x\{\tau_B\} < \infty.$$

Demostración. Comenzamos suponiendo que 1. es cierto. Sea $t_0 > 0$ suficientemente grande de manera que $m_\ell(B) < \phi(t_0)$ y sea $\kappa := m_\ell(B)/\phi(t_0)$. Entonces $\kappa \in (0, 1)$ y $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B > 2t_0\} \leq \mathbb{P}_x\{X(t_0) \in B\} = \int_B p(t_0, x, y) dy \leq \frac{1}{\phi(t_0)} \int_B dy = \kappa.$$

Luego, la propiedad $[H_3]$ implica que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B > (n+1)2t_0\} = \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(n2t_0)}\{\tau_B > 2t_0\}; \tau_B > n2t_0\} \leq \kappa \mathbb{P}_x\{\tau_B > n2t_0\}.$$

Por inducción matemática concluimos que $\mathbb{P}_x\{\tau_B > n2t_0\} \leq \kappa^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por lo tanto, para toda $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}_x\{\tau_B\} \leq 2t_0 \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\{\tau_B > n2t_0\} = \frac{2t_0}{1-\kappa},$$

lo cual concluye nuestra demostración en esta primera parte.

Supongamos ahora que 2. se cumple. Por la Proposición 3.1 tenemos que

$$\mathbb{P}_x\{\tau_B \leq 1\} = \mathbb{P}_x\{\tau_B < 1\} \geq \int_{B^c} p(1/2, x, y) dy > 0, \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^d. \quad (11)$$

Sea $f \in C_c(B)$ tal que $1_B \leq f \leq 1$. Para cada $r \geq 0$ definamos $T_r := \inf\{t > 0; \int_0^t f(X(u)) du > r\}$. Puesto que $f \leq 1$, puede verse fácilmente que $T_r \geq r$. Nótese que sobre $\{T_r < \infty\}$ se cumple lo siguiente:

- [T₁] : $\int_0^{T_r} f(X(u)) du = r$.
- [T₂] : $\{T_r \geq t\} = \{\int_0^t f(X(u)) du \leq r\}$.
- [T₃] : $T_{r+1} = T_r + T_1 \circ \theta_{T_r}$.

Es bien sabido que para cualquier proceso de Markov (espacialmente homogéneo) que satisface [H₁]-[H₄], la filtración $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ es continua a la derecha (ver por ejemplo [16, p. 75]). La propiedad [T₂] y la continuidad a la derecha de la filtración $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ implican que T_r es un tiempo de paro. Afirmamos que para cada $r > 0$ se tiene que $X(T_r) \in \text{Supp}(f)$ sobre $\{T_r < \infty\}$, donde $\text{Supp}(f) := \overline{\{x \in B; f(x) \neq 0\}}$. En efecto, supongamos que para alguna $r > 0$ se cumple que $X(T_r) \notin \text{Supp}(f)$. Entonces existe ω y una bola abierta $B_\epsilon(X(T_r)(\omega))$ tal que f se anula sobre ella. Luego, debido a [H₁] podemos fijar $\gamma > 0$ suficientemente pequeña de manera que $f(X(\bullet, \omega)) = 0$ sobre $[T_r(\omega), T_r(\omega) + \gamma]$. Usando esto y las propiedades [T₁], [T₂] se llega a que

$$r < \int_0^{T_r(\omega) + \gamma} f(X(u, \omega)) du = \int_0^{T_r(\omega)} f(X(u, \omega)) du = r,$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba nuestra afirmación. Sea $\delta := \inf_{x \in \text{Supp}(f)} \mathbb{P}_x\{\tau_B \leq 1\}$. De la Proposición 3.2 se sigue que existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $\delta = \mathbb{P}_{x_0}\{\tau_B \leq 1\}$. Más aún, (11) implica que $\delta > 0$. Utilizando [H₃], [T₃], el hecho de que $T_r \geq r$ y que $X(T_r) \in \text{Supp}(f)$ en el evento $\{T_r < \tau_B\}$, concluimos que

$$\mathbb{P}_x\{T_{r+1} < \tau_B\} = \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(T_r)}\{T_1 < \tau_B\}; T_r < \tau_B\} \leq (1 - \delta)\mathbb{P}_x\{T_r < \tau_B\}, \quad r > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Por inducción matemática se obtiene que $\mathbb{P}_x\{T_n < \tau_B\} \leq (1 - \delta)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Luego, puesto que $1_{(0, \tau_B/2]}(t)1_{B^c}(X(t)) = 0$, $1_B \leq f$ y [T₂],

$$\mathbb{E}_x\left\{\frac{\tau_B}{2}\right\} \leq \mathbb{E}_x\left\{\int_0^{\tau_B} f(X(t)) dt\right\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left\{\int_0^{\tau_B} f(X(t)) dt > n\right\} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x\{T_n < \tau_B\}.$$

Por lo tanto $\mathbb{E}_x\{\tau_B\} \leq 2(1 + \delta^{-1})$ para toda $x \in \mathbb{R}^d$. Esto último concluye la prueba de este teorema. \square

El movimiento browniano y el proceso simétrico α -estable son ejemplos de procesos de Markov cuyas respectivas funciones de densidad de probabilidad cumplen ambas condiciones del Teorema 3.1. En efecto, en el caso del movimiento browniano se conoce que

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, t > 0,$$

por lo que ambas condiciones del Teorema 3.1 se cumplen. Para el proceso simétrico α -estable, ver el Teorema 2.1 en [14, p. 208], incisos (1) y (5). Los procesos de Markov en los Ejemplos 2.2 y 2.3 satisfacen la segunda condición del Teorema 3.1 sobre cualquier boreliano acotado B . En efecto, para el Ejemplo 2.2 ver [3, Teorema 1.2, p. 2833] y para el Ejemplo 2.3 ver [13, Teorema 1.4, p. 557].

4. Propiedades de la densidad de transición de Dirichlet

En esta sección construimos una densidad de transición $p_D(t, x, y)$ para el proceso matado asociado a X y presentamos algunas de sus propiedades. Como veremos en la próxima sección, $p_D(t, x, y)$ es el kernel de calor de Dirichlet y por esta razón es conocido también en la literatura como densidad de transición de Dirichlet. En esta sección suponemos que $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Definamos $r(t, x, y) := \mathbb{E}_x \{p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); t > \tau_D\}$, $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ y

$$p_D(t, x, y) := p(t, x, y) - r(t, x, y), \quad t > 0, x, y \in \mathbb{R}^d. \quad (12)$$

Observe que si $B \in \mathcal{B}(D)$, por el teorema de Tonelli, $[H_3]$ y la Proposición 3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_B p_D(t, x, y) dy &= \mathbb{P}_x \{X(t) \in B\} - \mathbb{E}_x \{\mathbb{P}_{X(\tau_D)} \{X(t - \tau_D) \in B\}; t > \tau_D\} \\ &= \mathbb{P}_x \{X(t) \in B\} - \mathbb{P}_x \{X(t) \in B, t > \tau_D\} \\ &= \mathbb{P}_x \{X(t) \in B, t < \tau_D\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos el **proceso matado** $X_D = (X_D(t); t \geq 0)$ mediante

$$X_D(t) := \begin{cases} X(t), & t < \tau_D, \\ \dagger, & t \geq \tau_D, \end{cases}$$

donde \dagger es un valor fijo, entonces hemos probado que $p_D(t, x, y)$ es una densidad de transición para el proceso matado X_D . Al punto fijo \dagger se le denomina **punto cementerio**.

La densidad de transición $p_D(t, x, y)$ hereda algunas propiedades de la densidad de probabilidad $p(t, x, y)$. Antes de mostrar dichas propiedades probaremos tres lemas. El primero (Lema 4.1) es un resultado preliminar que nos ayudará a probar la continuidad de las trazas $p_D(t, x, \bullet)$, $t > 0$, $x \in D$ y $p_D(t, \bullet, y)$, $t > 0$, $y \in D$, sobre D . Como veremos en el Teorema 4.1, lo anterior tendrá como consecuencia la continuidad de $p_D(t, \bullet, \bullet)$ sobre $D \times D$, para cada $t > 0$.

Lema 4.1. *Supongamos que D abierto y sea $t > 0$.*

1. *Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, $r(t, x, \bullet)$ es continua en D .*
2. *Sea $h(s, x, y) := \mathbb{E}_x \{r(t - s, X(s), y)\}$, $0 < s < t$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces, para cada $s \in (0, t)$, $y \in D$, $h(s, \bullet, y)$ es continua en \mathbb{R}^d . Más aún, si $K \subseteq D$ es compacto, entonces*

$$\lim_{s \downarrow 0} \sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| = 0, \quad y \in D.$$

Demostración. Puesto que D es abierto, para cada $y \in D$ existe ϵ_y suficientemente pequeño de manera que $\overline{B_{\epsilon_y}(y)} \subseteq D$. Definamos $\delta_y := d(D^c, \overline{B_{\epsilon_y}(y)})$. Luego, cada δ_y es positivo debido a que D^c es cerrado.

1. Sea (y_n) una sucesión en D que converge a y . De la Proposición 2.1.3 se sigue que la sucesión de variables aleatorias $(p(t - \tau_D, X(\tau_D), y_n) 1_{\{t > \tau_D\}})$ está acotada por $M_{\delta_y/2}$ para n suficientemente grande. Debido a $[p_3]$, es claro que $M_{\delta_y/2} < \infty$. Por el teorema de la convergencia dominada y $[p_1]$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r(t, x, y_n) = r(t, x, y)$ lo cual prueba nuestra afirmación.

2. Sea (x_n) una sucesión en \mathbb{R}^d que converge a $x \in \mathbb{R}^d$. Usando que $y \in D$, la Proposición 2.1.3 y [p3], concluimos que

$$p(t - \tau_D, X(\tau_D), y) \mathbf{1}_{\{s > \tau_D\}} \leq M_{\frac{\delta_y}{2}} < \infty, \text{ para toda } x \in \mathbb{R}^d \text{ y } t \geq s. \quad (13)$$

Luego, de la definición de $r(t, x, y)$,

$$\begin{aligned} |h(s, x_n, y) - h(s, x, y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} r(t - s, z, y) |p(s, x_n, z) - p(s, x, z)| dz \\ &\leq M_{\frac{\delta_y}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |p(s, x_n, z) - p(s, x, z)| dz. \end{aligned}$$

Pero $\int_{\mathbb{R}^d} p(t, x_n, z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, z) dz = 1$ y $p(s, x_n, y), p(s, x, y)$ son no negativas, para toda n , por lo que el lema de Scheffé implica que el lado derecho de la última desigualdad converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Esto prueba la primera parte de 2.

Ahora, sean $t > 0$, $y \in D$ y $s \in (0, t)$. De la propiedad $[H_3]$ y (13) se sigue que

$$\begin{aligned} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| &= |\mathbb{E}_x\{p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); s \geq \tau_D\} \\ &\quad + \mathbb{E}_x\{\mathbb{E}_{X(s)}\{p(t - s - \tau_D, X(\tau_D), y); t - s > \tau_D\}; t > \tau_D > s\} \\ &\quad - h(s, x, y)| \\ &\leq \mathbb{E}_x\{p(t - \tau_D, X(\tau_D), y); s \geq \tau_D\} \\ &\quad + \mathbb{E}_x\{\mathbb{E}_{X(s)}\{p(t - s - \tau_D, X(\tau_D), y); t - s > \tau_D\}; s \geq \tau_D\} \\ &\leq 2M_{\frac{\delta_y}{2}} \mathbb{P}_x\{s \geq \tau_D\}. \end{aligned}$$

Sean K un subconjunto compacto de D y $\delta := d(D^c, K) > 0$. Claramente para toda $x \in K$ se cumple que $B_\delta(x) \subseteq D$. Por lo tanto

$$\sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| \leq 2M_{\frac{\delta_y}{2}} \sup_{x \in K} \mathbb{P}_x\{\tau_{B_\delta(x)} \leq s\}.$$

El resultado ahora es consecuencia de $[F_7]$.

□

La demostración de Lema 4.1.2 se basa en la prueba del Teorema 2.4 en [21, p. 142].

El siguiente lema es crucial en la demostración de que para cada $t > 0$, $p_D(t, \bullet, \bullet)$ es simétrica y su demostración se fundamenta en las pruebas de los siguientes resultados: [15, p. 33, Teorema 2.4], [4, p. 122, Proposición 4.1], [18, p. 153, Lema 4.1.3], [24, p. 36, Teorema 4.3].

Lema 4.2. *Sean $B, C \in \mathcal{B}(D)$ con D cerrado. Entonces*

$$\int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t \leq \tau_D\} dx = \int_B \mathbb{P}_x\{X(t) \in C, t \leq \tau_D\} dx,$$

para toda $t > 0$.

Demostración. En la prueba de la Proposición 2.1.4 se observó que el hecho de que D es cerrado implica que $\{t \leq \tau_D\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X(j_k) \in D; j_k = kt/2^n, k = 1, \dots, 2^n - 1\}$. Luego, al ser $p(t, x, y)$ una densidad de probabilidad de transición se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \int_C \mathbb{P}_x \{X(t) \in B, t \leq \tau_D\} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbb{P}_{x_0} \{X(j_1) \in D, X(j_2) \in D, \dots, X(j_{2^n}) \in B\} dx_0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D 1_C(x_0) \left[\int_D \int_D \dots \int_B \prod_{k=1}^{2^n} p(j_k - j_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_{2^n} \dots dx_2 dx_1 \right] dx_0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \int_D \int_D \dots \int_D 1_C(x_0) \prod_{k=1}^{2^n} p(t/2^n, x_{k-1}, x_k) 1_B(x_{2^n}) dx_{2^n} \dots dx_2 dx_1 dx_0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \int_D \int_D \dots \int_D 1_B(x_{2^n}) \prod_{k=1}^{2^n} p(t/2^n, x_{2^n-k}, x_{2^n-(k-1)}) 1_C(x_0) dx_0 dx_1 dx_2 \dots dx_{2^n}.
 \end{aligned}$$

Usando el cambio de variables $y_k = x_{2^n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ y la propiedad $[p_2]$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
 & \int_C \mathbb{P}_x \{X(t) \in B, t \leq \tau_D\} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \int_D \int_D \dots \int_D 1_B(y_0) \prod_{k=1}^{2^n} p(t/2^n, y_{k-1}, y_k) 1_C(y_{2^n}) dy_{2^n} \dots dy_2 dy_1 dy_0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D 1_B(y_0) \left[\int_D \int_D \dots \int_C \prod_{k=1}^{2^n} p(j_k - j_{k-1}, y_{k-1}, y_k) dy_{2^n} \dots dy_2 dy_1 \right] dy_0 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \mathbb{P}_{y_0} \{X(j_1) \in D, X(j_2) \in D, \dots, X(j_{2^n}) \in C\} dy_0 \\
 &= \int_B \mathbb{P}_x \{X(t) \in C, t \leq \tau_D\} dx.
 \end{aligned}$$

Esto conluye nuestra prueba. \square

El siguiente resultado será sustancial en la prueba de la propiedad de Chapman-Kolmogorov.

Lema 4.3. *Para cualesquiera $s, t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $D \subseteq \mathbb{R}^d$, la función $\int_D p(s, x, z)p(t, z, \bullet) dz$ es continua en \mathbb{R}^d .*

Demostración. Sean $y \in \mathbb{R}^d$ y (y_n) una sucesión que converge a y . Definamos, para cada $z \in \mathbb{R}^d$ y $n \in \mathbb{N}$, $f(z) := 1_D(z)p(s, x, z)p(t, z, y)$, $f_n(z) := 1_D(z)p(s, x, z)p(t, z, y_n)$, $g(z) := p(s, x, z)p(t, z, y)$, $g_n(z) := p(s, x, z)p(t, z, y_n)$. Nótese que $f \leq g$, $f_n \leq g_n$ para toda n y por la propiedad de Chapman-Kolmogorov de $p(t, x, y)$ se sigue que $\int_{\mathbb{R}^d} g(z) dz = p(s+t, x, y) < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^d} g_n(z) dz = p(s+t, x, y_n) < \infty$ para toda n . Pero de la propiedad $[p_1]$ obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} g(z) dz$. La afirmación es ahora consecuencia del teorema de la convergencia dominada generalizado (ver [28, p. 74, Lema 6.3]). \square

Nuestro próximo teorema es el principal resultado de esta sección y usamos la siguiente notación: dado un subconjunto abierto D de \mathbb{R}^d , $\delta_D(x) = d(x, D^c)$ para cada $x \in \mathbb{R}^d$. La demostración está

basada en las pruebas de los siguientes resultados: [15, p. 33, Teorema 2.4], [24, p. 36, Teorema 4.3], [21, p. 141, Teorema 2.4]

Teorema 4.1. *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto y $p_D(t, x, y)$ dada por (12). La densidad de transición $p_D(t, x, y)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $p_D(t, x, y)$ tiene la propiedad de Chapman-Kolmogorov.
2. Para toda $t > 0$, $p_D(t, \bullet, \bullet)$ es continua en $D \times D$.
3. $p_D(t, x, y) = p_D(t, y, x)$, $t > 0$, $x, y \in D$.

Demostración. 1. Del Lema 4.1.1 y [p1] se sigue que para cada $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$ la función $p_D(t, x, \bullet)$ es continua en D y así $p_D(t, x, y) \geq 0$ para toda $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $y \in D$ debido a que cada $p_D(t, x, \bullet)$ es una densidad de transición. Luego, $0 \leq p_D(s, x, z)p_D(t, z, y) \leq p(s, x, z)p(t, z, y)$, $s, t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y, z \in D$. Usando esto, el Lema 4.3 y el teorema de la convergencia dominada generalizado, puede probarse que $\int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, \bullet) dz$ es continua en D , para $s, t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. El argumento es similar al de la prueba del Lema 4.3 por lo que se omite. Por lo tanto, para probar la propiedad de Chapman-Kolmogorov, es suficiente demostrar que para cada $s, t > 0$ y $x, y \in D$ se tiene que

$$p_D(s + t, x, \bullet) = \int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, \bullet) dz, \quad m_\ell\text{-c.d.} \quad (14)$$

En efecto, sean $A \in \mathcal{B}(D)$ y $s, t > 0$. De la propiedad terminal (ver Proposición 2.1.1) de τ_D tenemos que $\{s + t < \tau_D\} = \{s < \tau_D, t < \tau_D \circ \theta_s\}$. Luego, por la propiedad $[H_3]$ se deduce que

$$\begin{aligned} \int_A p_D(s + t, x, y) dy &= \mathbb{P}_x\{X(s + t) \in A, s + t < \tau_D\} \\ &= \mathbb{E}_x\{\mathbb{P}_{X(s)}\{X(t) \in A, t < \tau_D\}; s < \tau_D\} \\ &= \int_D \mathbb{P}_z\{X(t) \in A, t < \tau_D\} p_D(s, x, z) dz \\ &= \int_A \left[\int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, y) dz \right] dy. \end{aligned}$$

De la arbitrariedad de $A \in \mathcal{B}(D)$, se sigue (14).

2. Comenzamos mostrando que $p_D(t, \bullet, y)$ es continua en D para cada $t > 0$ y $y \in D$. Sea (x_n) una sucesión en D que converge a $x \in D$. Puesto que D es abierto, podemos elegir $K \subseteq D$ compacto tal que $x, x_n \in K$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $s \in (0, t)$. Por tanto, si $h(s, x, y)$ es la función del Lema 4.1.2, tenemos que

$$\begin{aligned} |p_D(t, x_n, y) - p_D(t, x, y)| &\leq |p_D(t, x_n, y) - h(s, x_n, y)| + |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| \\ &\quad + |h(s, x_n, y) - h(s, x, y)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)| + |h(s, x_n, y) - h(s, x, y)|. \end{aligned}$$

Luego, del Lema 4.1.2 se sigue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |p_D(t, x_n, y) - p_D(t, x, y)| \leq 2 \sup_{x \in K} |p_D(t, x, y) - h(s, x, y)|.$$

Así, la continuidad de $p_D(t, \bullet, y)$ se sigue del Lema 4.1.2 haciendo $s \downarrow 0$. Ahora, debido a que, como se demostró en 1., $p_D(t, x, \bullet)$ también es continua, entonces $p_D(t, \bullet, \bullet)$ es continua, ya que por la propiedad de Chapman-Kolmogorov (parte 1. de este teorema),

$$p_D(t, x, y) = \int_D p_D(t/2, x, z) p_D(t/2, z, y) dz.$$

3. Puesto que D es abierto, podemos escribir que $D^c = \{x; \delta_D(x) = 0\}$. Definamos la sucesión creciente de conjuntos $D_n := \{x; \delta_D(x) \geq n^{-1}\}$ y consideremos las sucesiones de tiempos de paro $(\tau_{D_n^\circ})$ y (τ_{D_n}) . Claramente $(\tau_{D_n^\circ})$ y (τ_{D_n}) son sucesiones crecientes tales que $\tau_{D_n^\circ} \leq \tau_{D_n} \leq \tau_D$ para toda n . Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{D_n} = \tau_D, \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.}, x \in D. \quad (15)$$

Para ver esto, es suficiente mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{D_n^\circ} = \tau_D$, $\mathbb{P}_x\text{-c.s.}, x \in D$. Sea $\bar{\tau} := \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{D_n^\circ}$. Puesto que $\bar{\tau} \leq \tau_D$, (15) es inmediato sobre el evento $\{\bar{\tau} = \infty\}$. Debido a que $\bar{\tau} = \sup_n \tau_{D_n^\circ}$, de la Proposición 2.1.3 se sigue que $X(\tau_{D_n^\circ}) \notin D_n^\circ$ en el evento $\{\bar{\tau} < \infty\}$. Usando [H₂], la continuidad de $\delta_D(\bullet)$ y lo anterior, deducimos que $\delta_D(X(\bar{\tau})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_D(X(\tau_{D_n^\circ})) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0$, y así $X(\bar{\tau}) \notin D$ en el evento $\{\bar{\tau} < \infty\}$. Este hecho y la propiedad [H₄] prueban que $\bar{\tau} > 0$, $\mathbb{P}_x\text{-c.s.}, x \in D$ y consecuentemente $\tau_D \leq \bar{\tau}$ en $\{\bar{\tau} < \infty\}$. Esto último concluye la prueba de (15). Utilizando ahora (15), el teorema de la convergencia monótona, la Proposición 3.1 y el Lema 4.2 obtenemos que, para cualesquiera $B, C \in \mathcal{B}(D)$,

$$\begin{aligned} \int_B \int_C p_D(t, x, y) dx dy &= \int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t < \tau_D\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t < \tau_{D_n}\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbb{P}_x\{X(t) \in B, t \leq \tau_{D_n}\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \mathbb{P}_x\{X(t) \in C, t \leq \tau_{D_n}\} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \mathbb{P}_y\{X(t) \in C, t < \tau_{D_n}\} dy \\ &= \int_B \mathbb{P}_y\{X(t) \in C, t < \tau_D\} dy \\ &= \int_B \int_C p_D(t, y, x) dx dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_D(t, x, y) = p_D(t, y, x)$, $m_\ell \otimes m_\ell$ -c.d.q. La continuidad de cada $p_D(t, \bullet, \bullet)$ implica nuestro resultado. \square

Puesto que τ_D es un tiempo de paro y la filtración es continua a la derecha (ver [16, p. 75]), la ley cero-uno de Blumenthal nos dice que $\mathbb{P}_x\{\tau_D = 0\} \in \{0, 1\}$ para toda $x \in \mathbb{R}^d$. Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^d$ es **regular** para D^c cuando $\mathbb{P}_x\{\tau_D = 0\} = 1$. El conjunto de todos los puntos regulares a D^c es denotado por $(D^c)^r$. Por tanto $(D^c)^r = \{x \in \mathbb{R}^d; \mathbb{P}_x\{\tau_D = 0\} = 1\}$. Puede demostrarse que $(D^c)^\circ \subseteq (D^c)^r \subseteq \overline{D^c}$ (ver [6, p. 62]). Se dice que el conjunto D es **regular** si $\partial D \subseteq (D^c)^r$. Así, en un conjunto regular, el proceso X abandona el conjunto D inmediatamente después del tiempo de salida, siempre que inicie su movimiento en cualquier punto de la frontera.

Suponga que D es un conjunto regular abierto. De la propiedad $[H_4]$ se deduce que $\mathbb{P}_x\{X(0) \in A\} = 1_A(x)$ para toda $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Luego, si $x \in (D^c)^r$, entonces

$$r(t, x, y) = \mathbb{E}_x\{p(t, X(0), y)\} = p(t, x, y), \quad t > 0, y \in \mathbb{R}^d.$$

Pero D^c es cerrado, por lo que $D^c = (D^c)^\circ \cup \partial D \subseteq (D^c)^r \cup \partial D = (D^c)^r$. La igualdad anterior y el Teorema 4.1.3 implican que $p_D(t, x, y)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$p_D(t, x, y) := \begin{cases} p(t, x, y) - r(t, x, y), & x, y \in D, \\ 0, & x \notin D \text{ o bien } y \notin D. \end{cases}$$

Los conjuntos regulares son importantes en teoría del potencial. Por ejemplo, se conoce que si D es un dominio regular y $f \in C_b(D)$, entonces la función $u(x) = \mathbb{E}_x\{f(X(\tau_D))\}$, $x \in \overline{D}$, resuelve el problema de Dirichlet en el dominio D , es decir, u es armónica en D , continua en \overline{D} y $u|_{\partial D} = f$. La solución u puede interpretarse como el potencial electrostático en D cuando el potencial en la frontera está dado por f ([19, p. 474]).

5. Una aplicación a la teoría general de ecuaciones diferenciales parciales

En esta sección, presentamos una aplicación analítica de la densidad de transición de Dirichlet y sus propiedades, a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales .

Muchos procesos de reacción-difusión se pueden modelar matemáticamente mediante ecuaciones parabólicas. La importancia de dichos modelos radica en que presentan una relación matemática entre la tasa de variación temporal y la tasa de variación espacial de alguna magnitud física o química dependiendo del fenómeno. Un ejemplo de tales modelos es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= k(t)\mathcal{A}u(t, x) + h(t)\mathcal{R}(u(t, x)), \quad t > 0, x \in D, \\ u(0, x) &= f(x), \quad x \in D, u|_{D^c} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

donde D es un domino acotado de \mathbb{R}^d , $[0, \infty) \ni t \mapsto k(t) \in [0, \infty)$, $[0, \infty) \ni t \mapsto h(t) \in [0, \infty)$ son continuas, $[0, \infty) \ni u \mapsto \mathcal{R}(u) \in [0, \infty)$ es localmente Lipchitz, \mathcal{A} es un operador de difusión y la condición inicial $f \in \text{Dom}(\mathcal{A})$ es no negativa.

Por ejemplo, cuando $k(t) \equiv k > 0$, $\mathcal{A} = \Delta|_D$ y $h \equiv 0$, el problema anterior se transforma en el problema lineal clásico del calor con condición de frontera. Un modelo no lineal y quizás poco conocido entre lectores matemáticos, es el modelo de Frank-Kamenetzky (adimensional), es decir, cuando $k(t) \equiv 1$, $\mathcal{A} = \Delta|_D$, $h(t) \equiv \delta > 0$, $\mathcal{R}(u) = e^u$ y $f \equiv 0$. La constante adimensional (llamada *constante de Frank-Kamenetzky*) es importante porque depende de muchos parámetros, por ejemplo, la densidad del material y su difusividad térmica. El modelo de Frank-Kamenetzky describe como evoluciona con el tiempo la temperatura de un material combustible, que fue sometido a un proceso de ignición inicial y cuya temperatura externa es constante. Para más detalles ver [5] y las referencias allí dadas. Sin embargo, este operador de difusión podría ser más general como hemos visto en los Ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3.

De la teoría de semigrupos se conoce que la solución u del problema de Cauchy (16), puede ser expresada en términos del sistema de evolución asociado al generador no autónomo $k(t)\mathcal{A}$. Veremos a continuación como la densidad de transición de Dirichlet $p_D(t, x, y)$ permite construir este sistema

de evolución. Por esta razón, en la literatura de ecuaciones diferenciales parciales, se conoce a la densidad de transición de Dirichlet $p_D(t, x, y)$ como **kernel de calor de Dirichlet**.

En lo que sigue suponemos que D es abierto, $\text{Dom}(\mathcal{A}) \subseteq L^2(D)$ y denotamos por $\langle f, g \rangle$ a la integral $\int_D f(x)g(x) dx$. Recuerde que $L^2(D)$ es un espacio de Hilbert respecto al producto interno $\langle \bullet, \bullet \rangle$.

Para cada $f \in L^\infty(D)$, definamos

$$S_D(t)f(x) := \int_D f(y)p_D(t, x, y) dy, \quad t > 0, x \in D$$

y sea $S_D(0)f(x) := f(x)$, $x \in D$. La familia de operadores $(S_D(t); t \geq 0)$ forma un semigrupo fuertemente continuo en $L^2(D)$. Sin embargo, para demostrar esto, acorde con el Lema 1.4.3 en [18, p. 30], necesitamos el siguiente resultado preliminar.

Lema 5.1. *Para cada $f \in C_c(D)$ se tiene que $\lim_{t \downarrow 0} S_D(t)f(x) = f(x)$, $x \in D$.*

Demostración. Es bien conocido que toda función en $C_c(D)$ es uniformemente continua, por lo que, si $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; |x - y| \leq \delta\}$, entonces $\lim_{\delta \downarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$. Sean $\delta > 0$ y $x \in D$. Nótese que

$$\begin{aligned} |S_D(t)f(x) - f(x)| &= |S_D(t)f(x) - f(x)\mathbb{P}_x\{t < \tau_D\} + f(x)\mathbb{P}_x\{t < \tau_D\} - f(x)| \\ &\leq \int_D |f(x) - f(y)|p_D(t, x, y) dy + \|f\|_\infty \mathbb{P}_x\{\tau_D \leq t\} \\ &\leq \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}_x\{1_{(-\delta, \delta)^c}(X(t) - X(0)); X(0) = x\} \\ &\quad + \|f\|_\infty \mathbb{P}_x\{\tau_D \leq t\}, \end{aligned}$$

donde hemos usado $[H_4]$ en la última desigualdad. Debido a la propiedad $[H_1]$ y a la Proposición 2.1.2 se sigue que

$$\limsup_{t \downarrow 0} |S_D(t)f(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta).$$

Haciendo $\delta \downarrow 0$ se obtiene la prueba de este lema. \square

Teorema 5.1. *La familia de operadores $(S_D(t); t \geq 0)$ forma un semigrupo auto-adjunto de contracciones fuertemente continuo en $L^2(D)$.*

Demostración. Veamos primero que $(S_D(t); t \geq 0)$ tiene la propiedad de semigrupo. En efecto, sean $f \in L^2(D)$ y $s, t \geq 0$. Usando la propiedad de Chapman-Kolmogorov (ver Teorema 4.1.1)

$$\begin{aligned} S_D(s+t)f(x) &= \int_D f(u) \left[\int_D p_D(s, x, z)p_D(t, z, u) dz \right] du \\ &= \int_D \left[\int_D f(u)(t, z, u) du \right] p_D(s, x, z) dz \\ &= \int_D S_D(t)f(z)p_D(s, x, z) dz \\ &= S_D(s)S_D(t)f(x), \end{aligned}$$

lo cual muestra nuestra afirmación. Probamos ahora que cada $S_D(t)$ es auto-adjunto. Sean $f, g \in L^2(D)$ y $t \geq 0$. Entonces aplicando el Teorema 4.1.3, se sigue que

$$\begin{aligned}\langle S_D(t)f, g \rangle &= \int_D \left[\int_D f(y)p_D(t, x, y) dy \right] g(x) dx \\ &= \int_D f(y) \left[\int_D g(x)p_D(t, y, x) dx \right] dy \\ &= \langle f, S_D(t)g \rangle.\end{aligned}$$

A continuación mostramos que cada $S_D(t)$ es un operador de contracción en $L^2(D)$. Hemos visto que cada $p_D(t, x, \bullet)$ es una densidad de transición. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con respecto a la medida $p_D(t, x, y) dy$, el hecho de que cada $S_D(t)$ es un operador auto-adjunto, la propiedad de semigrupo y que $p_D(t, x, y) \leq p(t, x, y)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\|S_D(t)f\|_2 &\leq \sqrt{\langle S_D(t)1, S_D(t)|f|^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle S_D(t)S_D(t)1, |f|^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle S_D(2t)1, |f|^2 \rangle} \\ &\leq \|f\|_2,\end{aligned}$$

como se afirmaba. Finalmente mostramos que $(S_D(t); t \geq 0)$ es fuertemente continuo en $L^2(D)$. Lo anterior es consecuencia inmediata de [18, p. 30, Lema 1.4.3] y el hecho de que $C_c(D)$ es denso en $L^2(D)$. Sin embargo, presentaremos con detalle la prueba de esta afirmación. En efecto, puesto que cada $S_D(t)$ es una contracción en $L^2(D)$, se tiene que

$$\|S_D(t)f - f\|_2^2 \leq 2\|f\|_2^2 - 2\langle S_D(t)f, f \rangle, \quad f \in L^2(D).$$

Se sigue de esto, el Lema 5.1 y el teorema de la convergencia dominada que

$$\lim_{t \downarrow 0} \|S_D(t)f - f\|_2 = 0, \quad f \in C_c(D). \quad (17)$$

Sea $f \in L^2(D)$. Debido a la densidad de $C_c(D)$ en $L^2(D)$, para cada $\varepsilon > 0$ podemos fijar $f_\varepsilon \in C_c(D)$ tal que $\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon/2$. Usando nuevamente que cada $S_D(t)$ es una contracción en $L^2(D)$ se deduce que $\|S_D(t)f - f\|_2 \leq \varepsilon + \|S_D(t)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_2$. Luego, de (17) concluimos que

$$\limsup_{t \downarrow 0} \|S_D(t)f - f\|_2 \leq \varepsilon.$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ muestra el resultado y consecuentemente finaliza la demostración. \square

Veamos ahora como el semigrupo permite obtener una expresión de la solución u de (16). Para esta parte es suficiente tener presente las propiedades básicas de semigrupos de operadores y sus generadores (ver por ejemplo [25, Capítulo 1]). Sean $K(t, s) := \int_s^t k(r) dr$, $t, s \geq 0$ y $U(t, s)f := S(K(t, s))f$, $f \in L^\infty(D)$. Del Teorema 5.1, es inmediato que $(U_D(t, s); t \geq s \geq 0)$ es un sistema de evolución (ver [25, Definición 5.3, p. 129]) de contracciones en $L^2(D)$. Es fácil ver que si $v \in \text{Dom}(\mathcal{A})$, donde \mathcal{A} es el generador infinitesimal $(S_D(t); t \geq 0)$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} U_D(t, s)v(t, x) = k(t)\mathcal{A}U_D(t, s)v(t, x)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial s} U_D(t, s)v(s, x) = -U_D(t, s)k(s)\mathcal{A}v(s, x). \quad (18)$$

Sea u una solución (clásica) de (16) y sea $v(t, x) := U_D(t, s)u(s, x)$, $s \in [0, t]$, $x \in D$. Luego,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= U_D(t, 0)f(x) + v(t, x) - v(0, x) \\ &= U_D(t, 0)f(x) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial s}(s, x) ds \\ &= U_D(t, 0)f(x) + \int_0^t \left[-U_D(t, s)k(s)\mathcal{A}u(s, x) + U_D(t, s)\frac{\partial u}{\partial s}(s, x) \right] ds, \end{aligned}$$

donde hemos usado (18) en la última igualdad. Puesto que u satisface (16) concluimos de lo anterior que u satisface la ecuación integral

$$u(t, x) = U_D(t, 0)f(x) + \int_0^t h(s)U_D(t, s)\mathcal{R}(u(s, x)) ds, \quad t \geq 0, x \in D. \quad (19)$$

Cualquier solución de la ecuación integral (19) se le llama **solución mild** de (16). Nótese que si $p_D(s, x, t, y) := p_D(K(t, s), x, y)$, $t \geq s \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, entonces (19) queda expresada de la siguiente manera:

$$u(t, x) = \int_D f(y)p_D(s, x, t, y) dy + \int_0^t \int_D h(s)\mathcal{R}(u(s, y))p_D(s, x, t, y) dy ds \quad t \geq 0, x \in D.$$

Por tanto conocer propiedades y estimaciones del kernel de calor de Dirichlet $p_D(t, x, y)$, permite entender el comportamiento de la solución mild.

La importancia de la solución mild radica en que ha permitido obtener descripciones cualitativas del comportamiento asintótico de la solución u del modelo (16). Por ejemplo, se conoce que la solución u del problema (16) podría manifestar el fenómeno de **explosión en tiempo finito**, el cual se presenta cuando el valor de la solución diverge a infinito tras un cierto intervalo de existencia. Específicamente, se dice que u explota en un tiempo finito $t_e > 0$ si

$$\lim_{t \uparrow t_e} \|u(t, \cdot)\|_\infty = \infty.$$

En caso contrario se dice que u **no explota en tiempo finito o que está globalmente definida**. Determinar bajo que condiciones ocurre este fenómeno se llama **estudio de la explosión**. Como hemos visto, toda solución (clásica) de (16), es una solución mild. Luego, realizar un estudio de la explosión de la solución mild implica determinar bajo que condiciones ocurre o no ocurre la explosión en tiempo finito de la solución de (16). Esta idea ha sido explotada desde hace años por diferentes autores como puede ser consultado en [8, 9, 10, 22, 23] y las referencias dadas en dichos trabajos.

6. Conclusiones

En este trabajo se han presentado demostraciones de propiedades elementales del kernel de calor de Dirichlet para una clase bastante general de procesos de Markov simétricos. Como fue expuesto en los ejemplos, esta clase incluye procesos cuyos generadores asociados surgen en varios modelos matemáticos. El estudio del comportamiento asintótico de soluciones de modelos con condiciones de frontera de Dirichlet de la forma (16), depende del conocimiento de las propiedades del kernel de calor de Dirichlet, el cual posee una forma general no trivial (véase (12)).

En la actualidad no existen muchas fuentes bibliográficas que presenten demostraciones detalladas de las propiedades básicas del kernel de calor de Dirichlet para procesos de Markov simétricos

discontinuos y las que existen se basan en estimaciones del kernel de calor del proceso de Markov simétrico dado. De aquí, la importancia de la difusión de tales pruebas, ya que también demuestran la trascendencia de las técnicas probabilistas en el estudio de un objeto matemático con tal generalidad.

7. Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros anónimos por su cuidadosa revisión y comentarios, los cuales contribuyeron en la mejora de este artículo. El autor M.J. Ceballos-Lira agradece al SECIHTI por la beca otorgada en el marco de la convocatoria “Estancias Posdoctorales por México para la formación y Consolidación de las y los Investigadores por México 2022”.

8. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

9. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

Referencias

- [1] S. Abe and S. Thurner, “Anomalous diffusion in view of Einstein’s 1905 theory of Brownian motion”, *Phys. A.*, vol. 356, pp. 403–407, 2005, doi: 10.1016/j.physa.2005.03.035.
- [2] D. Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] J. Bae, J. Kang, P. Kim P and J. Lee, “Heat kernel estimates for symmetric jump processes with mixed polynomial growths”, *Ann. Probab.*, vol. 5, no. 49, pp. 2830–2868, 2019, doi: 10.1214/18-AOP1323.
- [4] R. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*. Springer New York, NY, 1995.
- [5] D. Bebernes and D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*. Springer New York, 1989.
- [6] R. Blumenthal and R. Getoor, *Markov processes and potential theory*. Academic Press, 1968.
- [7] J.-P. Bouchaud and A. Georges, “Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications”, *Phys. Rep.*, vol. 195, pp. 127–293, 1990, doi: 10.1016/0370-1573(90)90099-N.
- [8] M.J. Ceballos-Lira and A. Pérez, “Blow up and globality of solutions for a nonautonomous semilinear heat equation with Dirichlet condition”, *Rev. Colomb. Mat.*, vol. 53, no. 1, pp. 57–72, 2019, doi: 10.15446/recolma.v53n1.81042.

- [9] M.J. Ceballos-Lira and A. Pérez, “Global solutions and blowing-up solutions for a nonautonomous and non local in space reaction-diffusion system with Dirichlet boundary conditions”, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, vol. 23, no. 4, pp. 1025–1053, 2020, doi: 10.1515/fca-2020-0054.
- [10] M.J. Ceballos-Lira and A. Pérez, “Blow up and non-blow up of a reaction-diffusion system with time-dependent Lévy generators and reactions of class H ”, *Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, vol. 22, pp. 451–472, 2025, doi: 10.30757/ALEA.v22-16.
- [11] Z.-Q. Chen, P. Kim and R. Song, “Dirichlet heat kernel estimates for $\Delta + \Delta^{\alpha/2}$ in $C^{1,1}$ open sets”, *J. Lond. Math. Soc.* vol. 54, no. 4, pp. 1357–1392, 2010, doi: 10.1112/jlms/jdq102.
- [12] Z.-Q. Chen, P. Kim and R. Song, “Dirichlet heat kernel estimates for $\Delta^{\alpha/2} + \Delta^{\beta/2}$ ”, *Illinois J. Math.*, vol. 84, no. 2, pp. 1357–1392, 2011, doi: 10.1215/ijm/1348505533.
- [13] Z.-Q. Chen and T. Kumagai, “A priori Hölder estimate, parabolic Harnack principle and heat kernel estimates for diffusions with jumps”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, vol. 26, no. 2, pp. 551–589, 2010, doi: 10.4171/RMI/609.
- [14] Z.-Q. Chen and R. Song, “Intrinsic Ultracontractivity and conditional gauge for symmetric stable processes”, *J. Funct. Anal.*, vol. 150, pp. 204–239, 1997, doi: 10.1006/jfan.1997.3104.
- [15] K.L. Chung and Z. Zhao, *From brownian motion to Schrödinger’s equation*. Springer Berlin, Heidelberg, 1995.
- [16] K.L. Chung and J.B. Walsh, *Markov processes, brownian motion, and time symmetry*. Springer New York, NY, 2005.
- [17] G.B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, 2^a ed. John Wiley & Sons, 1995.
- [18] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*. Berlin, New York: De Gruyter, 1994.
- [19] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 2^a ed. Springer-Verlag, 2002.
- [20] P. Kim and R. Song, “Boundary behavior of harmonic functions for truncated stable processes”, *J. Theor. Probab.*, vol. 21, pp. 287–321, 2008, doi: 10.1007/s10959-008-0145-y.
- [21] P. Kim and R. Song, “Boundary Harnack principle for Brownian motions with measure-valued drifts in bounded Lipschitz domains”, *Math. Ann.*, vol. 339, pp. 135–174, 2009, doi: 10.1007/s00208-007-0110-6.
- [22] J.A. López-Mimbela and A. Pérez, “Global and nonglobal solutions of a system of nonautonomous semilinear equations with ultracontractive Lévy generators”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 423, no. 1, pp. 720–733, 2015, doi: 10.1016/j.jmaa.2014.10.025
- [23] A. Pérez, “Global existence and blow-up for nonautonomous systems with non-local symmetric generators and Dirichlet conditions”, *Diff. Equ. Appl.*, vol. 7, no. 2, pp. 263–275, 2015, doi: 10.7153/dea-07-15.
- [24] S.C. Port and C.J. Stone, *Brownian motion and classical potential theory*. Academic Press, Inc., 1978.

- [25] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York, Inc., 1983.
- [26] R.L. Schilling and T. Uemura, “On the Feller property of Dirichlet forms generated by pseudo differential operators”, *Tohoku Math. J.*, vol. 59, pp. 401–422, 2007, doi: 10.2748/tmj/1192117985.
- [27] J. Vázquez, “Recent progress in the theory of nonlinear diffusion with fractional Laplacian operators”, *Discrete contin. Dyn. Syst.*, vol. 7, no. 4, pp. 857–885, 2014, doi: 10.3934/dcdss.2014.7.857.
- [28] J. Villa Morales, Introducción a la medida e integración. Textos Universitarios, Ciencias Básicas, UAA, 2005.